P

La ontología de la matemática

Una defensa del convencionalismo como solución al problema de la existencia de los objetos matemáticos

Autor:
Piñeiro, Gustavo
Tutor:
Cassini, Alejandro

2019

Tesis presentada con el fin de cumplimentar con los requisitos finales para la obtención del título Doctor de la Facultad de Filosofía y Letras de la Universidad de Buenos Aires en Filosofía

Posgrado

Universidad de Buenos Aires

Facultad de Filosofía y Letras

Tesis para aspirar al grado de Doctor en Filosofía

LA ONTOLOGÍA DE LA MATEMÁTICA. UNA DEFENSA DEL CONVENCIONALISMO COMO SOLUCIÓN AL PROBLEMA DE LA EXISTENCIA DE LOS OBJETOS MATEMÁTICOS.

Doctorando: Lic. Gustavo Piñeiro

Director: Dr. Alejandro Cassini

Año 2019

Agradecimientos y Dedicatoria

Gratitud infinita a mi esposa, Gisela Serrano, y a mis hijas, Carolina Piñeiro y Diana Piñeiro. Sin ellas esta tesis no hubiera sido posible. Gisela fue, además, la primera lectora de estas líneas.

Un agradecimiento muy especial al Dr. Alejandro Cassini, por su apoyo y su guía.

Agradezco también al Dr. Guillermo Martínez y al Dr. Carlos M. Sánchez, quienes, de maneras y en momentos muy diferentes, contribuyeron a que pudiera llegar hasta aquí.

Dedico esta tesis a la memoria de Diego Kovács, Jaime Poniachik y Mario Tobelem.

Gustavo Piñeiro
Febrero de 2019

Índice

1. Introducción

En el presente trabajo se analizará el problema de determinar el estatus ontológico de los objetos que estudia la matemática. Siguiendo la terminología más usual en la actualidad, los llamaremos simplemente los "objetos matemáticos" (aunque en ocasiones emplearemos como sinónimas las expresiones "entidades matemáticas" y "entes matemáticos"). En términos muy generales, el problema ontológico de los objetos matemáticos es el de establecer si esos objetos existen independientemente de la mente humana, y, en caso de que así sea, qué clase de objetos son. Tradicionalmente, el problema ontológico de la matemática ha estado estrechamente relacionado con el problema epistemológico, es decir, con la cuestión de cómo es posible conocer los objetos matemáticos. En esta tesis estudiaremos fundamentalmente el problema de la existencia de los objetos matemáticos, pero también dedicaremos algunas secciones al problema epistemológico. La razón de ello es que, históricamente, algunas de las críticas fundamentales a determinadas posiciones ontológicas acerca de los objetos matemáticos han sido de carácter epistemológico. Más precisamente, se ha argumentado que, si se postula la existencia de los objetos matemáticos como independientes de la mente, y además se los concibe como entidades abstractas que no tienen propiedades espaciotemporales, entonces el conocimiento de tales objetos no resulta posible.

El problema de la existencia de los objetos matemáticos es muy antiguo y se remonta, según el consenso de la mayoría de los expertos en el tema, a la filosofía de Platón.[1] En esta tesis no adoptaremos un enfoque histórico del problema. Tampoco intentaremos exponer y analizar de manera sistemática todas las posiciones posibles acerca de la existencia y la naturaleza de los objetos matemáticos.[2]. Nos limitaremos a estudiar con detalle las dos posturas actualmente vigentes que han tenido mayor repercusión en el curso de las últimas décadas: el platonismo (en dos variantes recientes, el platonismo pleno y el estructuralismo *ante rem*) y el ficcionalismo. En lo

---

[1] Véase Shapiro (2000) para una introducción histórica a la filosofía de la matemática, que comienza su relato, precisamente, con un análisis de la obra de Platón.

[2] Véase Balaguer (2009a) para una clasificación de las principales posiciones efectivamente adoptadas a lo largo de la historia de la filosofía. La manera de nombrarlas suele variar de un autor a otro. El propio Balaguer (2009) ha modificado en parte su terminología respecto de su obra anterior (Balaguer, 1998).

que sigue situaremos estas dos posiciones en el contexto más general de la filosofía de las matemáticas.

Las posturas actuales en la filosofía de la matemática se pueden clasificar en dos grandes grupos: realistas y antirrealistas. A su vez, realismo y antirrealismo se aplican tanto a la ontología como a la epistemología. Esto vale en general para cualquier clase de entidades, abstractas o concretas, aunque aquí solo consideraremos las que estudia la matemática. El realismo ontológico es la posición que sostiene que los objetos de la matemática existen por sí mismos, con independencia del lenguaje o la conciencia de los matemáticos, y con independencia de que sean o no conocidos en un momento determinado. Por su parte, el antirrealismo ontológico es la tesis según la cual los objetos matemáticos no existen por sí mismos con independencia de los sujetos humanos. En algunas variantes del antirrealismo los objetos matemáticos existen, pero no tienen independencia de la mente humana. Según otras posiciones antirrealistas, los objetos matemáticos no existen en absoluto. En cuanto al conocimiento de los objetos matemáticos, el realismo epistemológico sostiene que los objetos que pueblan el universo matemático, así como sus propiedades y relaciones, se descubren, de una manera análoga, en algunos aspectos al menos, a la manera en que se descubren las entidades concretas, por ejemplo, un planeta o una estrella, cuya existencia se desconocía hasta que se logró observarlas. En oposición a este punto de vista, el antirrealismo matemático sostiene que los objetos matemáticos no se descubren, sino que se construyen o se inventan, de una manera análoga, también solo en algunos aspectos, a la manera en que se construye un objeto concreto o se inventa una obra literaria.

El realismo epistemológico está asociado siempre a alguna forma de realismo semántico, según el cual todos los enunciados matemáticos tienen un valor de verdad bien definido, son verdaderos o falsos, independientemente de que podamos conocer o determinar cuál es dicho valor de verdad. El antirrealismo epistemológico, por su parte, está asociado frecuentemente a alguna forma de antirrealismo semántico, según el cual los enunciados matemáticos o bien no tienen valor de verdad en absoluto, o bien son todos falsos, o bien su valor de verdad depende de que sea conocido por el sujeto. En cualquier caso, todos los antirrealistas semánticos coinciden en negar que los enunciados matemáticos tengan un valor de verdad por sí mismos, independientemente de que dicho valor de verdad sea conocido. Según Shapiro (2000), aunque el realismo ontológico y el realismo semántico (que él llama, “realismo del valor veritativo”) se complementan naturalmente, son posturas independientes. Lo mismo vale para los respectivos antirrealismos. En principio, es posible ser realista ontológico y antirrealista semántico, o antirrealista ontológico y realista semántico, sin embargo, estas son posiciones minoritarias en la filosofía de la matemática y no nos ocuparemos de ellas en esta tesis.[3]

La más importante de las posiciones realistas respecto de la ontología es el platonismo matemático, que es la postura que sostiene que los objetos matemáticos son entes abstractos que existen por sí mismos en un mundo no espaciotemporal. De hecho, algunos autores emplean la expresión "realismo matemático" como sinónima de "platonismo matemático", pero aquí preferiremos distinguirlas. Consideraremos que el platonismo es solo una especie de realismo, entre otras posibles. Todas las posiciones filosóficas platonistas admiten la existencia de objetos abstractos que no se encuentran en el espaciotiempo, pero tales objetos no necesariamente son entidades matemáticas. Se ha postulado la existencia de otros objetos abstractos tales como ideas, conceptos, proposiciones o teorías. El platonismo matemático admite que los objetos que estudia la matemática existen en este universo abstracto, pero no está comprometido con la tesis de que sean sus únicos habitantes. El platonismo matemático admite diversas variantes, que se diferencian en cuanto a cuáles son exactamente los objetos matemáticos cuya existencia se postula, y en cuál es la naturaleza específica de estos. Las tres variantes más importantes del platonismo matemático son el platonismo de objetos, el platonismo pleno y el estructuralismo *ante rem*. Las tres especies de platonismo que estudiaremos en esta tesis son realistas tanto respecto de la ontología como de la epistemología y la semántica. Admiten que los objetos matemáticos existen por sí mismos con independencia de los sujetos humanos, que tenemos la capacidad de descubrir al menos algunos de esos objetos y conocer sus propiedades, y que todos los enunciados matemáticos siempre tienen un valor veritativo bien definido, independientemente de que alguna vez lleguemos a determinarlo. De hecho, la asociación entre estas tres formas de realismo es tan estrecha en todas las posiciones platonistas que podría dudarse en llamar platonismo a una postura que rechazara alguna de ellas.

El platonismo de objetos es la variante más antigua del platonismo, ya que sus orígenes se remontan a la segunda mitad del siglo XIX y a los trabajos sobre teoría de

[3] Véase Shapiro (2000: 24-33) para una caracterización más detallada de estas posiciones.

conjuntos de Georg Cantor y Gottlob Frege, respectivamente[4]. Para esta variante del platonismo, no todos los objetos matemáticos que son lógicamente posibles existen necesariamente. De hecho, parte de la tarea del matemático consistiría en determinar cuáles son aquellos que realmente existen, y cuáles son los que no existen.

El estructuralismo *ante rem* es la postura que sostiene que los objetos abstractos que estudia la matemática son estructuras, y no objetos "aislados". Para esta postura, entes como los números o los conjuntos deben verse solamente como posiciones en tales estructuras. Los entes matemáticos, entonces, carecerían de propiedades intrínsecas y sólo poseerían propiedades relacionales. Por ejemplo, el número natural 3 no es una entidad que pueda identificarse con independencia de la estructura constituida por la progresión de los números naturales. Es simplemente una posición en esa estructura, caracterizada por propiedades relacionales como ser el sucesor inmediato del número 2 y ser el antecesor inmediato del número 4. El estructuralismo *ante rem* se originó en la década de 1980 en una serie de artículos de Robert Resnik y Stewart Shapiro (Resnik 1981 y 1982, Shapiro 1983). Se presentó de manera sistemática en dos libros de estos autores, publicados el mismo año (Resnik 1997, Shapiro 1997), que constituyen hasta hoy la exposición más completa de esta postura.

El estructuralismo *ante rem* fue objeto de críticas importantes en relación con la cuestión de la identidad de los objetos matemáticos. En lo esencial, la crítica afirma que la posición estructuralista tiene la consecuencia poco deseable de multiplicar las entidades matemáticas que los matemáticos consideran como una y la misma. Así, por ejemplo, el número real 3 debería considerarse como un objeto diferente del número natural 3, ya que tiene propiedades relacionales diferentes de las de este, tales como la de no tener sucesor ni predecesor inmediato. Sin embargo, es un hecho que los matemáticos los tratan como si fueran un mismo objeto y, además, aceptan que el conjunto de los números naturales está propiamente incluido en el conjunto de los números reales. En cambio, el estructuralista parecería obligado a sostener que se trata de dos conjuntos que no tienen elementos en común, es decir, dos estructuras que no comparten posición alguna.[5]

Antes de describir la tercera de las principales posturas platonistas, debemos mencionar que el talón de Aquiles de todas estas posiciones ha sido tradicionalmente

[4] Para colecciones de fuentes originales véase Cantor (1895), Ewald (1996), Ferreirós (2006) y van Heijenoort (1976).

[5] Para diversos aspectos de la crítica y del consiguiente debate véase Parsons (1990), Reck y Price (2000), Keränen (2001 y 2006), y la defensa de Shapiro (2006). Analizaremos este tema en el Capítulo 5 de esta tesis.

el problema epistemológico. Tanto el platonismo de objetos como el estructuralismo *ante rem* presuponen la capacidad de percibir, directa o indirectamente, los objetos abstractos; capacidad que algunos autores identifican con la intuición matemática (por ejemplo, Parsons 2008). Ya Gödel (1964) había sustentado su platonismo de objetos en la existencia de una intuición intelectual, análoga a la percepción de objetos en el espacio, por medio de la cual se obtendría una certeza directa de la verdad de los axiomas de las teorías matemáticas. Pero, entre otras objeciones, esta idea debe afrontar la crítica basada en el hecho de que los matemáticos no han podido pronunciarse acerca de la verdad o falsedad de determinados axiomas, como la Hipótesis del Continuo en la teoría de conjuntos. Algunos autores realistas, como Maddy (1980, 1990, 1999, 2011), han sostenido la posibilidad de percibir directamente objetos matemáticos, tales como los conjuntos finitos. Pero parece evidente que no hay posibilidad de percibir conjuntos transfinitos. Por otra parte, no se advierte cómo se podría resolver el conflicto entre intuiciones discordantes.

En dos artículos clásicos, Paul Benacerraf (1965 y 1973) formuló la crítica más general a todas las posiciones platonistas, conocida desde entonces como la objeción epistemológica. En lo fundamental es la siguiente: debido a su definición como entes no espaciotemporales, los objetos abstractos, en caso de existir, serían causalmente inertes. En particular, serían incapaces de provocar cualquier efecto en el cerebro humano, por lo que sería imposible cualquier tipo de percepción o experiencia sobre ellos. Dado que no es posible interactuar causalmente con los objetos matemáticos, no podemos tener percepción sensible o intelectual de ellos. Benacerraf formuló su crítica en el contexto de la teoría causal de la percepción, pero es posible separarla de esa teoría específica y reformularla de manera más general. Si los objetos matemáticos no existen en el espacio y el tiempo, no podemos tener acceso epistémico alguno a esa clase de objetos. Por consiguiente, no tendremos manera de determinar cuáles objetos existen y cuáles no, por ejemplo, no habría modo de saber si los llamados cardinales grandes de la teoría de conjuntos, de los cuales seguramente no tenemos intuición alguna, son parte del universo matemático. Esta ha sido considerada como una crítica severa a cualquier ontología platonista. La tercera variante del platonismo, el platonismo pleno, tuvo entre sus principales objetivos la superación de esa crítica y, en buena medida, fue motivado por ella.

El platonismo pleno, formulado por Mark Balaguer, es la postura que sostiene que todo objeto matemático que lógicamente puede llegar a existir, efectivamente existe (Balaguer 1998). Dicho con más precisión, para el platonismo pleno toda teoría consistente, que sea puramente matemática, describe verazmente una parte del mundo abstracto de las matemáticas. En otras palabras, toda entidad matemática postulada por una teoría lógicamente consistente existe en el universo abstracto de los objetos matemáticos. De este modo, para estudiar un objeto abstracto, los matemáticos no necesitarían adquirir conocimiento de él mediante algún tipo de percepción o intuición, sino que sólo deberían estudiar alguna teoría consistente que postule su existencia.

Esta posición ha sido objeto de dos críticas importantes, una de carácter ontológico y otra de carácter epistemológico. La crítica ontológica sostiene que, en principio al menos, son posibles teorías matemáticas internamente consistentes, pero incompatibles entre sí, de modo que una de ellas postule la existencia de objetos matemáticos que no pueden existir según la otra teoría. Por ejemplo, de acuerdo con la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel no existen conjuntos tales como la clase universal y el conjunto de todos los conjuntos, pero según la teoría de von Neumann-Bernays-Gödel tales conjuntos existen como clases propias. Así, podría ocurrir que el universo matemático mismo no sea consistente. La crítica epistemológica, por su parte, afirma que el conocimiento de la existencia de los objetos matemáticos depende de la prueba de la consistencia absoluta de la teoría que postula la existencia de tales objetos. Pero dado que, comenzando por cualquiera de las dos teorías de conjuntos mencionadas, no tenemos pruebas de consistencia absolutas para la mayoría de las teorías matemáticas importantes, no podríamos afirmar la existencia de la mayoría de los objetos matemáticos. Por ejemplo, en sentido estricto, no sabríamos si existen o no los números irracionales, dado que no hay prueba de consistencia de la aritmética de los números reales.

Existen también posturas realistas no platonistas, que, aunque fueron populares en el siglo XIX, no tienen particular vigencia en la actualidad (sobre ellas véase Balaguer 2009a). Estas se dividen en aquellas que afirman que la matemática estudia objetos físicos (o bien propiedades físicas de objetos concretos), y aquellas que afirman que la matemática estudia objetos mentales. Entre las primeras se encuentra, por ejemplo, la postura sostenida por John Stuart Mill, quien afirmaba que la matemática es la más general de las ciencias naturales, ya que estudia las propiedades que son comunes a todos los objetos (plantas, rocas, animales, etc.). Según este punto de vista, la afirmación "$2 + 2 = 4$" significa que, si a dos objetos cualesquiera se le agregan otros dos, siempre se obtienen cuatro objetos. Entre las segundas, se encuentra el psicologismo, postura que sostiene que la matemática trata de ideas o de entidades mentales; de esta forma, "$2 + 2 = 4$" sería una afirmación que se refiere a la relación entre ciertas ideas que existen en la mente humana. En esta tesis no tendremos en cuenta ninguna de estas dos posiciones realistas no platonistas.

En la actualidad, la más importante de las posturas no realistas es el ficcionalismo matemático, según el cual los objetos matemáticos no existen, o, en otras palabras, los términos individuales del lenguaje matemático, tales como "2" o "{∅}", no hacen referencia a ningún objeto existente. En términos generales, el ficcionalismo sostiene que los objetos matemáticos son ficciones útiles para la práctica de la ciencia, pero no son entidades reales. Su modo de existencia es semejante al de los personajes de las ficciones literarias, con los que frecuentemente se los compara. Para el ficcionalista, en principio, las entidades matemáticas son prescindibles, es decir, no son indispensables para la ciencia. La primera formulación explícita del ficcionalismo fue la de Hartry Field (1980) que se propuso mostrar que las teorías físicas pueden formularse sin emplear los números reales. En su lugar, utiliza agregados de puntos espaciotemporales, considerados como entidades físicas concretas, y no como entidades abstractas. El programa de Field suscitó numerosas críticas. En primer lugar, se dudó de la posibilidad de formular teorías físicas como la mecánica cuántica prescindiendo de objetos matemáticos como los números complejos, que desempeñan un papel fundamental en la versión estándar de dicha teoría. Además, se argumentó que en caso de que fuera posible la eliminación de todo objeto matemático en la formulación de las teorías físicas, el resultado de dicha "nominalización" sería sumamente complicado y tendría escasa utilidad práctica.

Así como el platonismo admite diferentes variantes, dependiendo de cuáles sean exactamente los objetos matemáticos cuya existencia se postula, el ficcionalismo admite también diferentes variedades, dependiendo de cuáles sean las respuestas que se formulen para las dos cuestiones que se plantean a continuación. La primera es cuál sería el valor de verdad de un enunciado como "$2 + 2 = 4$", que, según el ficcionalismo, se refiere a una relación entre entes que no existen. El enunciado puede ser considerado verdadero, o bien falso, o bien carente de valor de verdad. La segunda cuestión se refiere a cómo se compatibiliza la tesis de que los números no existen con el hecho de que estos sean usados exitosamente en las ciencias empíricas.[6] Todas las posiciones ficcionalistas son genéricamente antirrealistas tanto respecto de la ontología, como de la epistemología y la semántica. En esta tesis no intentaremos analizar y comparar las diferentes posiciones ficcionalistas. Tomaremos como representantes del ficcionalismo

[6] Para diferentes versiones del ficcionalismo véanse, entre otras, las obras de Azzouni (2004 y 2010), Balaguer (2009b), Field (1980, 1989 y 2001), Leng (2010), y Yablo (2002 y 2005).

a las obras de Field (1980, 1989 y 2001), de Leng (2010) y de Balaguer (2009b), que proporcionan algunos de los principales tipos de argumentos a favor de la posición ficcionalista.

Todas las posiciones ficcionalistas deben pagar el costo de una complicación en la lógica y la semántica del lenguaje matemático. Una de las ventajas del platonismo es que permite mantener la lógica y la semántica clásicas (bivalentes) para todos los enunciados matemáticos: para el platonista cualquier enunciado matemático es definidamente verdadero o falso, con independencia de que de hecho hayamos demostrado o no su verdad o falsedad. El ficcionalista, en cambio, no puede aceptar esa conclusión y, aunque tiene varias alternativas para reemplazar la semántica clásica, todas presentan dificultades. Una posibilidad, por ejemplo, consiste en renunciar a la bivalencia y aceptar que los enunciados matemáticos no tienen valor de verdad, aunque, presumiblemente, los enunciados metamatemáticos sí tengan valor de verdad. Otra posibilidad consiste en sostener que todos los enunciados matemáticos son falsos, pero esa tesis resulta incompatible con la lógica clásica. En efecto, de acuerdo con la lógica clásica todas las generalizaciones universales deberían ser vacuamente verdaderas. Además, si un enunciado, como "$2+2=4$", se considera falso (porque no existen los números naturales), su negación debería ser verdadera. Por consiguiente, no es posible mantener la tesis de que todos los enunciados matemáticos son falsos en el contexto de la lógica clásica. Finalmente, no resulta claro cuál sería la lógica no clásica más adecuada para la posición ficcionalista.[7]

Otras posturas antirrealistas que pueden mencionarse son el convencionalismo, que sostiene que las definiciones de los objetos matemáticos son convencionales, producto de una decisión acerca de los significados de los símbolos matemáticos y de las reglas que los vinculan. De este modo, una afirmación como "$2+2=4$" es analíticamente verdadera, ya que su verdad surge como consecuencia de las definiciones (convencionales) adoptadas para los símbolos "2", "4", "$+$" e "$=$". El deductivismo, otra postura antirrealista, sostiene que todo enunciado matemático es de la forma "La oración θ se deduce del sistema de axiomas A", afirmación que se simboliza como "$A \vdash \theta$". Un ejemplo de enunciado matemático verdadero sería, entonces, "$AP_1 \vdash (2+2=4)$", donde AP_1 designa a los axiomas de Peano para la aritmética de primer orden. En esta tesis, no discutiremos el deductivismo (sobre el cual véase Balaguer 2009a). En cambio, intentaremos apoyar una determinada forma

[7] Analizaremos esta cuestión en el Capítulo 7 de esta tesis, donde intentaremos evaluar los costos y beneficios del cambio de lógica.

de convencionalismo, no extrema sino moderada, acerca de la existencia de los objetos matemáticos.

La tesis a sostener en el presente trabajo es que los axiomas y definiciones de la matemática son elegidos en forma convencional, sin que sea necesario decidir explícitamente acerca del estatus ontológico de los objetos referidos por los términos del lenguaje. Sin embargo, a pesar de esta neutralidad ontológica, la lógica de la práctica matemática es incompatible con la afirmación de que los objetos matemáticos no existen en absoluto, como asimismo es incompatible con la afirmación de que son objetos abstractos que existen en un mundo no-espaciotemporal. En síntesis, argumentaremos en contra tanto del platonismo como del ficcionalismo y defenderemos una forma de convencionalismo moderado respecto de la existencia de los objetos matemáticos.

La argumentación se desarrollará en tres partes. En la primera, que abarca los capítulos del 2 al 5, se analizará el platonismo matemático que es, actualmente, la postura realista más defendida. La intención en esta primera parte es sostener que la objeción epistemológica permite llegar a la conclusión de que el platonismo de objetos no constituye una postura filosófica viable. La misma conclusión es aplicable al estructuralismo *ante rem*; postura que, por otra parte, según se argumentará, es incompatible con la práctica matemática.

Se criticará asimismo la afirmación de Balaguer de que el platonismo pleno es la única variante del platonismo que logra superar la objeción epistemológica. Se argumentará también que esta postura es autocontradictoria, y que, aunque esa inconsistencia puede salvarse, esto sólo puede hacerse pagando el costo de que la postura se vuelva incompatible con la práctica matemática. La conclusión general de esta primera parte será que el platonismo no es una postura viable en la filosofía de la matemática.

En la segunda parte, que abarca los capítulos 6 y 7, se estudiará el ficcionalismo matemático, que es, actualmente, la postura antirrealista más defendida. Tal como se afirmado más arriba con respecto al platonismo pleno, la intención general será argumentar que esta postura, o bien es inconsistente en sí misma, o bien es incompatible con la lógica de la práctica matemática, por lo que no puede ser considerada como viable.

La tercera parte de esta tesis, que abarca los capítulos 8 y 9, tiene como objetivo exponer la solución convencionalista al problema de la existencia de los objetos matemáticos. En el Capítulo 8 se propondrá una definición de qué es la matemática, así como de los objetos que esta estudia, y se expondrán los detalles de la solución convencionalista propuesta. En particular se mostrará, mediante diversos ejemplos, su compatibilidad con la práctica y con la historia de la matemática. Finalmente, dado que la mayoría de las convenciones actualmente empleadas en la matemática se basan en el lenguaje conjuntista, en el capítulo 9 se analizará, como caso de estudio, la relación entre la solución convencionalista propuesta y la teoría de conjuntos. En particular, se estudiará el problema de la reducción de los números naturales a conjuntos, que no es unívoca. Se argumentará al respecto que se trata de una decisión convencional, pero apoyada en ciertas condiciones de adecuación que se justifican de manera pragmática, es decir, por su conveniencia, simplicidad, y otros criterios no factuales.

En el Capítulo 10 se expondrán las conclusiones de toda la tesis y se plantearán algunos problemas abiertos acerca de las fuentes de las cuales surgen las convenciones empleadas en la matemática.

2. El platonismo matemático: descripción general

2.1. Los objetos abstractos

Se llama platonismo matemático a la postura que sostiene que los entes que estudia la matemática son, todos ellos, objetos abstractos. Por lo tanto, para poder definir adecuadamente qué es el platonismo matemático es necesario determinar previamente qué se entiende por un objeto abstracto.

La definición de objeto abstracto es de carácter negativo; en la filosofía de la matemática se dice que un objeto abstracto es un ente al que no se le pueden asignar coordenadas espaciales ni temporales. (Dado que, según la teoría especial de la relatividad existen múltiples sistemas de referencia espaciotemporales, cada uno de ellos relativo a un observador inercial, habría que enunciar esta definición situándose con respecto a un observador en concreto; llegado el caso, si resultara necesario apelar a esta sutileza, deberá entenderse como observador a cualquier matemático individual.)

Se analizan a continuación algunas consecuencias de la definición que se acaba de enunciar. La primera de ellas, que es de naturaleza lingüística, dice que es imposible referirse a los objetos abstractos aplicándoles expresiones tales como "arriba de", "abajo de", "fuera de", "dentro de", "después de", "antes de", o cualquier otra que implique una comparación entre coordenadas espaciales o temporales, ya que estas, por definición, no pueden ser asignadas a un objeto abstracto. En particular, sería erróneo decir que un objeto abstracto se encuentra "fuera del espaciotiempo", como se afirma con frecuencia, ya que "fuera" alude a una comparación espacial.

Otra consecuencia lógica de la definición es que los objetos abstractos son inmutables, en otras palabras, es imposible que un aspecto cualquiera de su naturaleza se modifique de alguna manera. En efecto, si O es un objeto abstracto, que O cambie significaría que existe una afirmación P referida a O y dos instantes de tiempo t_0 y t_1, tales que P es verdadera en el instante t_0, y falsa en el instante t_1. Existirían entonces dos coordenadas temporales, t_0 y t_1, asociadas con O, pero esto es absurdo porque O es abstracto. Se ha probado de este modo, por el absurdo, que un objeto abstracto es inmutable. Una manera más simple de expresar el mismo razonamiento es la siguiente: si un objeto abstracto O mutara entonces habría para él un "antes y un después del cambio”, lo cual contradice la definición de O. Por idénticas razones, un objeto abstracto no puede moverse, en el sentido físico del término (porque un movimiento implica un cambio de coordenadas espaciales). Asimismo, un objeto abstracto carece de longitud, área o volumen, ya que todos estos conceptos conllevan en su definición la comparación de coordenadas espaciales.

Otra consecuencia de la definición consiste en que los objetos abstractos son eternos. Se utiliza aquí la palabra “eterno” en uno de los sentidos que le asigna el Diccionario de la Real Academia Española que, en su primera acepción, define a la palabra como: “que no tiene principio ni fin”. En efecto, si la existencia de un objeto abstracto O tuviera un comienzo entonces habría dos instantes t_0 y t_1, tales que en t_0 la afirmación “O existe” sería falsa, mientras que en el instante t_1 esa misma afirmación sería verdadera; hecho que contradice la inmutabilidad de O antes demostrada. De la misma manera se puede demostrar que la existencia de O no puede tener un final.

Se sigue también de lo anterior que los objetos abstractos tienen necesariamente todas sus propiedades en acto, es decir, no son susceptibles de tener propiedades potenciales. En efecto, por el mismo argumento anterior, si un objeto abstracto actualizara alguna de sus propiedades en potencia, se podría distinguir un momento anterior y uno posterior a la actualización de dicha propiedad. Pero ello no es posible porque no son objetos temporales. Igualmente, la actualización de una propiedad implicaría un cambio o mutación en un objeto abstracto, circunstancia que tampoco es posible porque, como se acaba de señalar, son objetos inmutables.

Otra consecuencia muy importante de la definición consiste en que los objetos abstractos son causalmente inertes. Esto quiere decir que no pueden ser causa de ningún fenómeno que ocurra en el espaciotiempo. La demostración de este hecho sigue la misma línea que los razonamientos anteriores. Si O fuera la causa de un fenómeno espaciotemporal esto significaría que O ha interactuado de alguna manera con un objeto espaciotemporal (un objeto concreto) C; como C es espaciotemporal existen entonces dos coordenadas temporales t_0 y t_1 que corresponden respectivamente al comienzo y al final de la interacción (si ésta fuese instantánea entonces simplemente sería $t_0 = t_1$). Vía la interacción, esas mismas coordenadas son atribuibles a O, hecho que contradice la definición de un objeto abstracto. Un argumento similar prueba que tampoco pueden ser efecto de ningún fenómeno físico.

A su vez, una consecuencia de la inercia causal es que los objetos abstractos carecen de masa, momento, energía, así como de cualquier otra propiedad física, ya que la definición de todas ellas implica la existencia de alguna interacción con un objeto concreto.

Pero la consecuencia más importante de la inercia causal consiste en que los objetos abstractos no pueden provocar ninguno de aquellos fenómenos fisicoquímicos que suceden en nuestro cerebro y que solemos llamar "intuición", "inspiración", "surgimiento de ideas", u otros términos semejantes. Asimismo, es imposible que sean percibidos de ninguna manera, ya que, como se he dicho, no pueden interactuar de ninguna forma con nuestros sentidos ni con nuestro cerebro. Este hecho será muy relevante en el próximo capítulo, cuando se analice el problema epistemológico que afecta al platonismo matemático.

Finalmente, en el caso específico de los objetos matemáticos, como por ejemplo los números, los conjuntos y las funciones, es claro que estos deben ser infinitos en número (nótese además que hay conjuntos infinitos de todas las cardinalidades) y poseer un número infinito de propiedades. La infinitud en el número de los objetos matemáticos está ya presupuesta en la aritmética elemental de los números naturales y explícitamente afirmada en todas las teorías de conjuntos desde Georg Cantor en adelante. La infinitud en el número de las propiedades de todo objeto matemático se sigue del hecho de que tiene propiedades relacionales con cada uno de los infinitos objetos matemáticos diferentes de sí mismo. Por ejemplo, el número 3 tiene la propiedad de ser menor que el número 4, la de ser menor que el número 5, y así sucesivamente.

Por otra parte, muchas propiedades de los objetos matemáticos que son, aparentemente, intrínsecas, pueden también definirse como propiedades relacionales. Por ejemplo, las propiedades de ser un número par, primo, perfecto, racional, irracional o trascendente son definibles por medio de las relaciones que ese número tiene, o no tiene, con otros números. Por el momento se dejará abierta la cuestión de si los objetos matemáticos tienen propiedades que sean genuinamente intrínsecas, es decir, que no puedan ser definidas como propiedades relacionales, y, en caso de que las tuvieran, si éstas son finitas o infinitas en número. Si la cuestión puede permanecer abierta es porque la caracterización de los objetos matemáticos como abstractos no depende de la respuesta; en cualquier caso, tales objetos tendrán siempre un número infinito de propiedades relacionales en acto.

2.2. Caracterización general del platonismo

El concepto de platonismo fue introducido en la filosofía de la matemática en un artículo de Paul Bernays (1935). Allí afirmaba que:

> […] La tendencia de la que estamos hablando consiste en considerar a los objetos [matemáticos] como cortados de todo vínculo con el sujeto reflexionante. Dado que esta tendencia se afirma especialmente en la filosofía de Platón, me permito llamarla "platonismo". (Bernays 1935, trad. en Benacerraf y Putnam 1983: 259).

Bernays consideraba que el platonismo ya está presente en la aritmética, cuando se adopta el supuesto de que conjuntos como el de los números enteros y el de los números reales existen como totalidades. Pero, según él, el punto de vista platonista se expresa sobre todo en la teoría de conjuntos de Cantor y, dado que los métodos conjuntistas fueron ampliamente aceptados por los matemáticos, concluía que "no es una exageración decir que actualmente el platonismo reina en la matemática" (Bernays 1935, trad. en Benacerraf y Putnam 1983: 261).

Se ha indicado más arriba que los objetos abstractos son eternos, en otras palabras, que no hay un principio ni un final para su existencia. Ahora bien, desde un punto de vista lógico, que la existencia de un objeto no tenga principio ni fin no implica que ese objeto exista. En efecto, si el objeto no existe entonces es eterno ya que su existencia nunca comenzó ni tampoco terminará (pues no puede terminar aquello que nunca comenzó). Asimismo, un objeto que no existe carece de coordenadas espaciotemporales, y es inmutable e inmóvil. Por ejemplo, el dios Zeus carece de coordenadas espaciotemporales, es inmutable y eterno; es posible atribuir coordenadas temporales a la "idea de Zeus", pero no a "Zeus" en sí. De la misma forma, se le pueden atribuir coordenadas temporales a "la idea de conjunto infinito", aunque no a "los conjuntos infinitos" en sí (si es que estos fueran objetos abstractos).

En resumen, todas las características de los objetos abstractos mencionadas más arriba, tanto la definición en sí, como sus consecuencias lógicas, son igualmente atribuibles tanto a los "objetos abstractos" como a los "objetos inexistentes". El platonismo matemático no sólo postula que los objetos abstractos existen, sino que además sostiene que todos los objetos que estudia la matemática son, de hecho, objetos abstractos. Puede decirse entonces que el platonismo matemático sostiene las dos afirmaciones siguientes:

(1) Existen objetos abstractos.
(2) La matemática estudia objetos abstractos (existentes).

Obviamente, si la segunda afirmación es verdadera entonces también lo será la primera; sin embargo, en principio, no vale la recíproca: parece perfectamente concebible que existan objetos abstractos, pero que estos no sean los objetos estudiados por la matemática. A menos que pudiera probarse que (1) implica (2), la única de las dos afirmaciones cuyo estudio es relevante para la filosofía de la matemática es la (2). En otras palabras, la cuestión de la existencia, o no, de entes abstractos es irrelevante para la filosofía de la matemática, a menos que estos entes abstractos sean precisamente los objetos de estudio de la matemática.

2.3. El platonismo de objetos

Aunque hasta el momento se ha hablado aquí de "el platonismo" de manera genérica, esta postura admite, sin embargo, diferentes matices, que difieren en cuáles son exactamente los entes matemáticos cuya existencia se postula. Es decir, existen diferentes especies de platonismos, todas ellas unificadas bajo un mismo género porque suscriben las afirmaciones (1) y (2) formuladas más arriba.[8] La versión más antigua es el platonismo de objetos, que Mark Balaguer caracteriza de la siguiente manera:

> La versión más tradicional del platonismo –defendida, por ejemplo, por Frege y Gödel– es la versión del platonismo de objetos. El platonismo de objetos es el punto de vista según el cual el reino de las matemáticas es un sistema de objetos matemáticos abstractos, tales como números o conjuntos, y que nuestras teorías matemáticas, tales como la teoría de números y la teoría de conjuntos, describen tales objetos. Así, desde este punto de vista, el enunciado '3 es primo' dice que el objeto abstracto que es el número 3 tiene la propiedad de la primalidad. (Balaguer 1998: 8)

Para ejemplificar la posición platonista, en sus diferentes variedades, se puede considerar el problema de la Hipótesis del Continuo, formulado en 1878 por Georg Cantor.

Cantor demostró que al conjunto de los números naturales le corresponde el menor de todos los cardinales infinitos, que él llamó $\aleph_0$. Demostró asimismo que al

[8] El platonismo matemático se analiza en casi todas las obras generales de filosofía de la matemática, por ejemplo, en Shapiro (2000), capítulo 8, y Colyvan (2012), capítulo 3. El estudio más completo y detallado del platonismo, en sus diferentes especies, es el de Balaguer (1998). En Balaguer (2009a) el autor ofrece otro panorama general del tema, que introduce algunos cambios terminológicos respecto de su obra anterior.

conjunto de los números reales le corresponde un cardinal mayor, aunque, en principio, no pudo probar si ese cardinal es $\aleph_1$, $\aleph_2$, u otro mayor. Durante los años siguientes, Cantor pudo determinar el cardinal de diferentes subconjuntos de los números reales, y en todos los casos halló que éste era, o bien $\aleph_0$, o bien el mismo cardinal que el de los números reales. En consecuencia, en 1878 escribió:

> Se hace plausible la proposición de que la cantidad de clases de conjuntos lineales [subconjuntos de los números reales] que surge aplicando este principio de clasificación es finita y precisamente igual a dos. (Cantor 1878, traducción en Ferreirós 2006, 14)

En otras palabras, Cantor formula la conjetura de que no existe un cardinal α que esté estrictamente comprendido entre el cardinal de los de los números naturales y el de los reales. En otras palabras, Cantor conjetura que el cardinal de los números reales es igual a $\aleph_1$. Esta conjetura suele ser llamada la Hipótesis del Continuo, abreviada HC.

Después de muchos intentos fallidos de demostración, en 1938 Kurt Gödel probó que si la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel, con el axioma de elección (habitualmente conocida como ZFC), es consistente, entonces es imposible demostrar, a partir de los axiomas de esa teoría, que la Hipótesis del Continuo es falsa (dicho de otra forma, la negación de HC no es demostrable en HC). Por otra parte, en 1963 Paul Cohen probó que, siempre en el supuesto que ZFC sea consistente, tampoco es posible demostrar a partir de sus axiomas que HC sea verdadera. Es decir, ni HC ni su negación son demostrables a partir de los axiomas de ZFC. Esta situación suele describirse diciendo que HC es indecidible con respecto a ZFC.[9] Siguiendo a Cantor, mientras permanezca indefinido si es $\aleph_1$, o mayor, al cardinal de los números reales se lo suele llamar c.

Puede demostrarse que el cardinal de los números reales es igual a $2^{\aleph_0}$, es decir, que $2^{\aleph_0} = c$. Por lo tanto, afirmar que la Hipótesis del Continuo es verdadera equivale a decir que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, mientras que decir que es falsa equivale a sostener que $2^{\aleph_0} > \aleph_1$. Por su parte, la Hipótesis Generalizada del Continuo (abreviada HGC) es la extensión de la Hipótesis del Continuo a todos los cardinales transfinitos. Se la puede formular, entonces, de la siguiente manera: $2^{\aleph_n} = \aleph_{n+1}$. Según demostraron Gödel y Cohen, HGC también es indecidible respecto de ZFC.

---

[9] Gödel presentó su resultado en un breve artículo no técnico (Gödel 1938) y en uno más técnico (Gödel 1939) luego lo expuso con mayores detalles en un libro (Gödel 1940). Algo similar hizo Cohen (1963-1964 y 1966, respectivamente).

Conviene aclarar que ZFC es la teoría de conjuntos más usada por los especialistas en lógica y teoría de conjuntos, por lo que suele ser considerada como la teoría de conjuntos estándar. Sin embargo, existe otra teoría de conjuntos que es igualmente muy usada (aunque más por los matemáticos en general que por los especialistas en lógica y teoría de conjuntos). Se trata de la teoría de von Neumann-Bernays-Gödel, conocida como NBG.[10] Esta teoría es "más potente" que ZFC, en el sentido de que todos los teoremas de ZFC son demostrables en NBG, pero no recíprocamente, sin embargo, la Hipótesis del Continuo y la Hipótesis Generalizada del Continuo son, de todos modos, también indecidibles en NBG.

Tenemos entonces que, en el contexto de las dos teorías de conjuntos más usadas por los matemáticos (supuesto que estas sean consistentes), no es posible demostrar que existe un conjunto A cuyo cardinal sea mayor que $\aleph_0$ y menor que c, pero tampoco es posible demostrar que ese conjunto A no exista. La pregunta que se plantea aquí es qué afirman las diferentes especies del platonismo acerca de la existencia de un tal conjunto A.

Para el platonismo, en cualquiera de sus versiones, los conjuntos son objetos abstractos que tienen una existencia objetiva e independiente de la mente humana. El platonismo de objetos, sin embargo, no sostiene que existan todos los conjuntos cuya existencia es consistente con una teoría dada. Por ejemplo, para esta postura la afirmación que sostiene la Hipótesis del Continuo, "No existe un conjunto A con un cardinal intermedio entre $\aleph_0$ y c", es objetivamente verdadera, o bien objetivamente falsa, y sólo puede darse exactamente una de las dos opciones. Para el platonismo de objetos, la imposibilidad de decidir, a partir de los axiomas de ZFC (o de NBG), la verdad o falsedad de HC indica solamente la falta de potencia de estas teorías para resolver el problema, y sugiere que es necesario incorporar axiomas adicionales que permitan resolver la cuestión. Al respecto, Kurt Gödel escribió:

> Si se acepta que el significado de los signos primitivos de la teoría de conjuntos [...] es correcto, entonces los conceptos y teoremas de la teoría de conjuntos describirían alguna realidad bien determinada en la cual la conjetura de Cantor [la Hipótesis del Continuo] debería ser cierta o falsa.
>
> Por ello su indecidibilidad a partir de los axiomas que hoy en día aceptamos sólo puede significar que estos axiomas no entrañan una descripción completa de la realidad. (Gödel 1947, trad. en Feferman 1990: 520)

[10] La teoría de conjuntos se estudia con más detalle en el Capítulo 9, donde se ofrecen las referencias bibliográficas pertinentes, tanto sobre las fuentes históricas como sobre las obras contemporáneas.

De todas las versiones del platonismo, la visión del mundo matemático que propone el platonismo de objetos es la más parecida a la visión que ofrece el realismo "del sentido común" (aplicado a los objetos macroscópicos de tamaño medio).[11] En efecto, excepto en posiciones muy radicalizadas, normalmente nadie duda de la existencia de objetos tales como sillas, mesas o puertas. Asimismo, dada una habitación cerrada y a oscuras, nadie dudaría tampoco de que la afirmación "En la habitación existe al menos una mesa hexagonal" es (supuesto que se ha definido claramente qué es una mesa y qué significa que sea "hexagonal"), o bien verdadera, o bien falsa; y esa verdad o falsedad puede determinarse objetivamente si se posee la información suficiente (que en este caso podría obtenerse, por ejemplo, entrando a la habitación y encendiendo la luz).

De manera análoga, para el platonismo de objetos, el mundo de los entes matemáticos sería, metafóricamente hablando, una gran habitación parcialmente a oscuras en la que algunos objetos existen, y otros no. Como la mesa hexagonal en la habitación a oscuras, un conjunto A con un cardinal intermedio entre $\aleph_0$ y c, o bien existe, o bien no existe, y para determinarlo sólo sería necesario, metafóricamente hablando, encender la luz adecuada. La diferencia entre una situación y otra consiste en que, mientras que es claro (al menos para el sentido común) cómo y por qué podríamos percibir la mesa hexagonal, no es para nada evidente cómo es posible tener algún tipo de percepción de los objetos abstractos. Este problema será analizado en el próximo capítulo.

2.4. El platonismo pleno

Una segunda especie del platonismo, propuesta por Mark Balaguer a fines del siglo XX, es el llamado platonismo pleno (en inglés, *full-blooded Platonism*). Dado que el Capítulo 4 de este trabajo estará dedicado por completo a describir, así como a criticar, esta postura, aquí se hará solamente una breve introducción al tema.[12]

---

[11] De hecho, algunos matemáticos y filósofos también llaman "realismo" al platonismo de objetos, o incluso al platonismo en general (véase al respecto Balaguer 2009a). Aquí preferimos evitar el uso del término realismo, que tiene múltiples significados.

[12] El platonismo pleno fue presentado por primera vez en Balaguer (1998); una versión diferente es desarrollada en Linsky y Zalta (1995), así como en una serie de artículos subsiguientes, como por ejemplo Linsky y Zalta (2006). En Colyvan y Zalta (1999) y en Restall (2003) se plantean objeciones al platonismo pleno de Balaguer; y el propio autor, en Balaguer (2009a) las discute, y formula una postura más favorable al ficcionalismo (que será discutida en los Capítulos 6 y 7 de este trabajo). En el Capítulo 4 se tratan las objeciones al platonismo pleno.

La idea central del platonismo pleno es que, si la existencia de un objeto matemático es lógicamente consistente, entonces ese objeto efectivamente existe. En palabras de Mark Balaguer:

> El platonismo pleno es la postura de que todo objeto matemático lógicamente posible existe. (Balaguer 1998: 5)

Si se retoma la metáfora de la sección anterior, ante la pregunta de si en una habitación a oscuras existe una mesa hexagonal, el platonismo pleno respondería que hay más de una habitación, que en algunas de ellas hay, en efecto, una mesa hexagonal, pero que en otras hay una mesa pentagonal, y, más en general, que hay habitaciones con mesas de cualquier diseño que sea realizable desde un punto de vista lógico, es decir, que su realización sea lógicamente posible en el sentido de no implicar contradicción o inconsistencia alguna.

Dicho con más precisión, el platonismo pleno afirma que, si una teoría matemática que sea consistente postula como axioma, o bien puede demostrar como teorema, que un objeto matemático existe, entonces ese objeto efectivamente existe en el universo abstracto de las matemáticas.

En consecuencia, a diferencia de lo que sucede con el platonismo de objetos, para el platonismo pleno no hay un único "reino de los conjuntos". Por el contrario, cada teoría de conjuntos que sea consistente describe correctamente un "reino de los conjuntos", y cada uno de estos "reinos" existe objetivamente. Por ejemplo, según lo demostrado por Gödel y Cohen, si a la teoría de Zermelo-Fraenkel con el axioma de elección (es decir ZFC), se le agrega la Hipótesis del Continuo (HC) como nuevo axioma (y suponiendo que ZFC sea consistente), se obtiene una teoría consistente que podemos indicar como T_1. Por otra parte, si a ZFC se le agrega la negación de la Hipótesis del Continuo, también se obtiene una teoría consistente, que puede indicarse como T_2 (T_1 y T_2 se conocen, respectivamente, como teoría cantoriana y teoría no cantoriana de conjuntos).

$$T_1 \text{ tiene como axiomas: } \{\text{Axiomas de ZFC}\} \cup \{\text{HC}\}$$
$$T_2 \text{ tiene como axiomas: } \{\text{Axiomas de ZFC}\} \cup \{\neg\text{HC}\}$$

Para el platonismo pleno, tanto T_1 como T_2 describen un mundo abstracto que efectivamente existe Se deduce que para esta postura existen "reinos matemáticos" en los cuales la Hipótesis del Continuo es verdadera, y otros "reinos matemáticos" donde la Hipótesis del Continuo es falsa. En otras palabras, la afirmación "No existe un conjunto con un cardinal intermedio entre $\aleph_0$ y c" es objetivamente verdadera o falsa en cada uno de esos universos; pero, a diferencia de lo que sucede en el caso del platonismo de objetos, no puede decirse que sea "verdadera" o "falsa" en términos absolutos.

Puede encontrarse un claro antecedente de esta idea en la conferencia que dictó David Hilbert en la inauguración del Segundo Congreso Internacional de Matemáticas, en París, en el año 1900.

> Si a un concepto se le asignan atributos contradictorios, yo digo que matemáticamente *el concepto no puede existir*. Así, por ejemplo, un número real cuyo cuadrado es –1 no existe matemáticamente. Pero si puede demostrarse que los atributos asignados al concepto nunca pueden llevar a una contradicción por la aplicación de un número finito de pasos lógicos, entonces yo digo que la existencia matemática del concepto (por ejemplo, un número o una función que satisface determinadas propiedades) está probada con ello. (Hilbert 1900, citado en Gray 2000: 275, el destacado es del original.)

La frase "nunca pueden llevar a una contradicción por la aplicación de un número finito de pasos lógicos" apunta claramente a la idea de una teoría de primer orden, concepto que Hilbert y sus discípulos desarrollarían unas dos décadas más tarde. Sin embargo, a pesar de que la cita de Hilbert parece tener una muy clara relación con la concepción que propone el platonismo pleno, Mark Balaguer es escéptico al respecto.

> No sugiero que sea el primero en defender una postura como el platonismo pleno. Edward Zalta y Bernard Linsky han defendido un punto de vista similar; han sostenido que "hay tantos objetos de un cierto tipo como sea posible". Pero su concepción de objeto abstracto es poco ortodoxa, por esa razón su postura es muy diferente, en muchos sentidos, al platonismo pleno. No sé si algún otro autor ha sostenido que el reino de las matemáticas es completo a la manera del platonismo pleno, pero algunos filósofos han hecho afirmaciones que nos traen a la mente una imagen similar. Hilbert, por ejemplo, escribió en una carta a Frege:
>
> Si las consecuencias los axiomas dados arbitrariamente no se contradicen entre sí, entonces son verdaderos y las cosas definidas por los axiomas existen. Éste es para mí el criterio de verdad y existencia.

> De manera similar Poincaré dice que "en matemáticas la palabra 'existe'… significa libre de contradicción" […] Pero mientras estos pasajes traen a la mente la imagen que propone el platonismo pleno de un reino de las matemáticas completo, no creo que ninguno de estos filósofos hubiera aceptado el platonismo pleno. Por encima de todo, es claro que ni Hilbert ni Poincaré hubieran aceptado ninguna forma de platonismo, no sólo el platonismo pleno. (Balaguer 1998: 7-8)

Pero aún antes de Hilbert, hay asimismo antecedentes de las ideas del platonismo pleno en el trabajo de Georg Cantor, quien, en su *Fundamentos para una teoría general de conjuntos*, de 1883, dice:

> La matemática es enteramente libre en su desarrollo, y sólo está limitada por la consideración autoevidente de que sus conceptos sean consistentes en sí mismos, así como que estén en relaciones fijas, determinadas por definiciones, con los conceptos construidos antes, ya presentes y acreditadas. En particular, para la introducción de nuevos números [se refiere específicamente a los ordinales infinitos] sólo está obligada a dar definiciones de ellos mediante las cuales se les conferirá tal determinación y, bajo ciertas circunstancias, tales relaciones con los antiguos números, que puedan ser distinguidos unos de otros con precisión en cada caso. En cuanto un número satisface todas estas condiciones, puede y debe ser considerado en matemáticas como existente y real. (Cantor 1883, trad. en Ferreirós 2006: 106-107)

Cantor no habla de teorías de primer orden, pero esto se debe a que se trata de un concepto que sería introducido recién a fines de la década de 1920, unos 40 años más tarde.

2.5. El estructuralismo *ante rem*

Una tercera versión del platonismo es el llamado estructuralismo *ante rem*, una postura que fue desarrollada a fines del siglo XX por Michael Resnik y Stewart Shapiro.[13]

---

[13] El estructuralismo *ante rem* se originó en la década de 1980 en una serie de artículos, escritos de manera independiente, por Resnik y Shapiro (Resnik 1981 y 1982, Shapiro 1983). Se presentó de manera sistemática en dos libros de estos autores, publicados el mismo año (Resnik 1997, Shapiro 1997), que constituyen hasta hoy la exposición más completa de esta postura.

La idea central del estructuralismo *ante rem* consiste en que los objetos abstractos que estudia la matemática son estructuras matemáticas (que consisten en objetos relacionados entre sí), y no objetos "aislados". Para esta postura, entes tales como los números o los conjuntos deben verse solamente como posiciones en esas estructuras, posiciones que, consideradas por sí mismas, carecen de propiedades intrínsecas.

Según se indicó en 2.1, los objetos matemáticos poseen, en principio, propiedades intrínsecas y propiedades relacionales. Para el estructuralismo *ante rem* todas las propiedades relevantes de los objetos matemáticos son relacionales, y cualquier propiedad intrínseca que pudieran poseer (como, por ejemplo, la propiedad de ser cognoscibles) son intrascendentes desde el punto de vista matemático.

Dado que el Capítulo 5 de este trabajo estará dedicado a describir y criticar esta postura, sólo mostraremos aquí una breve introducción a algunas de las consecuencias que se deducen de sus premisas fundamentales.

Para comenzar nótese que para el platonismo de objetos el número 3 es un ente en sí mismo, dotado de características intrínsecas entre las que se cuenta, por ejemplo, la de ser un número primo. De este modo, para el platonismo de objetos, la afirmación "3 es primo" describe una propiedad intrínseca del número 3, del mismo modo que "El Sol es una estrella" enuncia una propiedad intrínseca del Sol.

Para el estructuralismo *ante rem*, en cambio, el número 3 es solamente una posición en la estructura llamada "sucesión de los números naturales" y sus propiedades no son intrínsecas, sino que dependen de las relaciones mutuas que el 3 establece con las demás posiciones de esa misma estructura. Para esta postura, entonces, "3 es primo" no es una propiedad del 3 en sí mismo, sino una característica de la relación que existe entre la "posición 3" y las demás posiciones de la estructura "sucesión de los números naturales".

Esta idea tiene reminiscencias de la definición que dio Georg Cantor para el concepto de *ordinal* (o de *tipo ordinal*, como él lo llamaba). Para Cantor un ordinal es un conjunto bien ordenado en el que se hace abstracción de la naturaleza de los objetos que lo forman.[14] En otras palabras, Cantor sólo considera la "estructura subyacente del

[14] Un conjunto bien ordenado es un conjunto cuyos elementos están ordenados de tal manera que todo subconjunto de ese conjunto tiene primer elemento. Por ejemplo, $\langle \mathbb{N}, > \rangle$ (el conjunto de los números naturales con la relación "mayor que") es un conjunto bien ordenado.

orden", descartando las características "internas" de los objetos que habían sido ordenados.

Para Cantor, por ejemplo, el ordinal ω es exactamente la misma estructura que Resnik y Shapiro llaman la estructura de los números naturales. El ordinal $\omega + 1$ se obtiene agregando a ω un nuevo elemento "a la derecha" de todos los demás, es decir, agregando un número que es, por definición, mayor que todos los números naturales. De manera análoga se obtiene $\omega + 2$; y así sucesivamente.

En el Capítulo 5 se expondrán diferentes objeciones que se pueden plantear al estructuralismo *ante rem*. Conviene, sin embargo, mencionar aquí, a modo de introducción al tema, una de las objeciones más discutidas por todos los autores que han criticado esta postura: se trata del problema de la identidad de los objetos matemáticos.[15]

Como se ha dicho más arriba, para el estructuralismo *ante rem* el número 3 es una posición en la estructura "sucesión de los números naturales". Pero el número 3 es también una posición en la estructura de los números reales, una estructura que puede ser llamada "el continuo". Ahora bien, las propiedades relacionales del 3 en la estructura de los números naturales son diferentes de las propiedades relacionales en el continuo. Por ejemplo, en la primera estructura el 3 tiene un antecesor (que es el número 2) y un sucesor (que es el número 4), mientras que, en el continuo, en cambio, los conceptos de "antecesor" y "sucesor" no pueden ser definidos.

Dado que, según el estructuralismo *ante rem*, las únicas propiedades relevantes son las relacionales; entonces el "número natural 3" tiene propiedades matemáticas que difieren de las que tiene el "número real 3". En consecuencia, para el estructuralismo *ante rem*, el 3 en tanto número natural es un objeto diferente del 3 en tanto número real, y, por supuesto, también diferente del 3 en tanto número entero, y del 3 en tanto número racional.

Esta conclusión contradice la práctica matemática usual, ya que los matemáticos suelen considerar que el 3, ya sea natural, entero, racional o real, es siempre el mismo objeto, aun cuando pueda pertenecer a diferentes conjuntos numéricos. Una posible solución para esta contradicción, si es que acaso existe, será estudiada en el Capítulo 5.

[15] Entre ellas, las de Parsons (1990), Reck y Price (2000), Keränen (2001 y 2006). Shapiro (2006) es una respuesta a muchas de esas críticas. Nos ocuparemos con detalle de esos debates en el Capítulo 5.

En lo que respecta a la Hipótesis del Continuo, el estructuralismo *ante rem* sostendría que la conjetura de Cantor está enunciada en el contexto de la estructura "secuencia de los cardinales infinitos". En efecto, para esta postura los cardinales son posiciones en esa estructura, y sus propiedades quedan determinadas por las relaciones mutuas que existen entre esas posiciones. Por ejemplo, la propiedad "$2^{\aleph_0}$ es un cardinal no numerable" equivale a la propiedad relacional "$2^{\aleph_0}$ es mayor que $\aleph_0$". La conjetura de Cantor quedaría, entonces, enunciada de la siguiente manera: "la posición $\aleph_1$ coincide con la posición $2^{\aleph_0}$".

Pero, así como la posición "número 3" puede pensarse en el contexto de diferentes estructuras, lo mismo sucede con $\aleph_1$ y con $2^{\aleph_0}$. En efecto, la teoría T_1 de la sección anterior, que a la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel con el axioma de elección le agrega como axioma la Hipótesis del Continuo, define una estructura en la que (por lo que afirma el axioma agregado) es verdad que $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$. Por otra parte, la teoría T_2, en la que a ZFC se le agrega como axioma la negación de la Hipótesis del Continuo, define una estructura en la que $\aleph_1 < 2^{\aleph_0}$.

En resumen, tal como sucede en el caso del platonismo pleno, para el estructuralismo *ante rem* la Hipótesis del Continuo no es verdadera ni falsa en sentido absoluto, sino que en ciertas estructuras es verdadera, mientras que es falsa en otras.

2.6. Las críticas al platonismo

En los tres capítulos que siguen se expondrán diferentes críticas que se le pueden hacer al platonismo matemático. En particular, el Capítulo 3 estará dedicado a la llamada *objeción epistemológica*, que dice resumidamente que, aunque los objetos abstractos existan, el cerebro humano no puede tener conocimiento de ellos.

Más allá de la objeción epistemológica, que afecta simultáneamente a todas las variantes del platonismo matemático, es posible hallar también objeciones específicas para cada una de las dos variantes que son las más aceptadas actualmente: el platonismo pleno y el estructuralismo *ante rem*. Estas objeciones serán estudiadas en los Capítulos 4 y 5 respectivamente.

Existe, además, otro tipo de objeción, que no suele ser mencionada en la bibliografía, y que puede denominarse la *objeción histórica*. Resumidamente, esta objeción dice así: según el platonismo, los entes estudiados por los matemáticos son objetos abstractos y, por lo tanto, eternos e inmutables. Sin embargo, históricamente, las características de muchos de ellos se han modificado a lo largo del tiempo. A modo de ejemplo, considérese el caso de la relación entre el número 1 y la Conjetura de Goldbach.

La Conjetura de Goldbach, en su forma moderna (nótese el uso del adjetivo temporal "moderna"), dice que todo número par mayor o igual que 4 puede escribirse como la suma de dos números primos. La aclaración de "mayor o igual que 4" se debe a que la conjetura falla para el número 2 dado que éste sólo podría escribirse como $1 + 1$ y el número 1 actualmente no se considera primo.

Ahora bien, la conjetura de Goldbach lleva este nombre porque fue formulada por primera vez por el matemático alemán Christian Goldbach en una carta a Leonhard Euler, fechada el 7 de junio de 1742.

De la lectura de esa carta se desprende que en su forma original la conjetura decía que todo número entero positivo n (par o impar) puede descomponerse como suma de dos primos, que a su vez puede transformarse en una suma de tres primos, y así sucesivamente hasta llegar a una suma de n unos. Por ejemplo, las sucesivas descomposiciones del número 6 serían:

$$
\begin{aligned}
6 &= 1 + 5 \\
6 &= 1 + 2 + 3 \\
6 &= 1 + 1 + 1 + 3 \\
6 &= 1 + 1 + 1 + 1 + 2 \\
6 &= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1
\end{aligned}
$$

Para Goldbach, en todas esas descomposiciones aparecen exclusivamente números primos, porque hasta el siglo XIX el número 1 era primo, si dejó de serlo fue por razones muy similares (casi idénticas) a aquellas por las que Plutón, en el año 2006, dejó de ser considerado un planeta (cuando el concepto de planeta fue redefinido, por razones de conveniencia, por la Unión Astronómica Internacional).

Plutón pasó de la categoría "planeta" a la categoría "planeta enano" debido al descubrimiento, entre fines del siglo XX y principios del XXI, de decenas de cuerpos del Sistema Solar con forma y tamaño similares a él. De no haberse tomado esa decisión, la cantidad de planetas del Sistema Solar habría pasado, en el transcurso de pocos años, de nueve a varias decenas, muchos de ellos con órbitas muy excéntricas.

Hasta el siglo XIX no se dudaba de que el número 1 fuera primo (de la misma forma de que durante el siglo XX no se dudaba de que Plutón fuera un planeta). Es verdad que se trataba de un primo en cierto modo anómalo, ya que contradecía el Teorema Fundamental de la Aritmética, que dice que todo número entero positivo es producto de primos y que esta descomposición es esencialmente única ("esencialmente" significa aquí que en cualquier descomposición aparecen siempre exactamente los mismos primos, la misma cantidad de veces cada uno, aunque tal vez escritos en un orden diferente). En efecto, el 1 hace falsa la condición de unicidad, ya que, por ejemplo: $6 = 2.3$, pero también $6 = 1.2.3$, $6 = 1.1.2.3$, y así sucesivamente.

Este inconveniente podía solucionarse diciendo que la factorización es única siempre que los primos involucrados sean todos distintos de 1. Nótese que hoy en día debe hacerse una salvedad similar con respectos a los primos negativos: la descomposición es única si todos los primos son positivos, de lo contrario podríamos tener también la descomposición $6 = (-2)(-3)$.

Sin embargo, durante el siglo XIX los desarrollos del álgebra hicieron que la noción de "primo" fuera también definida en otros conjuntos numéricos. A modo de ejemplo pueden mencionarse los enteros de Gauss, que son los números complejos $a + bi$, donde a y b son ambos enteros. Este conjunto tiene características algebraicas muy similares a las que tienen los números enteros; en particular, en los enteros de Gauss vale también una versión del Teorema Fundamental de la Aritmética: todo entero de Gauss es producto de primos, y esta factorización es esencialmente única. Es interesante observar que en los enteros de Gauss el número 2 no es primo, ya que se puede factorizar como:

$$2 = (1 + i)(1 - i)$$

Donde $1 + i$ y $1 - i$ son primos. Pero aquí también hay "primos anómalos", que violan la unicidad de la descomposición, aunque en este caso la anomalía no se restringe solamente al número $1 = 1 + 0i$, sino que abarca también a los números $-1 = -1 + 0i$, $i = 0 + i$ y $-i = 0 - i$. En efecto, otras descomposiciones del número 2 son:

$$2 = (1 + 0i)(1 + i)(1 - i)$$
$$2 = (-1 + 0i)(-1 + 0i)(1 + i)(1 - i)$$
$$2 = (0 + i)(0 - i)(1 + i)(1 - i)$$

En todos los casos, los elementos "anómalos" que contradicen la unicidad de la descomposición en primos resultan ser exactamente aquellos elementos que tienen inverso multiplicativo (que en los enteros son el 1 y el –1). Por lo tanto, un enunciado más conveniente del Teorema Fundamental de la Aritmética, aplicable a cualquier dominio, dice que la descomposición es única "excepto cuando intervienen elementos que tengan inverso multiplicativo". Para simplificar el enunciado, resulta aún más conveniente quitar a estos elementos anómalos del conjunto de los primos; de la misma forma que fue más conveniente quitar a Plutón del conjunto de los planetas.

De este modo, cuando en el siglo XIX se le quita la condición de primo a los números "anómalos" (es decir, aquellos que tienen inverso multiplicativo), el Teorema Fundamental de la Aritmética puede volver a enunciarse de una manera sencilla: todo número se descompone de manera esencialmente única como producto de primos. En resumen, la afirmación "1 es primo" era verdadera hasta mediados del siglo XIX, y es falsa hoy en día. Por lo tanto, las características del objeto abstracto "número 1" han cambiado a lo largo del tiempo; lo cual contradice la suposición de que el 1 es un objeto abstracto.

2.7. ¿Por qué hay matemáticos que son platonistas?

A pesar de todos los problemas que presenta, el platonismo matemático ha sido, y todavía es, una postura ampliamente defendida, tanto por matemáticos como por filósofos de la matemática. Esta sección y la siguiente estarán dedicadas a exponer posibles razones de este apoyo a la postura platonista. En esta sección se hablará de los matemáticos, y en la siguiente de los filósofos, ya que es posible que unos y otros tengan razones diferentes para sostener un punto de vista platonista.

A lo largo de esta tesis, al hablar de los matemáticos haremos referencia frecuentemente a la "práctica matemática", entendiendo por tal el trabajo que un matemático realiza diariamente. Pero ¿qué entendemos por la práctica matemática?[16] En principio, distinguiremos entre matemática pura y aplicada. La distinción no es completamente nítida, pero presenta zonas bien determinadas de uno y otro lado. La axiomatización de una teoría previamente existente y reconocida como parte de la disciplina (por ejemplo, la teoría de conjuntos o la teoría de la probabilidad), es un ejemplo claro de matemática pura. La deducción de nuevos teoremas a partir de axiomas ya aceptados, por ejemplo, los de la geometría euclídea en la axiomatización de Hilbert (1899), es otro ejemplo de matemática pura. La demostración o refutación de una conjetura, como las de Fermat o de Goldbach, es también una tarea típica de la matemática pura. Cada vez que hagamos referencia a la práctica matemática (sin otra

[16] La práctica matemática ha sido recientemente objeto de análisis filosófico. Véanse al respecto las obras de Mancosu (2008) y Ferreirós (2015).

especificación), entenderemos siempre la práctica de la matemática pura, es decir, las actividades que desarrollan los matemáticos puros.

Además, existen numerosas prácticas de la matemática aplicada, que van desde el diseño de programas de computación hasta la construcción de modelos matemáticos de sistemas sociales, y desde el cálculo de error en ingeniería hasta el tratamiento estadístico de los datos experimentales en las ciencias biológicas. En esta tesis no nos ocuparemos de la matemática aplicada, que presenta un espectro interesante de problemas específicos. Tomaremos las actividades de axiomatizar teorías, deducir teoremas y demostrar o refutar conjeturas como las actividades paradigmáticas de los matemáticos que trabajan en el campo de la matemática pura.

Muchos matemáticos profesionales, especialmente los matemáticos puros, son platonistas aun cuando normalmente no puedan dar una respuesta satisfactoria a los cuestionamientos que se le hacen a esta postura. En palabras del físico y matemático John D. Barrow:

> La mayoría de los científicos y matemáticos realizan su trabajo cotidiano como si el realismo fuera correcto, incluso aunque no estén dispuestos a defenderlo con mucha fuerza los fines de semana. (Barrow 1997: 89)

El matemático Reuben Hersh lo expresa más extensamente de este modo:

> Tomemos algún teorema bien conocido: por ejemplo, la no numerabilidad del continuo; el Teorema Integral de Cauchy; el Teorema Fundamental del Álgebra.
>
> ¿Se trata de una afirmación verdadera acerca del mundo? ¿Se *descubren* tales teoremas, y un tal descubrimiento *aumenta* nuestro conocimiento?
>
> Si su respuesta a esta pregunta es sí, entonces puede ser llamado platonista (o 'realista'). […]
>
> Quizás tales cosas no tengan una existencia real después de todo, y la convicción de que existen y que son objetivamente cognoscibles es meramente una ilusión con la que nos engañamos a nosotros mismos. Tal vez un teorema no es otra cosa que una fórmula que puede ser deducida por las reglas de la lógica de algún conjunto inicial de fórmulas (*axiomas*, si usted quiere).
>
> Si usted prefiere adherir a tal modesta renuncia, entonces puede ser llamado un formalista […] Se le puede preguntar ahora ¿cómo es que los tres ejemplos que hemos dado fueron conocidos, entendidos y usados mucho tiempo antes de que los axiomas en los que están "basados" fueran enunciados? Si decimos que un teorema no tiene

significado sino como conclusión de los axiomas, entonces ¿diremos que Gauss no conoció el Teorema Fundamental del Álgebra, Cauchy no conoció el Teorema Integral de Cauchy, y Cantor no conoció el Teorema de Cantor?

La base del platonismo es la convicción que todos tenemos de que los problemas y conceptos de las matemáticas existen independientemente de nosotros como individuos. Los ceros de la función zeta están donde están, no importa lo que yo crea o sepa acerca del tema. Es, entonces, fácil maginar que esa objetividad está dada por fuera de la conciencia humana como un todo, fuera de la historia y la cultura. Éste es el mito del platonismo. Permanece vivo porque se corresponde con algo real que forma parte de la experiencia diaria de los matemáticos. (Hersh 1998: 17-18, destacados en el original)

Se puede resumir la actitud de los matemáticos diciendo que son platonistas cuando piensan, pero formalistas cuando escriben. En efecto, en sus artículos científicos los matemáticos nunca mencionan explícitamente su adhesión al platonismo, y se restringen estrictamente a razonamientos formalistas. Para ejemplificar esta situación, consideremos el Segundo Teorema de Incompletitud de Gödel (1931); que afirma que la consistencia lógica de los axiomas de la aritmética de Peano de primer orden no puede ser demostrada mediante razonamientos representables dentro de la aritmética. (En 1936 Gerhard Gentzen demostró esa consistencia, pero mediante inducción transfinita, la cual se define en el contexto de la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel.) A continuación, se exhibirá una "demostración platonista" de la consistencia de los axiomas de Peano.

Para comenzar recuérdese que los axiomas de primer orden son los siguientes son los siguientes (donde S indica la "función sucesor"):

Ax. 1. $\forall x(Sx \neq 0)$
Ax. 2. $\forall x(Sx = Sy \rightarrow x = y)$
Ax. 3. $\forall x(x + 0 = x)$
Ax. 4. $\forall x \forall y\big(x + Sy = S(x + y)\big)$
Ax. 5. $\forall x(x \cdot 0 = 0)$
Ax. 6. $\forall x \forall y(x \cdot Sy = x \cdot y + x)$

Axioma-esquema de Inducción: $(\Phi(0) \wedge \forall y(\Phi(y) \rightarrow \Phi(Sy))) \rightarrow \forall x \Phi(x)$, donde $\Phi(x)$ es una fórmula bien formada cualquiera.

Es claro que todos estos axiomas son enunciados verdaderos referidos a los números naturales.[17] Por otra parte, las reglas de la lógica (no importa qué lógica se elija) aseguran que de enunciados verdaderos siempre se deducen enunciados verdaderos. En conclusión, todo teorema que se demuestre a partir de los axiomas de Peano de primer orden será, también él, un enunciado verdadero. Se deduce así que es imposible que exista un enunciado Φ tal que él y su negación sean al mismo tiempo demostrables; en otras palabras, se ha probado así que los axiomas son consistentes.

Esta demostración se basa, por supuesto, en una noción realista (o platonista) de la matemática, según la cual los axiomas son enunciados que se refieren a una realidad externa. Sin embargo, a pesar de la generalizada adhesión al platonismo, la mayoría de los matemáticos coincidiría en no considerarla como válida; de hecho, no aparece en ningún texto de lógica. En resumen, aunque muchos matemáticos adhieren al platonismo, en su práctica diaria siempre optan por razonamientos que no impliquen un compromiso ontológico.

Si en el texto de sus artículos científicos los matemáticos, al menos implícitamente, parecen rechazar el platonismo, ¿por qué hay, entonces, muchos matemáticos que son platonistas? Se proponen a continuación, a modo de posible respuesta, cuatro razones; las dos primeras son de naturaleza psicológica, pero no por ello menos influyentes.

1) Porque todo matemático, en el transcurso de la lucha por hallar la demostración de una conjetura, siente que las ideas se resisten de un modo casi físico a encajar entre sí, como si fueran engranajes o piezas de un rompecabezas al intentar hacer una demostración, es decir, los objetos matemáticos parecen ofrecer una resistencia casi física a la manipulación. Esta sensación es tan palpable que los matemáticos, en general, no pueden evitar sentir que están lidiando con objetos que existen realmente más allá de ellos.

2) Porque muchas estructuras matemáticas importantes, tal vez la mayoría (por ejemplo, la estructura de grupo o de espacio topológico), parecen haberse “impuesto” históricamente por sí mismas, casi sin que fueran buscadas deliberadamente. Por

[17] Adviértase que estos axiomas, que son las de la formulación usual, ya están interpretados. En realidad, enuncian el *modelo pretendido* de la aritmética de Peano de primer orden. Por otra parte, en tanto teoría abstracta de primer orden, la aritmética de Peano debe tener modelos no estándar, es decir, modelos que no son isomorfos con el modelo pretendido. En particular, si la aritmética de Peano tiene un modelo en el dominio de los números naturales, también debe tener modelos en el dominio de los números reales y en otros dominios de cardinalidades mayores. Como es sabido, esta es una consecuencia inevitable de la versión ascendente del Teorema de Löwenheim y Skolem, que alcanza a cualquier teoría formal de primer orden.

ejemplo, la estructura de grupos "apareció" en el trabajo de Galois sin que ni siquiera el propio Galois la estuviera buscando.

3) Porque muy frecuentemente se han dado a lo largo de la historia descubrimientos matemáticos simultáneos.

4) Por la extraordinaria eficacia de la matemática para explicar, o predecir, la evolución de los fenómenos del mundo físico. Eficacia que a veces se extiende a teorías matemáticas que fueron formuladas mucho tiempo antes de que fueran aplicables a la física u otras ciencias.

Estos fenómenos son parte la "experiencia matemática" (la experiencia en la que se sumergen los matemáticos cuando desarrollan su tarea diaria), así como de la historia de esa ciencia. Por lo tanto, una postura razonable en la filosofía de la matemática debería poder dar una explicación aceptable para los fenómenos arriba descriptos.

2.8. ¿Por qué hay filósofos de la matemática que son platonistas?

Las razones mencionadas en la sección anterior se refieren, de uno u otro modo, a la práctica matemática diaria, pero también es posible preguntarse por qué hay filósofos de la matemática que, sin ser matemáticos profesionales, adhieren igualmente al platonismo.

Una de las razones más extendidas consiste en que los conceptos de la matemática, al menos a primera vista, parecen ser intemporales. Mientras que muchos objetos físicos, cuya existencia fue sostenida durante alguna etapa de la historia, han sido descartados (tal el caso, por ejemplo, del flogisto o del éter), y muchas teorías han sido igualmente propuestas y abandonadas (como la teoría aristotélica del movimiento o la teoría geocéntrica de Ptolomeo); por el contrario, los conceptos y teorías matemáticas parecen permanecer inmutables a lo largo de los milenios. El número 2, por ejemplo, parece que siempre ha sido primo y que siempre lo será. Y aunque, según se ha visto más arriba con respecto al 1, algunos números pueden perder su condición de primos, la aparente inmutabilidad de las propiedades de los objetos matemáticos tienta a considerarlos como entes que están más allá de las circunstancias del espaciotiempo.

En contraposición, se propone aquí la idea de que esta aparente inmutabilidad de los conceptos matemáticos se debe, en realidad, a que la matemática no hace predicciones acerca del mundo físico. El flogisto, el éter, la teoría aristotélica del movimiento y la teoría de Ptolomeo fueron abandonados porque, o bien se hallaron hechos que eran incompatibles con esos conceptos y teorías, o bien porque no se hallaron los hechos que esos conceptos y teorías predecían. Pero no existe un criterio análogo en la matemática. Considérese, por ejemplo, el axioma de elección. A principios del siglo XX se discutió ampliamente, en el seno de la matemática, si era válido incorporar este axioma a la teoría de conjuntos. Finalmente, el axioma fue aceptado, aunque fundamentalmente porque había muchos resultados, por ejemplo, del cálculo diferencial, que se percibían como verdaderos (nótese el sesgo platonista) pero que no podían ser demostrados sin el auxilio de este controvertido axioma.

Posteriormente, se descubrió que el axioma de elección tiene consecuencias totalmente antintuitivas; una de las más notable es el Teorema de Banach-Tarski, que afirma que es posible cortar una esfera en una cantidad finita de partes, de modo tal que al ser giradas (y sin que sean ampliadas ni deformadas de ninguna manera) permiten armar dos esferas del mismo volumen que la original.

Si una teoría física predijera que una esfera macroscópica puede ser duplicada por el simple procedimiento de cortarla en partes y reordenarlas, esa teoría física sería descartada (por predecir un fenómeno físico imposible). Sin embargo, aunque el axioma de elección predice un hecho de ese tipo, se lo sigue considerando como válido, y el Teorema de Banach-Tarski es considerado simplemente como una consecuencia sorprendente del mismo.[18]

Un ejemplo similar está dado por las geometrías no euclidianas. En la geometría de Euclides se demuestra (o, si se quiere, la teoría "predice") que la suma de los ángulos interiores de un triángulo cualquiera es igual a dos rectos. En la geometría no euclidiana hiperbólica, en cambio, se demuestra (o se "predice") que la suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo es siempre menor que dos rectos. Finalmente, en la geometría no euclidiana elíptica se demuestra (o se "predice") que la suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo es siempre mayor que dos rectos. En física, una situación similar se resolvería midiendo la suma de los ángulos interiores de un triángulo y descartando, según sea el resultado de la medición, alguna de las tres teorías. Sin embargo, dado que se ha demostrado que las tres geometrías son equivalentes en cuanto a su consistencia lógica (más exactamente, si alguna de las

[18] El axioma de elección afirma que dado un conjunto de conjuntos no vacíos es posible formar un conjunto que contiene exactamente un elemento de cada elemento de dicho conjunto dado. El axioma de elección y la paradoja de Banach-Tarski se estudian detalladamente en el libro de Moore (2013), que contiene amplias referencias bibliográficas sobre las fuentes.

geometrías no euclidianas fuera inconsistente, entonces también lo sería la geometría euclidiana), entonces las tres son consideradas como teorías matemáticas igualmente válidas (el criterio de medición de los triángulos, de sesgo platonista, se considera irrelevante para esta cuestión).[19]

En resumen, sostenemos que las teorías matemáticas parecen inmutables (y, por ende, parecen reflejar las propiedades de objetos eternos) principalmente porque, con la única excepción de la inconsistencia lógica, no se ha establecido un criterio que obligue a descartarlas.

En este sentido la matemática se parece más a un lenguaje que a una ciencia que se refiera a objetos abstractos. En efecto, las geometrías no euclidianas coexisten con la euclidiana porque, según sea conveniente, se aplican para describir uno u otro fenómeno físico. De la misma manera, en el lenguaje coexisten las palabras “rojo” y “verde” sin que ello sea una contradicción, ya que cada una de estas palabras se aplica, según corresponda, a una situación u otra.

Un lenguaje no se descarta porque sus oraciones no se apliquen a una determinada situación; de la misma forma, las teorías matemáticas parecen ser descripciones que se aplican, o no, a determinadas circunstancias. Su aparente inmutabilidad no se debe, según esta idea, a que se refieran a objetos abstractos, sino a que se refieren a cualquier objeto concreto que se ajuste a ellas. Se retomará esta cuestión en los Capítulos 8 y 9 de este trabajo.

[19] Más precisamente, no existen pruebas de consistencia absoluta de ninguna de las tres geometrías, pero existen pruebas relativas recíprocas que muestran que son teorías equivalentes. Por ejemplo, existen pruebas de consistencia de la geometría hiperbólica de la geometría euclídea respecto de la geometría hiperbólica y, a la vez, pruebas de consistencia de la geometría euclídea respecto de la geometría hiperbólica. Ello prueba la equivalencia entre ambas teorías, es decir, que o bien son ambas consistente, o bien ambas inconsistentes.

3. La objeción epistemológica al platonismo

3.1. El planteo de la objeción

En el capítulo previo se ha hecho una introducción general al platonismo matemático, en la cual se han presentado brevemente el platonismo de objetos, el platonismo pleno y el estructuralismo *ante rem*, siendo estas dos últimas las variantes del platonismo matemático que gozan de mayor aceptación en la actualidad. En este capítulo, en el que se comenzará con el desarrollo de las críticas que pueden plantearse al platonismo matemático, estará dedicado a analizar un problema que afecta a todas las formas del platonismo matemático, se trata de la llamada *objeción epistemológica*. En los dos capítulos siguientes, por otra parte, se expondrán las objeciones específicas que se le pueden hacer, respectivamente, al platonismo pleno y al estructuralismo *ante rem*.

La objeción epistemológica puede formularse resumidamente de la siguiente manera: el platonismo matemático sostiene que los objetos de estudio de esta ciencia son entes abstractos que existen en un mundo no espaciotemporal. En consecuencia, según esta postura, los matemáticos tienen que poder adquirir conocimiento de los objetos abstractos que existen en ese mundo. Sin embargo, si se acepta la definición de objeto abstracto que fue discutida en el capítulo anterior, y se admiten asimismo las consecuencias lógicas de esa definición, analizadas también en aquel capítulo, parece inevitable que la conclusión sea que los seres humanos no pueden obtener conocimiento de ningún objeto abstracto.

En efecto, tener conocimiento de un objeto abstracto O implicaría asignarle la coordenada t_0, que corresponde al instante en el cual el objeto fue conocido por primera vez por un ser humano; pero esta circunstancia contradice la definición de O. En resumen, la conclusión de este razonamiento sería que el platonismo matemático no es aceptable porque no es posible saber si existen o no objetos abstractos y, en caso de que existan, no es posible saber cuáles objetos matemáticos existen y cuáles no.

Como se expondrá más adelante en este mismo capítulo, el problema del conocimiento de los objetos abstractos fue discutido por primera vez por Georg Cantor; sin embargo, fue Paul Benacerraf quien formuló la objeción epistemológica en la forma en que se la discute habitualmente en la filosofía actual de la matemática.

> Se afirma que *X* conoce *p*. […] La relación entre lo que debe ser cierto si *p* es verdad y las causas de las creencias de *X* pueden variar ampliamente. Pero hay siempre *alguna* relación, y la relación vincula el fundamento de las creencias de *X* y el asunto al que se refiere *p*. (Benacerraf 1973: 672)

En otras palabras, Benacerraf dice que, hasta donde se sabe, para que un ser humano obtenga conocimiento de un objeto, éste debe ser la causa directa o indirecta de algún fenómeno que afecte a ese humano. La objeción de Benacerraf se formuló en el contexto de la llamada "teoría causal de la percepción", pero se puede generalizar a cualquier forma de observación mediante instrumentos. Por ejemplo, en el caso de un cierto fenómeno subatómico, éste puede ser la causa desencadenante de una serie de eventos microscópicos que provoquen que un instrumento de medición macroscópico muestre, en un visor, una determinada curva o un determinado número. Una serie de rayos de luz, a su vez, se reflejan en ese visor, llegan a la retina del humano y la información, finalmente, llega hasta el cerebro. En suma, existe una cadena causal entre el fenómeno microscópico y el cambio en el estado de un instrumento de medición que es directamente perceptible.[20]

Sin embargo, tal como fue demostrado en el capítulo anterior, los objetos abstractos son causalmente inertes y no pueden, por su propia naturaleza, interactuar (ni directa ni indirectamente) con los objetos espaciotemporales. La conclusión sería, una vez más, que no es posible adquirir conocimiento de un objeto abstracto y que el platonismo matemático es inviable.

Por supuesto, los defensores del platonismo matemático rechazan los argumentos que se acaban de exponer; y a modo de respuesta proponen diversas maneras por las que sería posible obtener conocimiento de los objetos abstractos. Nos referiremos a estos argumentos en las secciones siguientes de este capítulo, pero antes formularemos una tesis relativa a los orígenes del platonismo matemático.

3.2. El origen del platonismo matemático

El nombre "platonismo matemático" proviene, evidentemente, de establecer una analogía entre el mundo no espaciotemporal en el que existirían los objetos

[20] Para una formulación detallada de esta teoría causal de la observación, véase Brown (1987), donde se encuentran muchos otros ejemplos.

matemáticos y el mundo de las ideas postulado por la filosofía de Platón (Bernays 1935, como señalamos en el capítulo anterior, fue el primero en difundir esta analogía). Sin embargo, más allá de la analogía, no existe una relación directa entre el platonismo clásico y el platonismo matemático.

> Aunque Platón creía que las matemáticas existen en un mundo ideal independiente de los seres humanos, sus doctrinas incluían muchas tesis que no concuerdan con los actuales puntos de vista, y el uso de esta denominación [platonismo matemático] es más inadecuada que útil. (Kline 1985: 390)

En consecuencia, paradójicamente, en el sentido moderno del término Platón no fue un matemático platonista, al menos no en sentido estricto[21]. Ahora bien, si el platonismo matemático no comienza con Platón ¿cuál es, entonces, el verdadero origen de esta postura? En esta sección y en la siguiente se propondrá la tesis de que el primer matemático platonista fue Georg Cantor, y que antes de él los matemáticos consideraban a su ciencia como un lenguaje que sirve para la descripción de los fenómenos físicos[22]. Para estos matemáticos precantorianos el número 3, por ejemplo, sería simplemente el nombre que designa a una cierta cantidad de objetos concretos, y su estatus ontológico sería equivalente al de la palabra "rojo". Los conceptos matemáticos, en consecuencia, sólo serían aceptables en la medida en que se refieran a fenómenos observables. Se expondrán a continuación algunos argumentos a favor de la tesis que se acaba de formular.

El primer argumento está contenido en la cita siguiente, que se refiere a Euclides y Apolonio, para quienes, en efecto, el estudio de la matemática era parte del estudio de la naturaleza.

> Los textos matemáticos griegos no son diferentes de los modernos libros de texto y tratados matemáticos [de matemática superior]. Tales libros pretenden solamente organizar y presentar los resultados matemáticos que han sido alcanzados, omitiendo las motivaciones de la investigación, las pistas y sugerencias de los teoremas y los usos a los que el conocimiento está destinado. De aquí que muchos de los que escriben sobre

[21] No obstante, los objetos ideales de Platón, sean o no objetos matemáticos, también caen bajo la objeción epistemológica de Benacerraf. Se recordará que Platón tuvo que apelar al mito de la reminiscencia para dar cuenta del conocimiento del mundo de las ideas.

[22] Por otra parte, se recordará también, como ya señalamos en el capítulo anterior, que para Bernays (1935) el paradigma del matemático platonista era precisamente Cantor.

> las matemáticas clásicas griegas afirmen que los matemáticos de ese período sólo estaban interesados en las matemáticas por las matemáticas y lleguen a esta conclusión, y la defiendan, tomando como base los *Elementos* de Euclides y las *Secciones Cónicas* de Apolonio, las dos grandes compilaciones del trabajo matemático en ese período. Sin embargo, la visión de estos escritores es demasiado estrecha. […] La auténtica meta era el estudio de la naturaleza. […] Para los griegos era evidente que los principios de la geometría estaban encarnados en la estructura completa del universo, del que el espacio era el componente primario. De aquí que el estudio del espacio y de las figuras espaciales fuera una contribución esencial al estudio de la naturaleza. (Kline 1985: 26)

En otros términos, para Apolonio y Euclides, así como para cualquiera de los otros matemáticos griegos de la Antigüedad, la matemática no estudia objetos abstractos, sino que es el lenguaje que describe la naturaleza. Podemos conjeturar que esos matemáticos habrían considerado a las geometrías no euclidianas como teorías falsas, a pesar de su posible consistencia lógica, debido a que no se corresponden con la geometría del espacio tal como lo percibimos en nuestro entorno inmediato.

La segunda cita está tomada de *El Método*, de Arquímedes. En esta obra, que durante siglos se consideró perdida, y de la que casi por azar se encontró una copia a principios del siglo XX, el autor explica cómo es posible convencerse, mediante razonamientos mecánicos, de la validez de ciertos teoremas geométricos, los cuales, posteriormente, son demostrados dentro del formalismo geométrico. En la "Introducción", que tiene la forma de una carta dirigida a Eratóstenes, Arquímedes escribe:

> Reconociendo, como digo, tu celo y tu excelente dominio en materia de filosofía, amén de que sabes apreciar, llegado el caso, la investigación de cuestiones matemáticas, he creído oportuno confiarte por escrito, y explicar en este mismo libro, las características propias de un método según el cual te será posible abordar la investigación de ciertas cuestiones matemáticas por medio de la mecánica. Algo que, por lo demás, estoy convencido, no es en absoluto menos útil en orden a la demostración de los teoremas mismos. Pues algunos de los que primero se me hicieron patentes por la mecánica, recibieron luego demostración por geometría, habida cuenta de que la investigación por este método queda lejos del de una demostración; como que es más fácil construir la demostración después de haber adquirido por ese método cierto conocimiento de los problemas, que buscarla sin la menor idea al respecto. (Arquímedes trad. 1986: 35)

Se deduce de esta cita que Arquímedes consideraba al razonamiento geométrico como equivalente al razonamiento mecánico (o físico). De hecho, aunque dice que "la investigación por este método [mecánico] queda lejos del de una demostración", por otra parte, también acota que "[la mecánica] no es en absoluto menos útil en orden a la demostración de los teoremas mismos". El punto a destacar es que esta equivalencia entre razonamiento geométrico y razonamiento mecánico no sería posible si la geometría no fuera una fiel descripción de la física.

En el mismo sentido se expresa Galileo, en un párrafo muy citado que habla explícitamente de la matemática como el lenguaje que permite expresar las leyes del universo:

> La filosofía está escrita en este grandísimo libro que tenemos abierto ante los ojos, quiero decir, el universo, pero no se puede entender si antes no se aprende a entender la lengua, a conocer los caracteres en los que está escrito. Está escrito en lengua matemática y sus caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin las cuales es imposible entender ni una palabra; sin ellos sólo es como girar vanamente en un oscuro laberinto. (Galileo Galilei trad. 1984: 61)

Por otra parte, en la Regla XIV de las *Reglas para la dirección del espíritu*, de René Descartes, el autor sostiene que la matemática no sólo describe la realidad física, sino que los entes matemáticos son, de hecho, objetos concretos.

> Si se trata del número, imaginaremos un objeto mensurable por medio de múltiples unidades y, a pesar de que el entendimiento reflexione en este momento en sólo su multiplicidad, procuraremos sin embargo evitar que luego vaya a sacar de ello alguna conclusión en la que se suponga que la cosa numerada está excluida de nuestro concepto. Esto es lo que hacen los que ponen en los números misterios sorprendentes y puras necedades, a todo lo cual no le concederían tal crédito, si no concibieran el número como algo distinto de las cosas numeradas. Asimismo, si tratamos de la figura, pensaremos que tratamos de un objeto extenso, ya que solamente desde este punto de vista lo concebimos como dotado de figura.
>
> […] La línea, cuyo movimiento en su concepción da nacimiento a la superficie, es un verdadero cuerpo. (Descartes trad. 1983: 237-238)

El hecho de que Descartes considera que los objetos matemáticos son entes concretos se ve, por ejemplo, en la frase "si tratamos de la figura, pensaremos que tratamos de un objeto extenso". Finalmente, en un sentido muy similar al de Arquímedes se expresa Isaac Newton en el prefacio a la primera edición de los *Principia matemática*.

> Si alguien pudiera trabajar con precisión perfecta sería el más exacto de los mecánicos, porque la descripción de las líneas rectas y los círculos sobre los que se basa la geometría pertenece a la mecánica. […] Describir líneas rectas y círculos es un problema, pero no un problema geométrico. Se exige de la mecánica la solución de este problema, y cuando está resuelto la geometría muestra la utilidad de lo aprendido. […] Por consiguiente, la geometría está basada en la práctica mecánica, no es sino aquella parte de la mecánica universal que propone y demuestra con exactitud el arte de medir. (Newton trad. 1987: 5-6)

Antes de Cantor, como se dijo más arriba, no hay ningún matemático que haya propuesto la idea de que la matemática estudia, o puede llegar a estudiar, objetos ajenos al mundo físico. Podría objetarse que durante ese período se estudiaron los números negativos y los complejos los cuales, *a priori*, no parecen describir objetos físicos. La respuesta a esta objeción, en cuanto a los números negativos, está contenida en la cita siguiente.

> Cuando en el siglo III d.C. Diofanto encontró –4 como solución de una ecuación lineal, la rechazó por absurda. En el primer tercio del siglo XVII […] Brahmagupta, que enunció la regla de los signos de la multiplicación, desechó una raíz [solución] negativa de una ecuación de segundo grado. […]
>
> De los europeos, Fibonacci, a principios del siglo XIII, rechazó las raíces [soluciones de ecuaciones] negativas, pero dio un paso hacia adelante al interpretar un número negativo en un problema de dinero, como pérdida en vez de ganancia. […] Stifel (alemán, 1487?–1567), agudo algebrista de la época, dijo a mediados del siglo XVI que los números negativos son absurdos. Cardano, en su *Ars magna* (1545), enunció la regla "menos por menos da más", como proposición independiente; también se dice que admitió la existencia de los números negativos, pero las pruebas de ello son dudosas. La realidad es que llamó a los números negativos "ficticios". (Bell 1995: 183-184)

Nótese que el rechazo, que duró varios siglos, a aceptar la existencia de los números negativos se debió, precisamente, al hecho de que estos no parecían expresar ninguna cantidad o medida concretas. Fibonacci propuso interpretarlos como la indicación de una pérdida económica, sin embargo, esta idea, a pesar de que la obra de Fibonacci fue muy difundida, no parece haber impresionado a los matemáticos de los siglos inmediatamente posteriores.

Como dice la cita de Bell, los números negativos podían aparecer como soluciones de ciertas ecuaciones, como por ejemplo de $x^2 = 4$. Sin embargo, la mayoría de los matemáticos en los tiempos previos al siglo XVII, consideraban que estas soluciones negativas eran ficticias. Estos matemáticos operaban con los números negativos como si fuesen solamente ficciones útiles, que aparecían en el desarrollo de ciertos cálculos. Por otra parte, las reglas para operar con esos números se elegían de tal modo que los resultados obtenidos fueran consistentes con las operaciones correspondientes entre números positivos. Por ejemplo, para determinar el resultado de $2 \cdot (-3)$ se puede proceder de la siguiente manera.

Dado que:

$$2 \cdot (7 - 3) = 8$$

Y puesto que debe mantenerse la validez de la propiedad distributiva:

$$2 \cdot (7 - 3) = 2 \cdot 7 + 2 \cdot (-3)$$

Entonces:

$$2 \cdot 7 + 2 \cdot (-3) = 8$$

Es decir, $14 + 2 \cdot (-3) = 8$, de donde se deduce que $2 \cdot (-3)$ debe ser igual a -6. La existencia de los números negativos fue finalmente aceptada en la segunda mitad del siglo XVII, con los comienzos del cálculo diferencial y la física matemática, ya que en ese contexto tiene sentido (es más, resulta necesario) referirse, por ejemplo, a una “aceleración negativa”, que es aquella cuyo sentido se opone al sentido del movimiento de un cuerpo. Es decir, los números negativos fueron aceptados cuando se tuvo conciencia de que eran necesarios para la descripción de los fenómenos físicos.

La historia de los números complejos no es muy diferente. Los matemáticos se encontraron por primera ante la necesidad de operar con estos números a mediados del siglo XVI, tras el descubrimiento de la fórmula general para resolver las ecuaciones cúbicas. Sucedía que a veces, al aplicar esa fórmula, en los pasos intermedios era necesario trabajar con raíces cuadradas de números negativos; aunque finalmente esas raíces se cancelaban y el resultado final (la solución de la ecuación) resultaba ser un número "legítimo". Por ejemplo, podía ser necesario calcular el producto $(3 + \sqrt{-5})(3 - \sqrt{-5})$, cuyo resultado es 14, o bien, $\left(3 + \sqrt{-5}\right) + (3 - \sqrt{-5})$, cuyo resultado es 6. Los algebristas de aquella época llamaron "imaginarias" a estas raíces cuadradas y las consideraron (análogamente a lo dicho más arriba para los negativos) como meras ficciones útiles.

> En 1545, Cardano consideraba a los números imaginarios como ficticios, pero los utilizaba formalmente, como por ejemplo, en la descomposición de 40 en los factores complejos conjugados $5 \pm \sqrt{-15}$, sin suscitar la cuestión de la legitimidad del formalismo. (Bell 1995: 185-186)

Leonhard Euler, a mediados del siglo XVIII, fue el primero en trabajar sistemáticamente con los números complejos, de hecho, fue él quien introdujo la letra i, que hoy se usa todavía, para referirse a $\sqrt{-1}$. Sin embargo, todo parece indicar que Euler también los consideraba ficciones útiles, o bien símbolos sin significado con los que se operaba de manera formal. Por su parte, a fines de ese mismo siglo, Carl Friedrich Gauss declaraba que "la metafísica de $\sqrt{-1}$ es difícil" (Bell 1995: 186).

Fue el propio Gauss quien logró que la existencia de los números complejos fuera finalmente aceptada. En 1831 estableció que el número complejo $a + bi$ puede pensarse como un modo de referirse al punto (a, b). Según esta interpretación, las operaciones entre números complejos indican traslaciones y rotaciones en el plano. Es decir, los números complejos fueron aceptados cuando se los comenzó a ver como "nombres" de posiciones o de movimientos en el plano euclidiano. (Hay que decir que el primero en formular esta interpretación geométrica de los números complejos fue el topógrafo noruego Caspar Wessel, en 1797; y que la misma idea fue desarrollada independientemente por el matemático francés Jean-Robert Argand en 1806. Pero estas contribuciones pasaron inicialmente inadvertidas. Gauss llegó a las mismas ideas, como ya se dijo, en 1831, y fue su enorme influencia la que garantizó que las mismas se difundieran.)

En resumen, hasta mediados del siglo XIX la aceptabilidad de la existencia de un objeto matemático estaba ligada al hecho de que éste describiera algún aspecto de la realidad física.

3.3. Cantor y la objeción epistemológica

Georg Cantor fue el primero en introducir el estudio de objetos matemáticos totalmente ajenos a la realidad física; objetos que no consideró ficciones útiles, ni tampoco símbolos sin significado con los que se operaba formalmente. Por el contrario, Cantor defendió la idea de que se trataba de objetos existentes en sí mismos. Nos referimos a los ordinales transfinitos, que Cantor presentó en su artículo *Fundamentos para una teoría general de conjuntos*, de 1883.

Los ordinales finitos, que Cantor llamaba "números de tipo I" son simplemente los números naturales: 0, 1, 2, 3,.... que en este contexto deben verse como indicadores de las diferentes posiciones en una secuencia. Según Cantor, "más allá" de esta secuencia natural están los primeros ordinales transfinitos, que él llamaba "números de tipo II" y que hoy en día suelen denominarse "ordinales numerables". El primero de estos números de tipo II es ω, que representa, entonces, una posición que viene "después" de todos los números naturales. Después de esta posición ω siguen, a su vez, $\omega + 1$, $\omega + 2$, $\omega + 3$,... luego (después de infinitos pasos intermedios) $\omega + \omega$, $\omega + \omega + 1$, $\omega + \omega + 2$,... y así sucesivamente.

$$0, 1, 2, 3, 4, \dots\ \omega, \omega + 1, \omega + 2, \dots, \omega + \omega, \omega + \omega + 1, \dots$$

¿Tiene sentido hablar de una posición que se encuentra más allá de una secuencia infinita, siendo que ésta, por su propia naturaleza, nunca termina? Es claro que esa idea carece de sentido si se la quiere aplicar a la realidad física. Si se piensa, por ejemplo, en la sucesión de las órbitas de la Luna alrededor de la Tierra, es posible imaginar que existió alguna vez una primera órbita, luego una segunda, una tercera y así sucesivamente. Todas esas órbitas, tanto las pasadas como las futuras, pueden numerarse mediante los ordinales finitos positivos, porque en cualquier instante de la vida del Universo la cantidad de órbitas lunares será siempre finita. Nunca tendrá sentido hablar de "la órbita lunar número ω".

Los ordinales transfinitos no tienen, entonces, ningún correlato físico, y muchos contemporáneos de Cantor atacaron su teoría mediante el argumento de que era un sinsentido que hablaba de objetos inexistentes. Previendo este ataque, en su trabajo antes citado de 1883 Cantor defiende la existencia de los ordinales transfinitos como entes abstractos, y para explicar la posibilidad de tener conocimiento de ellos apela a la teoría de Platón de la reminiscencia, según la cual el espíritu (o el alma) habita en el mundo abstracto antes de encarnarse, por lo que todo conocimiento es, en última instancia, un recuerdo.

> A mi parecer, el proceso de formación correcto de conceptos es siempre el mismo; se pone un objeto carente de propiedades, que al principio no es otra cosa que un nombre o un signo A, y se le asignan ordenadamente varios predicados inteligibles, o incluso una cantidad infinita, cuyo significado es conocido en base a ideas ya disponibles, y que no pueden contradecirse entre sí. De este modo quedan determinadas las relaciones de A con los conceptos ya disponibles, y particularmente con los que están emparentados con él. Una vez llevado esto hasta el final, se dan todas las condiciones para despertar el concepto A, que dormía en nuestro interior, y éste accede listo a la existencia. (Cantor 1883, trad. Ferreirós 2006: 141-142)

En la cita puede verse además que Cantor fue el primero en proponer una solución para la objeción epistemológica; su respuesta consiste en postular que los humanos no son seres exclusivamente espaciotemporales, sino que tienen un componente no espaciotemporal (un alma o un espíritu) que es capaz de conectarse con el mundo abstracto (de hecho, es capaz de vivir en él). Sin embargo, es claro que esta estrategia no resuelve la objeción, sino que sólo desplaza el problema. En efecto, si el alma es un ente no espaciotemporal entonces subsiste el problema de cómo este ente transmite esa información a nuestro cerebro (que es espaciotemporal). Nótese que, ya sea que los humanos tengan un alma inmaterial, o no la tengan, es un hecho comprobado que la memoria y el conocimiento dejan un registro físicoquímico en las neuronas, de modo que el alma debería interactuar con ellas. Pero si el alma es un objeto abstracto más, que habita entre los objetos matemáticos, no debería tener capacidad de interactuar con el cuerpo, que es un objeto concreto. Ahora es el problema mente-cuerpo el que resulta intratable, por lo que el problema del conocimiento de los objetos abstractos no se resuelve. En conclusión, Cantor plantea el problema epistemológico, pero la solución que propone no parece ser satisfactoria.

3.4. La intuición como percepción

Cantor no fue el único en defender la idea de que es posible tener algún tipo de percepción del mundo platónico de las matemáticas. Kurt Gödel también sostuvo que es posible percibir el mundo abstracto e identificaba esta supuesta capacidad de percepción con la intuición matemática. La estrategia general de Gödel consiste en sostener que no hay una diferencia de naturaleza entre la percepción de los objetos físicos y la intuición de los objetos abstractos, que resultaría ser una forma de percepción. En ese sentido, citamos el siguiente pasaje, escrito en 1963, sobre el problema de la Hipótesis del Continuo.[23]

> A pesar de su lejanía de la experiencia sensible, tenemos algo parecido a una percepción de los objetos de la teoría de conjuntos, como se puede ver por el hecho de que los axiomas mismos nos fuerzan a aceptarlos como verdaderos. No veo ninguna razón por la cual debamos tener menos confianza en este tipo de percepción, es decir, en la intuición matemática, que en la percepción sensible, que nos induce a construir teorías físicas y a esperar que futuras percepciones sensibles concuerden con ellas y, además, a esperar que cuestiones no decidibles por el momento tengan significado y puedan ser decididas en el futuro. Las paradojas de la teoría de conjuntos difícilmente son más preocupantes que los engaños de los sentidos para la física. Ya se indicó […] que pueden darse perfectamente nuevas intuiciones matemáticas que conduzcan a una decisión de problemas tales como la hipótesis del continuo de Cantor. (Gödel 1964: 483-484)

La siguiente cita, por otra parte, proviene de un trabajo escrito en 1951, aunque publicado póstumamente.

> La similitud entre la intuición matemática y la percepción física es sorprendente. Es arbitrario considerar "esto es rojo" como un dato inmediato, pero no hacerlo así con el *modus ponens* o la inducción completa (o quizás alguna proposición más sencilla de la que ésta se siga). Pues la diferencia, en la medida en que es aquí pertinente, consiste sólo en el hecho de que en el primer caso se percibe una relación entre un concepto y un objeto en particular, mientras en el segundo lo que se perciba es una relación entre conceptos. (Feferman 1995: 359)

En los dos pasajes citados Gödel sostiene que no existe una diferencia fundamental (y que, de hecho, sería arbitrario suponer que sí la hay) entre las dos afirmaciones siguientes:

(a) "Una manzana madura es roja" es el enunciado de una percepción.

---

[23] Dicho pasaje no se encontraba en la primera edición del artículo de Gödel, publicada en 1947. Fue escrito en 1963 como parte de un suplemento a la segunda edición, publicada 1964, que es la que citamos.

(b) “El principio de inducción completa es válido” es el resultado de una percepción.

Agrega, además, que la única diferencia consiste en que la afirmación (a) se refiere a una relación entre un objeto (concreto) y un concepto (abstracto), mientras que (b) expresa una relación entre dos conceptos (abstractos).

¿Por qué podría asegurarse que (a) expresa una relación entre un objeto concreto y un concepto abstracto? O, más precisamente, ¿cómo sabe un ser humano que un objeto es rojo? Cuando se percibe que un objeto concreto A es rojo, esto se debe a que A refleja ciertas frecuencias de la luz visible. Esta luz, a su vez, incide en determinadas células de la retina, las cuales envían información electroquímica a través del nervio óptico. Esta información, finalmente, llega a áreas específicas del cerebro que la interpretan como “el objeto es rojo”.

En resumen, la percepción del “rojo” se reduce a una secuencia de eventos físicos concretos que forman una cadena causal. La interpretación de Gödel parece suponer que este proceso tiene “un paso más” en el que las neuronas interactúan de algún modo con un “concepto abstracto de rojo” (interactúan con el *qualia* “rojo”, dirían algunos filósofos de la mente). Pero esta interpretación conduciría una vez más, sin resolverlo, al problema de la existencia de una relación causal entre objetos físicos (neuronas) y objetos abstractos (el concepto de rojo).

Por lo tanto, si no se da ese paso hacia el “concepto abstracto de rojo” la conclusión a la que se llega es que, contradiciendo a Gödel, sí habría una diferencia fundamental entre (a) y (b). En efecto, la primera afirmación hablaría solamente de interacciones físicas concretas, mientras que la segunda presupone una percepción del mundo abstracto de la matemática (y queda, en consecuencia, al alcance de la objeción epistemológica). Sin embargo, si al interpretar el significado de (a) se acepta ese “paso al concepto abstracto” entonces tanto (a) como (b) quedarían expuestas al problema de la objeción epistemológica.

Nuestra opinión es que la alternativa más razonable es no dar ese “paso al concepto abstracto rojo”, y que la “conciencia del color rojo” es una forma de referirse a una excitación específica de ciertos grupos de neuronas.[24]

Charles Parsons, por su parte, sostiene ideas muy similares a las de Gödel. Para este autor la intuición matemática es también una forma de percepción, la cual, tal como

---

[24] Esta, por cierto, es solo una conjetura que requeriría un examen más detallado. Pero no es nuestro objetivo resolver aquí ninguno de los problemas típicos de la filosofía de la mente.

sucede con la percepción sensible usual, es una guía confiable hacia la verdad, aunque no implica un conocimiento inmediato ni infalible de ésta.

> Podría suceder que en algún dominio, la intuición, si es cultivada con suficiente cuidado, sea una fuente de conocimiento y una guía bastante confiable hacia la verdad, sin constituir efectivamente conocimiento. [...] Creo que se puede mostrar convincentemente que Kurt Gödel usa el término en ese sentido. (Parsons 2008: 141)

La siguiente cita, a su vez, muestra que Parsons plantea explícitamente el problema epistemológico.

> En los casos normales de percepción hay una acción física del objeto percibido sobre nuestros órganos sensoriales. Nuestra percepción está basada, de alguna manera, en esa acción y hay serias razones para sostener que una tal relación causal es una condición necesaria para percibir un objeto. Pero sería implausible que en una intuición matemática haya una acción causal de un objeto matemático sobre la mente. (Parsons 2008: 149)

En su respuesta a este problema, Parsons analiza una forma de la intuición matemática estudiada por David Hilbert en la década de 1920 (por ejemplo, en Hilbert 1926: 193 y siguientes). Imagínese, dice Hilbert, que se representa a los números enteros positivos mediante marcas verticales iguales entre sí; de este modo, | representaría al número 1, || representaría al 2, y así sucesivamente. Según este simbolismo, es claro que la suma $n + m$ se representa dibujando n marcas verticales iguales e inmediatamente después otras m marcas más.

> Así, por ejemplo, $2 + 3 = 3 + 2$ nos hace saber que $2 + 3$ y $3 + 2$ son, en realidad, tomando en cuenta las abreviaturas que estamos usando, el mismo numeral, esto es, |||||. (Hilbert 1926: 193)

Más adelante, Hilbert (1926: 193) dice que, si se dibujan, por un lado, n marcas y a continuación m más, y por el otro se dibujan m marcas y a continuación n más, entonces la intuición indica que en ambos casos se obtendrán la misma cantidad de marcas. En otras palabras, la intuición proporciona el conocimiento de que $n + m = m + n$.

Parsons (2008: 171 y siguientes) parece identificar este “conocimiento intuitivo” al que alude Hilbert con la “intuición como percepción de los objetos abstractos” de Gödel. Sin embargo, entendemos que esta identificación no es correcta; de hecho, el propio Hilbert se refiere a la intuición de la que él habla como “concreta”, y dice que hay situaciones dentro de la misma teoría de números en las que “este enfoque intuitivo se ve rebasado” (Hilbert 1926: 194). Es claro que la intuición a la que se refiere Hilbert es una forma de inducción (en el sentido que se le da a esa palabra en las ciencias empíricas) aplicada a la manipulación de símbolos, y que no es una forma de percepción del mundo abstracto de la matemática. En conclusión, creemos que ni Gödel, ni Parsons, logran proponer una solución satisfactoria para el problema que plantea la objeción epistemológica.

3.5. Una nota sobre la percepción

En esta sección se comentará un ejemplo notable de intuición matemática. Es importante aclarar que, aunque se ha elegido una situación en particular, el ejemplo que se mostrará aquí está muy lejos de ser una rara excepción, sino que, por el contrario, muchos hechos similares han ocurrido a lo largo de toda la historia de la matemática. Para desarrollar el ejemplo es necesario introducir en primer lugar algunos pocos tecnicismos matemáticos.

Si d un entero positivo libre de cuadrados (es decir, un entero positivo que no es divisible por ningún cuadrado mayor que 1), convenimos en llamar $\sqrt{-d}$ indistintamente a los números complejos $\pm i\sqrt{d}$. Esta notación permite definir a $\mathbb{Z}[\sqrt{-d}]$ como el conjunto de todos los números complejos de la forma $a + b\sqrt{-d}$, donde a y b son enteros cualesquiera (positivos, negativos, o cero). Por ejemplo, $\mathbb{Z}[\sqrt{-d}]$ contiene, entre otros, al número complejo $2 - 3i\sqrt{5}$, al $5i\sqrt{5}$ y al 6 (que es $6 + 0i\sqrt{5}$).

La suma y el producto en $\mathbb{Z}[\sqrt{-d}]$ tienen propiedades muy similares a las de la suma y el producto de los números enteros; en particular, es posible definir en $\mathbb{Z}[\sqrt{-d}]$ el concepto de “número primo”. Como mencionamos en el capítulo anterior, algunos números enteros que son primos en $\mathbb{Z}$ pueden no serlo en $\mathbb{Z}[\sqrt{-d}]$, el número 2 no es primo en $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ (conjunto conocido como “los enteros de Gauss”), porque puede descomponerse como $2 = (1 - i)(1 + i)$.

El Teorema Fundamental de la Aritmética dice que todo entero (distinto de 1, 0 y -1), o bien es primo, o bien puede descomponerse de manera única como producto de primos, por ejemplo, $45 = 3 \cdot 3 \cdot 5$, y no hay otra descomposición en primos posible (salvo variaciones triviales del tipo de $45 = 3 \cdot 5 \cdot 3$, o $45 = 3^2 \cdot 5$). De manera similar, cualquiera sea d, todo número de $\mathbb{Z}[\sqrt{-d}]$ puede descomponerse como producto de primos de $\mathbb{Z}[\sqrt{-d}]$, pero, y he aquí una diferencia muy importante, esa descomposición no siempre es única.

Por ejemplo, puede probarse que en $\mathbb{Z}[\sqrt{-6}]$ los números 2, 3, $i\sqrt{6}$ y $-i\sqrt{6}$ son todos primos. En consecuencia, en $\mathbb{Z}[\sqrt{-6}]$ el número 6 tiene dos descomposiciones en primos que son diferentes; una de ellas es $6 = 2 \cdot 3$ y la otra, $6 = i\sqrt{6} \cdot (-i\sqrt{6})$. Existen, por otra parte, algunos valores de d para los cuales la descomposición en primos de $\mathbb{Z}[\sqrt{-d}]$ sí es única, como por ejemplo $d = 1$.

Surge entonces la pregunta de para qué valores de d es única la descomposición en primos en $\mathbb{Z}[\sqrt{-d}]$.

En el artículo 303 de sus célebres *Disquisiciones Aritméticas* (1801), Gauss conjeturó que existen exactamente nueve valores de d (positivos y libres de cuadrados) para los cuales $\mathbb{Z}[\sqrt{-d}]$ admite descomposición única en primos. Conjeturó además que esos valores de d son exactamente 1, 2, 3, 7, 11, 19, 43, 67 y 163. El propio Gauss demostró que esos nueve números cumplen la propiedad en cuestión, pero dejó abierto el problema de si existían otros. El problema permaneció abierto durante mucho tiempo hasta que, en 1934, Hans Arnold Heilbronn y Edward Linfoot probaron que a lo sumo podía haber un décimo número que cumpliera la propiedad de la factorización única en primos. En 1952 Kurt Heegner presentó una demostración de que ese décimo número no existía, pero su prueba tenía algunos errores y no fue aceptada como válida.

En 1966 Harold Stark demostró que, en caso de existir un décimo número, tendría más de nueve millones de cifras. Finalmente, en 1967, el propio Stark demostró que ese décimo número no podía existir, por lo que la conjetura de Gauss quedaba así probada. En realidad, pocos meses antes de que se publicara el segundo artículo de Stark, Alan Baker también demostró la conjetura de Gauss, aunque usando técnicas diferentes a las de Stark.[25]

En resumen, en 1801 Gauss conjeturó que había exactamente nueve números enteros, 1, 2, 3, 7, 11, 19, 43, 67 y 163, que cumplían una cierta propiedad; más de 150 después, con una demostración fallida de por medio, la conjetura de Gauss finalmente fue probada. Es muy difícil resistirse a la idea de que Gauss tuvo algún tipo de percepción intelectual que le permitió percibir una característica de los números enteros.

[25] Véase Stark (1967) y Baker (1966).

La tesis que proponemos aquí es que Gauss, como tantos otros matemáticos en situaciones similares, tuvo en efecto algún tipo de percepción; pero que los objetos percibidos por la intuición matemática no están en un hipotético mundo abstracto, sino que existen en el mundo concreto espaciotemporal. El análisis de esta afirmación se retomará en los dos últimos capítulos de esta tesis.

3.6. La estrategia del platonismo pleno

Ninguna de las propuestas antes mencionadas, sea la de Cantor, la de Gödel o la de Parsons, logra resolver de manera satisfactoria el problema planteado por la objeción epistemológica. En todos los casos, la propuesta se reduce a afirmar que (de algún modo no especificado, y a pesar de que la definición de objeto abstracto parece impedirlo) es posible la existencia de una interacción (directa o indirecta) entre el universo no espaciotemporal y el cerebro humano.

Sin embargo, el platonismo pleno parece resolver exitosamente el problema de la objeción epistemológica.

Según se expuso en el capítulo anterior, el platonismo pleno es la postura que afirma que toda teoría matemática consistente describe de manera correcta algún aspecto del reino platónico de las matemáticas. El hecho de que una de esas teorías afirme, por ejemplo, que la Hipótesis del Continuo es verdadera, mientras que haya otra que afirme que es falsa, significa, para el platonismo pleno, que hay una parte del reino de la matemática donde la Hipótesis del Continuo es verdadera, y otra donde es falsa.

Para entender cómo el platonismo pleno responde a la objeción epistemológica, considérese el siguiente ejemplo, que compara las dos teorías de conjuntos más usadas en la actualidad por los matemáticos: la teoría de von Neumann, Bernays y Gödel (NBG) y la de Zermelo-Fraenkel con el axioma de elección (ZFC).

Según NBG, hay dos tipos de agregados o clases: conjuntos y clases propias. Los primeros se caracterizan por ser miembros de agregados "más grandes", mientras que las clases propias son agregados "demasiado grandes" y no pueden ser miembros de otras clases. Con un poco más de precisión, en la teoría NBG cada fórmula $\theta(x)$ define una clase C_θ (que puede ser un conjunto o una clase propia) de modo que vale el siguiente esquema:

$$\forall x(x \in C_\theta \leftrightarrow (\theta(x) \wedge x \text{ es un conjunto}))$$

Esta distinción entre conjuntos y clases propias no es antojadiza, sino que es el modo en que la teoría NBG logra eludir la paradoja de Russell. Esta paradoja surge en la teoría de conjuntos de Cantor (o teoría intuitiva de conjuntos) cuando se considera la clase R definida por la fórmula $\theta(x) = x \notin x$. Para la teoría intuitiva de conjuntos el esquema que vale es:

$$\forall x(x \in C_\theta \leftrightarrow \theta(x))$$

Por lo tanto, si se toma en particular la fórmula $x \notin x$, se deduce que:

$$\forall x(x \in R \leftrightarrow x \notin x)$$

Si, a su vez, en esta última fórmula se toma $x = R$ entonces:

$$R \in R \leftrightarrow R \notin R$$

Se prueba así que la teoría intuitiva de conjuntos demuestra un enunciado autocontradictorio. Esta contradicción constituye la paradoja de Russell. En cambio, si se toma el esquema que propone la teoría NBG, y se reemplaza en él la fórmula $\theta(x) = x \notin x$, se llega al enunciado siguiente:

$$\forall x\big(x \in R \leftrightarrow (x \notin x \wedge x \text{ es un conjunto})\big)$$

Si se toma $x = R$ se obtiene:

$$R \in R \leftrightarrow (R \notin R \wedge R \text{ es un conjunto})$$

Como este enunciado no es una contradicción, entonces la Paradoja de Russell no se produce. De hecho, la única alternativa que es consistente con este último enunciado es que R no sea miembro de sí mismo y que R no sea un conjunto. Es decir, se concluye que, para NBG, R existe y es una clase propia.

Por el contrario, la teoría de Zermelo-Fraenkel con el axioma de elección no admite la distinción entre conjuntos y clases propias. La manera en que esta teoría elude la paradoja de Russell es estableciendo reglas muy específicas relativas a los conjuntos que pueden definirse. No es necesario detallar esas reglas, basta decir que implican que el conjunto R de Russell no existe (y, en consecuencia, no es capaz de producir paradoja alguna).[26]

Entonces, ¿el conjunto R existe, o no? Nótese que una respuesta afirmativa a esta pregunta implicaría descartar a ZFC como descripción del mundo platónico de los conjuntos, mientras que una respuesta negativa implicaría descartar NBG. Un platonista de objetos, como Gödel o Cantor, diría que la pregunta tiene una respuesta concreta bien definida (R existe, o bien no existe), y que la manera de hallarla es mediante algún tipo de percepción del mundo platónico de las matemáticas.

Una alternativa consistiría en responder la pregunta siguiendo algún otro criterio. Por ejemplo, puede tomarse la decisión sobre la base de consideraciones estéticas; en ese sentido podría argumentarse que la distinción en conjuntos y clases propias crea una asimetría que resulta antiestética. O también podría tomarse una decisión por razones de conveniencia; por ejemplo, porque ciertas demostraciones cruciales resultan más sencillas si se sigue el formalismo de alguna de las dos teorías. Sin embargo, ninguna de estas soluciones sería aceptable para el punto de vista platonista, que no busca meramente una teoría de conjuntos conveniente o estética, sino una teoría de conjuntos que sea objetivamente verdadera.

¿Cuál es la respuesta que da el platonismo pleno? Suponiendo que ZFC y NBG sean teorías consistentes, entonces, para el platonismo pleno, ambas serían descripciones correctas del mundo platónico.[27] Por lo tanto, habría una parte del reino de la matemática (si es que se puede hablar de una "parte" de un universo no espaciotemporal) la clase R existe; mientras que habría otra parte del mundo platónico en el que R no existe. Nótese, y este es el punto esencial, que para justificar esta respuesta sólo se necesita saber que ZFC y NBG son consistentes, no es necesario tener ningún tipo de percepción del mundo platónico en sí.

De este modo, el platonismo pleno, tal como se dijo más arriba, parece responder exitosamente a la objeción epistemológica: el conocimiento de los objetos abstractos se alcanza mediante el estudio de teorías matemáticas consistentes que los describan, y no mediante el estudio de los objetos abstractos en sí, con los cuales no es necesario tener ningún tipo de contacto.

---

[26] Una comparación detallada entre los axiomas de las teorías de conjuntos ZFC y NBG se encuentra en Fraenkel, Bar-Hillel & Levy (1973). Las referencias históricas a la teoría de conjuntos se ofrecen en el Capítulo 9.

[27] En sentido estricto no se conoce prueba absoluta de consistencia de ninguna teoría de conjuntos. Existen pruebas de la consistencia relativa de NBG respecto de ZFC y de ZFC respecto de NBG; es decir, se ha probado que ZFC es consistente si y solo si NBG también lo es. Por tanto, o bien ambas teorías son consistentes, o bien ambas son inconsistentes, pero esto no garantiza la consistencia de ninguna de las dos teorías. Sobre estas pruebas de consistencia relativa véase Enderton (1977).

En otras palabras, dado que cualquier teoría consistente describe verazmente un aspecto del reino abstracto de la matemática, no es necesario percibir cuáles objetos existen y cuáles no, ni es necesario percibir qué propiedades tienen, ya que todo aquello que puede consistentemente llegar a existir, en efecto existe, y toda propiedad que consistentemente los objetos puedan poseer, efectivamente la poseen.

En el próximo capítulo presentaremos argumentos que ponen en duda si el platonismo pleno resuelve realmente la objeción epistemológica. Sin embargo, estamos de acuerdo con Balaguer en que, si acaso existe algún modo de refutar la objeción epistemológica, la única estrategia posible parece ser la del platonismo pleno. Por ejemplo, tal como se ha visto, para dar respuesta a la pregunta de si R existe, se puede optar por las siguientes alternativas:

(1) Apelar a la posibilidad de percibir los objetos abstractos.

(2) Seleccionar una respuesta según criterios estéticos, de conveniencia, u otros similares de tipo pragmático.

(3) Postular que las dos respuestas ("R existe" y "R no existe") son correctas al mismo tiempo, cada una de ellas en una parte diferente del universo matemático.

La alternativa (1) contradice la definición de objeto abstracto y no se ha podido presentar un argumento convincente que explique cómo una tal percepción puede ser posible. La opción (2) no es aceptable para el punto de vista platonista, que no busca teorías matemáticas convenientes, útiles o elegantes, sino teorías que describan la verdad objetiva referida a los objetos matemáticos. La única opción que resta es la (3), que es la que propone el platonismo pleno. Por lo tanto, si se pudiera probar que el platonismo pleno no es una postura aceptable, esto implicaría una refutación para la postura platonista en general. El capítulo que sigue estará dedicado, por lo tanto, a un estudio detallado del platonismo pleno, con la intención de exponer objeciones específicas a esa postura.

4. El platonismo pleno: descripción y crítica

4.1. La definición del platonismo pleno

Tal como se dijo en los capítulos previos, el platonismo pleno (en inglés *full-blooded Platonism*) es la variante del platonismo que sostiene que si la existencia de un objeto matemático O es lógicamente consistente, entonces O efectivamente existe como objeto abstracto en el mundo platónico de las matemáticas.

> El platonismo pleno es la postura de que todo objeto matemático lógicamente posible existe. (Balaguer 1998: 5)

Las dos citas siguientes desarrollan esta definición de manera más amplia.

> La tesis es que todo objeto matemático posible existe. Así, si r es cualquier teoría lógicamente posible, entonces existe alguna clase C de objetos matemáticos tal que r es verdadera en C. En otras palabras, toda teoría posible es una descripción correcta de alguna porción del universo matemático. (Shapiro 2000: 252)

> Si el platonismo pleno es correcto, entonces toda teoría puramente matemática consistente describe verazmente alguna colección de objetos matemáticos abstractos. Así, para adquirir conocimiento de los objetos matemáticos, todo lo que necesitamos es adquirir el conocimiento de que alguna teoría puramente matemática es *consistente*. (No importa cómo llegamos a dar con la teoría; algún matemático creativo podría simplemente haberla "soñado".) (Balaguer 1998: 48)

En resumen, cualquier teoría "puramente matemática" (nos referiremos más adelante al posible significado de esta expresión) que sea lógicamente consistente describe de manera correcta una parte del universo abstracto de la matemática. Inmediatamente después del último pasaje citado, Balaguer agrega lo siguiente:

> Pero el conocimiento de la consistencia de una teoría matemática –o de cualquier *otro* tipo de teoría– no requiere ninguna clase de contacto con, o acceso a, los objetos a los cuales la teoría se refiere. (Balaguer 1998: 48)

Este último párrafo señala el hecho de que, según el platonismo pleno, para analizar si un objeto matemático existe, basta con saber si la teoría que postula su existencia es lógicamente consistente; y para estudiar las propiedades de ese objeto es suficiente con estudiar qué nos dice esa teoría acerca de él. En ninguna instancia del estudio de los objetos matemáticos sería necesario tener alguna clase de "contacto directo" con estos. Del mismo modo que en el caso de una teoría física, digamos, que trate de partículas subatómicas, no se requiere tener ningún tipo de acceso epistémico a esas partículas para determinar si la teoría es o no es consistente, por ejemplo, no es necesario detectarlas mediante algún tipo de instrumento. De este modo, el platonismo pleno lograría responder exitosamente a la objeción epistemológica formulada por Benacerraf (1965). De hecho, Balaguer sostiene que el platonismo pleno es la única variante del platonismo que es capaz de superar esa objeción, de donde se deduciría que el platonismo pleno es la única versión aceptable del platonismo. Sin embargo, esta variante del platonismo presenta muchos otros problemas, que serán analizados en este capítulo.

4.2. Teorías puramente matemáticas

El objetivo de las páginas que siguen es argumentar en contra de la viabilidad del platonismo pleno; en particular, se sostendrá la tesis de que el platonismo pleno no es una postura consistente. Para ello, es necesario analizar primeramente qué se debe entender por una "teoría puramente matemática".

Aunque Balaguer nunca define el significado de esta expresión (sólo indica que las teorías matemáticas son diferentes de las teorías físicas), es razonable suponer que una teoría puramente matemática es aquella que se refiere exclusivamente a objetos matemáticos. En cuanto a qué es un objeto matemático, la cita siguiente expresa la idea de Balaguer al respecto.

> Un objeto matemático es solo un objeto abstracto que normalmente sería pensado como formando parte del dominio de las matemáticas, por ejemplo, un número, una función o un conjunto. (Balaguer 1998: 3)

Toda teoría matemática formal puede ser analizada desde dos puntos de vista: el sintáctico y el semántico. Los aspectos sintácticos se refieren a los símbolos en sí mismos (o a las cadenas de símbolos en sí mismas), sin tomar en cuenta su significado. Por ejemplo, del enunciado "$2+2=4$" podríamos decir que comienza con el símbolo "2", o que contiene cinco símbolos. Por el contrario, el análisis de los aspectos semánticos se basa en el significado de los símbolos y de los enunciados de la teoría; por ejemplo, del enunciado "$2+2=4$" podríamos decir, después de entender su significado, que es verdadero.

Balaguer afirma que, según el platonismo pleno, la determinación de la consistencia de una teoría no requiere de ningún tipo de conocimiento, directo ni indirecto, de los objetos a los cuales esa teoría se refiere. Es decir, el platonismo pleno presupone que es posible una demostración puramente sintáctica de la consistencia. Esta condición limita el tipo de teorías admisibles, ya que, si la demostración sintáctica de la consistencia es posible, entonces la teoría en cuestión debe ser necesariamente de primer orden. La consistencia de una teoría de orden superior no puede ser demostrada, ni siquiera en teoría, mediante procedimientos sintácticos. Por otra parte, si bien es verdad que "Si la consistencia de una teoría es demostrable mediante métodos sintácticos, entonces esa teoría es de primer orden", la afirmación recíproca, sin embargo, es falsa.

Debemos distinguir, en este punto, entre pruebas relativas y pruebas absolutas de consistencia. En una prueba relativa, la consistencia de una teoría $\mathcal{T}$ se demuestra bajo la suposición de la consistencia de otra teoría $\mathcal{T}'$. Por ejemplo, es posible demostrar que, si la geometría euclidiana es consistente, entonces la geometría no euclidiana hiperbólica también lo es. En una prueba absoluta de consistencia, en cambio, la consistencia de $\mathcal{T}$ es demostrada sin apelar a la consistencia de ninguna otra teoría. El Segundo Teorema de Incompletitud de Gödel dice que la consistencia de cualquier teoría matemática de primer orden que tenga cierto grado de complejidad no puede ser demostrada en forma absoluta mediante los recursos formales de la propia teoría (entre las teorías a las que se aplica este teorema se destacan la aritmética de Peano de primer orden y la teoría de conjuntos ZFC).

Como consecuencia de estos hechos surge una primera inconsistencia en el platonismo pleno; en efecto, esta postura habla de teorías "puramente matemáticas" consistentes, pero la condición para que una teoría sea aceptable (es decir, su consistencia) es una propiedad sintáctica, mientras que la condición de ser "puramente matemática" es necesariamente semántica. Para entender por qué esta dualidad implica un problema, considérese el lenguaje $\mathcal{L}_1$ formado por las constantes s, w, l, m, las relaciones binarias A, E, y las relacionas monádicas C, U, D, T. Tómese asimismo el siguiente sistema de nueve axiomas:

Ax. 1. $D(s) \wedge \neg D(w) \wedge \neg D(l) \wedge \neg D(m)$
Ax. 2. $\neg C(s) \wedge C(w) \wedge \neg C(l) \wedge \neg C(m)$
Ax. 3. $\neg U(s) \wedge \neg U(w) \wedge U(l) \wedge \neg U(m)$
Ax. 4. $\neg T(s) \wedge \neg T(w) \wedge \neg T(l) \wedge T(m)$
Ax. 5. $A(s, w)$
Ax. 6. $E(s, m)$
Ax. 7. $\forall x \forall y \big(A(x, y) \rightarrow A(y, x)\big)$
Ax. 8. $\forall x \forall y (E(x, y) \rightarrow E(y, x))$
Ax. 9. $\forall x \forall y (A(x, y) \rightarrow \neg E(x, y))$
Ax. 10. $\exists x \exists y (\neg A(x, y) \wedge \neg E(x, y))$

La teoría de primer orden definida por los axiomas 1 a 10, a la que llamaremos $\mathcal{T}_1$, es consistente. La consistencia no será demostrada sintácticamente. (Una demostración semántica consiste en probar que $\mathcal{T}_1$, tal como se mostrará más abajo, admite un modelo. De hecho, la manera usual de probar la consistencia absoluta de una teoría consiste en encontrar un modelo de esa teoría[28].) $\mathcal{T}_1$ cumple, entonces, una de las dos condiciones que el platonismo pleno le pide a una teoría para poder afirmar que describe correctamente una parte del mundo platónico de las matemáticas. La segunda condición es que se trate de una teoría puramente matemática, sin embargo, determinar si esto último es cierto requiere conocer a qué se refiere la teoría, en otras palabras, es necesario hallar un modelo.

Llamemos M_1 a la interpretación que tiene como dominio al conjunto de los números enteros no negativos, y en la cual las relaciones y constantes se interpretan de la siguiente manera:

(a) La relación $C(x)$ (respectivamente, $U(x)$, $D(x)$ y $T(x)$) se interpreta como "x tiene resto 0 (respectivamente, 1, 2, 3) al dividir por 4".

(b) $A(x, y)$ se interpreta como "$x + y$ tiene resto 0 al dividir por 3".

(c) $E(x, y)$ se interpreta como "$x + y$ tiene resto 1 al dividir por 3".

[28] Existe, sin embargo, una prueba puramente sintáctica de la consistencia de una teoría, que consiste en encontrar una fórmula bien formada del lenguaje de dicha teoría que no sea un teorema, es decir, que no sea deducible, por medios puramente sintácticos, de los axiomas de la teoría. Este tipo de prueba, con todo, es muy difícil de realizar y hay muy pocos ejemplos en la matemática.

(d) Las constantes s, w, l, m se interpretan respectivamente como los números 2, 4, 1, 3.

Para verificar que M_1 es un modelo de $\mathcal{T}_1$ basta comprobar que, según esta interpretación, todos los axiomas de la teoría son enunciados verdaderos, verificación que puede hacerse muy fácilmente. Por ejemplo, el axioma 1, Ax. 1. $D(s) \wedge \neg D(w) \wedge \neg D(l) \wedge \neg D(m)$, se interpreta como el enunciado "2 tiene resto 2 al dividir por 4, y 4 no tiene resto 2 al dividir por 4, y 1 no tiene resto 2 al dividir por 4, y 3 no tiene resto 2 al dividir por 4". Esta interpretación permite afirmar que $\mathcal{T}_1$ es "puramente matemática", ya que se refiere a números. En consecuencia, describe correctamente una parte del reino abstracto de las matemáticas.

Sin embargo, la teoría $\mathcal{T}_1$ admite, al menos, una segunda interpretación, que puede ser llamada M_2. El dominio de M_2 es el universo en el que transcurren las historias de Sherlock Holmes escritas por Arthur Conan Doyle. La constante s se interpreta como Sherlock Holmes, w es el Dr. Watson, l es el Inspector Lestrade y m es el archienemigo de Holmes, James Moriarty. En este modelo, los predicados $C(x)$, $U(x)$, $D(x)$ y $T(x)$ se interpretarán respectivamente como: "x es médico", "x es policía", "x es detective privado" y "x es criminal". Finalmente, la relación $A(x, y)$ se interpreta como "x e y son amigos", mientras que la relación $E(x, y)$ se interpreta como "x e y son enemigos".

Dado que el "universo de Sherlock Holmes" es un modelo de una teoría de primer orden consistente, un platonista pleno, en principio, debería concluir que ese universo existe en el mundo platónico de las matemáticas y que, por ejemplo, Holmes y Watson son objetos abstractos. Sin embargo, de la lectura de Balaguer se deduce claramente que este autor rechazaría la conclusión que acaba de exponerse. En efecto varias veces en sus trabajos (por ejemplo, Balaguer 2009a: 47) usa personajes literarios como ejemplos de objetos no existentes y, por ende, como objetos no matemáticos.[29] Como consecuencia, el concepto de "teoría puramente matemática" resulta ser contradictorio, ya que la misma teoría $\mathcal{T}_1$ es puramente matemática, pero al mismo tiempo no lo es.

Esta contradicción surge del hecho de que una teoría consistente (una propiedad sintáctica) admite muchos modelos posibles (una propiedad semántica). Más precisamente, si la teoría es satisfacible, es decir, si tiene al menos un modelo, tendrá

[29] Como resultará claro en los capítulos siguientes, este ejemplo, podría emplearse para apoyar el ficcionalismo matemático, pero tiene el inconveniente de que no permite distinguir entre las ficciones matemáticas, como el número 3, y las ficciones literarias, como Sherlock Holmes.

en general un número infinito de ellos.[30] Sólo parece haber tres soluciones posibles para este problema. Una consistiría en aceptar que todos los modelos son "matemáticos"; de esta solución se deduciría que Holmes y Watson son objetos matemáticos. La segunda solución consiste en afirmar que ningún modelo es matemático; como consecuencia, los objetos matemáticos no existirían. La tercera solución consiste en determinar, antes de formular cualquier teoría, cuáles objetos son matemáticos y cuáles no lo son. Dado que el platonismo pleno rechaza las dos primeras opciones, sólo puede aceptar la tercera.

Sin embargo ¿cómo puede saberse, *a priori*, cuáles objetos son matemáticos y cuáles no los? ¿Cómo puede saberse que el número 1 existe en el universo abstracto de la matemática, pero Holmes no? Esta pregunta, a su vez, sólo parece tener dos respuestas posibles. O bien ese discernimiento proviene de algún tipo de contacto con el universo abstracto (suposición que destruye la principal ventaja del platonismo pleno y, de hecho, desvirtúa todo el platonismo pleno en sí); o bien se trata de una decisión arbitraria (que es en definitiva lo que dice la propia definición de Balaguer: los objetos matemáticos son aquellos que aceptamos como tales).

La solución más razonable, y más acorde con la práctica matemática, es que la decisión de qué es, o qué no es, un objeto matemático sea puramente convencional. De hecho, si algún matemático del futuro decidiera desarrollar una teoría lógico-matemática de las historias de Conan Doyle (para estudiar, por ejemplo, si son lógicamente consistentes) entonces Holmes y Watson pasarían a ser, a partir de ese momento, objetos matemáticos. Algo semejante ocurrió en la propia historia de la matemática, cuando se aceptó, no sin resistencias considerables, la existencia de los números complejos, de los cardinales transfinitos y de tantos otros objetos que, en un momento dado, pasaron a formar parte de las entidades a las que se refería el lenguaje de los matemáticos.

Si el hecho de que un objeto sea, o no, un objeto matemático resulta ser puramente convencional, entonces los objetos matemáticos no pueden ser intemporales ya que surgen de decisiones tomadas por los propios matemáticos en el mundo espaciotemporal. En resumen, el ejemplo de la teoría $\mathcal{T}_1$ demostraría que, o bien el platonismo pleno es contradictorio en sí mismo, o bien que el mundo espaciotemporal afecta el mundo abstracto de las matemáticas. Cualquiera sea la alternativa correcta se llegaría a la conclusión de que el platonismo pleno no es una

[30] En el caso que nos ocupa, el de las teorías de primer orden, toda teoría satisfacible, además, necesariamente tendrá modelos no estándar.

postura viable en la filosofía de la matemática, ya que no consigue solucionar los problemas que originaron su propia formulación.

4.3. ¿El platonismo pleno es autocontradictorio?

Más allá del argumento que se ha expuesto en el punto anterior, hay otras objeciones que se pueden formular al platonismo pleno. Por ejemplo, al definir qué es un objeto matemático, Mark Balaguer pone como ejemplos a los números, las funciones y los conjuntos (véase Balaguer 1998: 3). Sin embargo, existen otros objetos que son habitualmente estudiados por los matemáticos y que, por lo tanto, deben también ser considerados como objetos matemáticos; un ejemplo son las teorías de primer orden en sí mismas.

Es común pensar a las teorías de primer orden como objetos metamatemáticos, externos a la matemática en sí. Sin embargo, las teorías de primer orden son, en realidad, objetos matemáticos tan legítimos como los números y los conjuntos. Por una parte, siguiendo la definición de Balaguer, las teorías de primer orden son estudiadas por algunos matemáticos, específicamente por aquellos que están especializados en lógica y teoría de conjuntos. Por otra parte, hay también teoremas matemáticos que se refieren a las propiedades de esas teorías (los teoremas de incompletitud de Gödel, por ejemplo, que son teoremas matemáticos demostrados matemáticamente, hablan específicamente de teorías de primer orden). Otro argumento a favor de esta idea es que la las teorías de primer orden son, en última instancia, conjuntos; más exactamente, conjuntos formados por sucesiones finitas de símbolos.

Dado que las teorías de primer orden son objetos matemáticos, es posible postular, entonces, teorías de primer orden "puramente matemáticas" que se refieran, a su vez, a teorías de primer orden. Esta afirmación puede parecer circular, sin embargo, no lo es. Por ejemplo, la demostración del Primer Teorema de Gödel, que se refiere a teorías de primer orden, puede ser formalizada en el contexto de una teoría de primer orden. Más aún, este hecho es esencial en la demostración que Gödel esboza para su Segundo Teorema de Incompletitud. Hecha esta observación, considérese el lenguaje $\mathcal{L}_2$ cuyo vocabulario contiene los predicados monádicos C y M, y sea $\mathcal{T}_2$ la teoría de primer orden determinada por el siguiente axioma.

Ax. 1. $\exists x(C(x) \wedge \neg K(x))$

Se aceptará sin demostración el hecho (casi evidente) de que $\mathcal{T}_2$ es una teoría sintácticamente consistente. Para ver a $\mathcal{T}_2$ como una teoría "puramente matemática", considérese el modelo M_2 cuyo universo está formado por todas las teorías de primer orden; la relación $C(x)$ se interpreta como "x es consistente" y $K(x)$, como "x admite un modelo matemático".

Dado que $\mathcal{T}_2$ es sintácticamente consistente, el platonismo pleno nos permite concluir que el modelo M_2 es una parte del mundo abstracto de las matemáticas. Pero M_2 está formado por teorías de primer orden que no se refieren a ningún objeto matemático (porque no tienen un modelo). Es decir, de los postulados del platonismo pleno se deduce que existen teorías "puramente matemáticas" que no se refieren a ningún objeto abstracto, situación que contradice esos mismos postulados. Se deduciría, en consecuencia, que el platonismo pleno es autocontradictorio.

Por otra parte, la existencia del modelo M_2 contradice el Teorema de Löwenheim-Skolem, que afirma esencialmente que toda teoría de primer orden sintácticamente consistente es satisfacible, es decir, tiene al menos un modelo (en cambio, existen teorías de orden superior que son, hasta donde se sabe, sintácticamente consistentes pero que no admiten ningún modelo.) Los objetos que forman M_2, por lo tanto, no pueden existir, no por una inconsistencia de $\mathcal{T}_2$ (ya que tal inconsistencia no existe), sino porque la definición de M_2 es inconsistente con otras teorías matemáticas aceptadas como "verdaderas".

Este hecho muestra otro problema del platonismo pleno: a diferencia de lo que esta postura sostiene, las teorías matemáticas no existen aisladamente unas de otras, sino que, en muchos casos, están relacionadas entre sí de formas que van más allá de los aspectos sintácticos. Por ejemplo, la teoría que se toma como estándar para estudiar los números naturales es la aritmética de Peano de primer orden; sin embargo, también sucede que los números naturales (con sus operaciones y relaciones) pueden definirse en el contexto de la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel con el axioma de elección (ZFC). Es decir, aunque se trata de dos teorías diferentes, con lenguajes muy diferentes, la práctica matemática admite que una parte del modelo de ZFC coincide con el modelo pretendido de los axiomas de Peano, aunque el primero está formado por conjuntos y el segundo, por números. La única solución posible parece ser la idea de que los números naturales, y los objetos matemáticos en general, son preexistentes a las teorías de primer orden.

La conclusión a la parecen conducir los argumentos de esta sección es que, o bien el platonismo pleno es autocontradictorio, o bien la simple consistencia de una única teoría no es criterio suficiente para aceptar la existencia de un objeto matemático. En ambos casos la consecuencia sería que el platonismo pleno no es una filosofía de la matemática viable.

4.4. El platonismo pleno y la práctica matemática

Otra objeción que puede plantearse al platonismo pleno, y que fue insinuada al terminar la sección anterior, consiste en observar que esta postura sostiene una visión de la práctica matemática que está muy alejada de la realidad. En efecto, de la lectura de Balaguer (1998) se desprende que el trabajo de un matemático consistiría en estudiar teorías, las cuales podrían simplemente haber sido soñadas por algún otro matemático, o por él mismo. La única condición para que una teoría sea aceptable como objeto de estudio sería su consistencia, la cual debería ser demostrada de manera puramente sintáctica. Sin embargo, si este fuera el caso, ninguna teoría podría ser aceptada de manera definitiva. En efecto, como ya se ha observado, el Segundo Teorema de Incompletitud de Gödel afirma que no es posible demostrar de manera absoluta, mediante métodos sintácticos, la consistencia de ninguna teoría matemática que tenga la suficiente complejidad (como, por ejemplo, la aritmética de Peano de primer orden, o la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel con el axioma de elección). En resumen, aunque las teorías inconsistentes ciertamente son inadmisibles, la consistencia no puede ser el único criterio para aceptar una teoría matemática. (La consistencia relativa tampoco sería un criterio muy fuerte, ya que remite a la consistencia de una teoría diferente, la cual normalmente es más "potente" que la primera y, por lo tanto, de consistencia aún más dudosa, como ocurre, por ejemplo, en la prueba de consistencia de ZFC respecto de NBG.) Es necesario aclarar que Balaguer menciona parcialmente esta cuestión, tal como se lee en la siguiente cita.

> No estoy diciendo que si los matemáticos creen que una teoría es consistente, entonces deben aceptarla automáticamente. Esto ciertamente no es verdad: los matemáticos generalmente requieren más que la mera consistencia antes de estar dispuestos a aceptar una teoría. (Balaguer 1998: 52)

Sin embargo, aunque Balaguer admite que la consistencia no es el único criterio, nunca llega a establecer qué otras pautas aplicarían los matemáticos para aceptar una teoría. ¿Por qué sostenemos la tesis de que estas ideas son ajenas a la práctica matemática? Porque cuando se le pregunta a un matemático de qué trata su trabajo, éste responderá casi invariablemente que consiste en resolver problemas. Estos problemas tienen, en general, la forma de una conjetura, es decir, de una afirmación de la que se quiere determinar si es verdadera o falsa. Una de las conjeturas más famosas aún no resueltas es, por ejemplo, la llamada Conjetura de Goldbach, que dice que todo número par mayor que 2 es la suma de dos números primos. Enunciada en el lenguaje de primer orden de la aritmética de Peano, la conjetura puede expresarse así:

$$\forall x((x > 1) \rightarrow (\exists u \exists v(P(u) \wedge P(v) \wedge 2x = u + v))) \qquad [1]$$

Donde $P(x)$, que significa "x es primo", es la siguiente fórmula:

$$x > 1 \wedge \forall y \forall z((x = y.z) \rightarrow (y = 1 \vee z = 1))$$

Según la visión del platonismo pleno, un matemático que trabaje en el intento de demostrar o refutar la conjetura de Goldbach está estudiando la aritmética de Peano de primer orden. Más exactamente, el matemático estaría tratando de determinar si la afirmación [1] es demostrable o refutable en esa teoría. Pero esta manera de interpretar la situación no describe correctamente la práctica real de los matemáticos. En efecto, en primer lugar, el matemático no piensa a la conjetura de Goldbach como una afirmación escrita en un lenguaje formal de primer orden (y que podría referirse también a cualquiera de los modelos no estándar que admite la aritmética de Peano). El matemático piensa esa afirmación como referida a ciertos "objetos semánticos" específicos, que son los números naturales.

Por otra parte, el matemático piensa a su disciplina de una manera global, y no restringe su trabajo, ni sus demostraciones, a una teoría específica (a menos que se trate de un lógico que tiene a esa teoría como objeto de estudio en sí mismo). El matemático no busca específicamente una demostración de la Conjetura de Goldbach que esté basada en los axiomas de Peano, sino que busca alguna demostración, la que fuere, no importa qué "herramientas" use, ni en qué contexto existan. A continuación, se mencionan tres ejemplos de situaciones de este tipo.

La llamada Conjetura Débil de Goldbach, que también puede enunciarse en la aritmética de Peano de primer orden, dice que todo número impar mayor o igual que 7 es suma de tres números primos (si la Conjetura de Goldbach fuese cierta, también lo sería la Conjetura débil, pero no vale la afirmación recíproca). En 1937 el matemático ruso Iván Matvéyevich Vinográdov demostró que la Conjetura débil es verdadera para todos los números "suficientemente grandes"; es decir, existe algún N_0 tal que todo número impar mayor que él puede escribirse como suma de tres primos. El punto a destacar es que la demostración de Vinográdov se basa en técnicas de series de Fourier, totalmente ajenas a los axiomas de Peano y no representables en esa teoría.

En otro ejemplo, en 1995 el matemático inglés Andrew Wiles demostró el Último Teorema de Fermat, un enunciado también expresable en la aritmética de Peano de primer orden, mediante razonamientos que involucran curvas elípticas y formas modulares, también ajenas a los axiomas de Peano.

Un tercer ejemplo, realmente notable, está dado por el Teorema de Goodstein. Este teorema se refiere a las llamadas "sucesiones de Goodstein de semilla n_0", cada una de las cuales se define a partir de un número natural n_0 cualquiera. A este número se le aplican sucesivamente ciertas operaciones específicas, los detalles de cómo se definen esas operaciones son bastante técnicos y escapan a los fines de este trabajo[31]. Basta decir que la definición de las sucesiones de Goodstein es expresable en el lenguaje de la aritmética de Peano de primer orden. Se mencionan a continuación algunos ejemplos de estas sucesiones.

Si $n_0 = 0$, la sucesión que se obtiene vale constantemente 0.

Si $n_0 = 1$, la sucesión es 1, 0, 0, 0, 0,... y se mantiene constante en 0.

Si $n_0 = 2$, la sucesión es 2, 2, 1, 0, 0, 0,... y se mantiene constante en 0.

Si $n_0 = 3$, la sucesión es 3, 3, 3, 2, 1, 0, 0, 0,… y se mantiene constante en 0.

Si $n_0 = 4$, la sucesión comienza con 4, 26, 41, 60, 83, 109,…. A primera vista parece que los valores seguirán creciendo y que la sucesión tiende a infinito. Sin embargo, al cabo de una cantidad de pasos que es del orden un 1 seguido de seis millones de ceros, la sucesión comienza a decrecer y finalmente, como en los casos anteriores, se estabiliza en 0.

Si $n_0 = 19$, el segundo valor de la sucesión es 7.625.597.484.990 y el tercero es del orden de 10^{154}; sin embargo, al cabo de un número astronómicamente grande de pasos, la sucesión se estabiliza en 0.

Si $n_0 \geq 4$ la sucesión que se genera crece inicialmente de manera muy rápida y parece tender al infinito; sin embargo, el Teorema de Goodstein afirma que, cualquiera sea el n_0 inicial, la sucesión de Goodstein de semilla n_0, al cabo de una cantidad finita (aunque inimaginablemente grande) de pasos, se hará constantemente igual a 0. Se trata, como puede apreciarse, de un teorema puramente aritmético que, según la visión de Balaguer, debería demostrarse a partir de los axiomas de Peano de primer orden. Sin embargo, se ha demostrado que el Teorema de Goodstein es indecidible con respecto a

[31] Los detalles completos pueden verse en Kirby & Paris (1982) y en Caicedo (2007).

los axiomas de Peano; es decir, a partir de esos axiomas el teorema no puede ser demostrado, ni tampoco refutado. ¿Por qué se lo llama "teorema", entonces? Porque el Teorema de Goodstein sí puede demostrarse a partir de los axiomas de la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel con el axioma de elección. Es decir, se trata de un enunciado puramente aritmético que no puede ser demostrado a partir de los axiomas estándar de la aritmética, pero sí puede demostrarse a partir de los axiomas de la teoría de conjuntos.

Llamemos AP_1 a la aritmética de Peano de primer orden, TG al Teorema de Goodstein, y $AP_1 \cup \{TG\}$ a la teoría que resulta de agregarle a la aritmética de Peano de primer orden el Teorema de Goodstein como nuevo axioma. De lo dicho más arriba se deduce que tanto $AP_1 \cup \{TG\}$, como $AP_1 \cup \{\neg TG\}$, son ambas teorías consistentes (bajo la suposición de que AP_1 también lo sea). Sin embargo, cualquier matemático aceptaría como válida (en el sentido de descripción "verdadera" de los números naturales) a $AP_1 \cup \{TG\}$, pero no así a $AP_1 \cup \{\neg TG\}$, esta última teoría sólo sería de interés, como objeto de estudio en sí mismo, para los matemáticos que estudian los modelos no estándar de los axiomas de Peano. El Teorema de Goodstein es, para la comunidad matemática, una afirmación "verdadera", independientemente de cuál sea la teoría en cuyo contexto se formule.[32]

La conclusión es que los matemáticos no estudian teorías, sino objetos; las teorías le dan un marco formal a los razonamientos que los matemáticos realizan. Más aún, uno de los criterios para que la comunidad acepte la legitimidad de una teoría consiste en que ésta sea vista como una descripción "verdadera" de las propiedades básicas que esos objetos poseen. En resumen, no estamos de acuerdo con la afirmación de Balaguer de que los matemáticos creen que "las teorías son descripciones correctas porque son consistentes". Por el contrario, sostenemos que creen que son consistentes porque son descripciones correctas de ciertos objetos que previamente, de manera acertada no, aceptan como existentes (a pesar de que, como se dijo en el capítulo anterior, los textos y artículos matemáticos tienden a mantener, en su lenguaje, la neutralidad ontológica).

[32] La demostración, en ZFC, del Teorema de Goodstein, así como el hecho de que el enunciado es indecidible con respecto a los axiomas de Peano de primer orden, aparecen en Kirby & Paris (1982). Otra demostración puede verse en Caicedo (2007). El hecho de que el Teorema de Goodstein sea indecidible con respecto a los axiomas de Peano de primer orden demuestra, en particular, que estos son consistentes (supuesto que ZFC lo sea, ya que la demostración de la indecidibilidad se basa en esta última teoría).

Otro ejemplo en ese mismo sentido está dado por el desarrollo histórico de la teoría de conjuntos. Cuando Georg Cantor propuso la hoy llamada teoría intuitiva de conjuntos, no la dotó con una estructura lógica "euclidiana" basada en un conjunto específico de axiomas, de los cuales se deducirían formalmente los sucesivos teoremas, sino que las demostraciones consistían en razonamientos intuitivos basados únicamente en las definiciones de la teoría, las cuales, a su vez, no estaban enunciadas en un lenguaje formal. A continuación, se muestran dos ejemplos de estas definiciones.

> Por un 'agregado' (*Menge*) entendemos cualquier colección en un todo (*Zusammenfassung zu einem Ganzen*) *M* de objetos definidos y separados *m* de nuestra intuición o nuestro pensamiento. Estos objetos son llamados los 'elementos' de *M*. (Cantor 1895: 481)

> Dado cualquier elemento individual *m*, cuando nos abstraemos de su naturaleza, se convierte en una 'unidad', el número cardinal $\overline{\overline{M}}$ es un agregado definido compuesto de unidades, y este número tiene existencia en nuestra mente como una proyección del agregado M dado. (Cantor 1895: 482)

La informalidad, tanto del lenguaje, como de la estructura lógica y metamatemática, de la teoría de Cantor, fue muy criticada por Gottlob Frege, quien en las dos últimas décadas del siglo XIX se dedicó a darle una forma rigurosa. El trabajo de Frege es muy extenso y complejo, por lo que una descripción del mismo excedería los fines de esta tesis. Sólo diremos que en 1897 Frege publicó el primer tomo de su *Die Grundlagen der Arithmetik* (*Fundamentos de la Aritmética*), libro en el que daba una versión formalizada de la teoría de conjuntos de Cantor con el objetivo ulterior de fundamentar en ella la aritmética. Sin embargo, en 1902 Bertrand Russell descubrió que la teoría de conjuntos propuesta por Frege era inconsistente. En una famosa carta, fechada el 16 de junio de 1902, Russell le comunicó a Frege lo que se cita a continuación.

> Usted afirma [...] que una función también puede actuar como un elemento indeterminado. Esto es lo que yo creía, pero ahora esta opinión me parece dudosa a causa de la siguiente contradicción. Sea *w* el predicado: ser un predicado que no puede ser predicado sobre sí mismo. ¿Puede predicar sobre sí mismo? De cada respuesta se sigue su opuesta. En consecuencia debemos concluir que *w* no es un predicado. De manera similar, no existe la clase (pensada como una totalidad) de todas las clases que,

> tomadas como una totalidad, no pertenecen a sí mismas. De esto concluyo que bajo ciertas circunstancias una colección definible no forma una totalidad. (Russell 1976)

La teoría de Frege postulaba que a cada predicado le correspondía una clase, entendida como la extensión de dicho predicado, pero, como se expuso en el capítulo anterior, Russell demostró que ese postulado es autocontradictorio. No obstante, y éste es el punto que se intenta mostrar con el ejemplo, aunque la teoría de Cantor era totalmente informal y la de Frege, inconsistente, la mayoría de la comunidad matemática no renunció al concepto de conjunto, sino que persistió en los intentos de formalizarlo mediante teorías axiomáticas que fueran consistentes. En otras palabras, la mayor parte de la comunidad matemática aceptó la existencia de los conjuntos antes (y no después) de que se formulara una teoría consistente que tuviera un modelo en el dominio conjuntista.

Por otra parte, al sostener la idea de que los matemáticos estudian teorías, es posible que Balaguer caiga en un error muy frecuente, que surge de una mala interpretación del Programa de Hilbert. Esta interpretación consiste en afirmar que, como forma de evitar las paradojas halladas en la teoría de conjuntos, Hilbert proponía que la matemática se transformara en una ciencia puramente sintáctica, dedicada a estudiar cadenas de símbolos carentes de significado manipuladas siguiendo ciertas reglas algorítmicas. Sin embargo, la idea central del Programa de Hilbert era muy diferente, como puede advertirse en el siguiente pasaje:

> El objetivo que nos hemos propuesto es entonces el de dar un fundamento seguro a las matemáticas. Nuestra intención es devolver a nuestra disciplina el antiguo prestigio de consistir de verdades indiscutibles, del que las paradojas de la teoría de conjuntos parecieron despojarla. Tenemos la firme convicción de que eso es realizable y que no significa ningún tipo de renuncia a sus partes constitutivas. (Hilbert 1922: 161)

Nótese que en esta cita Hilbert dice que su objetivo es que la matemática vuelva a "consistir de verdades indiscutibles"; y dado que "verdad" es un concepto claramente semántico, resulta claro que Hilbert no renuncia al significado de los símbolos. Él entendía que debía crearse una nueva ciencia, que llamaba metamatemática, y que debía estudiar los métodos de demostración de la matemática con el objetivo de garantizar que ésta tuviera los fundamentos "seguros" que él buscaba.

> Ciertas fórmulas que sirven como base para el edificio formal de las matemáticas se llaman axiomas. […] Una fórmula es demostrable si es o bien un axioma, o se obtuvo por sustitución de un axioma o cuando es la fórmula final de una demostración.
>
> A la matemática real así formalizada se añade una especie de nueva matemática, una metamatemática, necesaria para salvaguardar aquélla y en la que, en contraposición a los modos puramente formales de inferencia de la matemática real, la inferencia concreta es utilizada. (Hilbert 1923: 153)

La validez de las demostraciones de la matemática real (semántica) sería garantizada por la metamatemática en la cual se utiliza, según Hilbert, "la inferencia concreta", esto es, inferencias sintácticas. Es decir, es esta nueva ciencia, y no la matemática real, la que debería tratar a los enunciados matemáticos como si fuesen objetos puramente sintácticos carentes de significado. Los matemáticos trabajarían semánticamente, como siempre lo han hecho, mientras que la metamatemática controlaría sintácticamente la validez de sus razonamientos.

4.5. El problema de la consistencia

Una objeción que un platonista pleno podría oponer a algunas de las críticas formuladas en las secciones anteriores, especialmente en 4.3, es que, según Balaguer, la consistencia de la que habla el platonismo pleno no es un concepto matemático, sino que es "preplatónico" (véase Balaguer 1998: 69–72). Esta idea desecharía la posibilidad de construir el modelo M_2 de 4.3 porque, si la consistencia es un concepto prematemático, entonces no sería válido interpretar $C(x)$ como "x es consistente".

> La idea central aquí es que 'consistente' es simplemente un término primitivo. Más precisamente, la afirmación es que, además de las nociones sintáctica y semántica de consistencia, hay también una noción primitiva o intuitiva de consistencia que no está definida platónicamente. (Balaguer 1998: 70)

A continuación, se intentará justificar la tesis de que, contrariamente a lo que afirma Balaguer, la consistencia es un concepto matemático de la misma naturaleza, por ejemplo, que el concepto de "número primo". Argumentaremos que la afirmación de que la consistencia es una noción preplatónica es una hipótesis *ad hoc* que sólo tiene el objetivo de evitar las contradicciones como la expuesta en 4.3, y que se trata, en realidad, de una hipótesis insostenible.

Para comenzar la argumentación, consideremos el siguiente concepto: Diremos que un conjunto $A \subseteq \mathbb{N}$ es no-contradictorio si y sólo si para todo número natural n, si $2n \in A$ entonces $2n + 1 \notin A$ (es decir, si A contiene a un número par, entonces no contiene a su sucesor). La condición de ser no-contradictorio es expresable, en la aritmética de primer orden, mediante la siguiente fórmula $\theta_A(x)$:

$$\theta_A(2x) \rightarrow \neg\theta_A(2x + 1)$$

En consecuencia, de acuerdo con el platonismo pleno, los conjuntos no-contradictorios existen en el mundo abstracto de la matemática y el concepto de "conjunto no-contradictorio" es, por ende, platónico.

Consideremos, por otra parte, el lenguaje $\mathcal{L}_U$, que bien puede llevar el nombre de "universal", ya que toda teoría de primer orden es expresable mediante algún subconjunto de sus símbolos. En este lenguaje, las variables son llamadas x_1, x_2, x_3,...; las constantes, si la teoría las requiriera, se llamarán c_1, c_2, c_3,...; las relaciones monádicas, $R_1^1(x_1)$, $R_2^1(x_1)$, $R_3^1(x_1)$,...; las relaciones binarias, $R_1^2(x_1, x_2)$, $R_2^2(x_1, x_2)$, $R_3^2(x_1, x_2)$,...; y así sucesivamente. A modo de ejemplo, la teoría $\mathcal{T}_1$ mostrada más arriba podría reescribirse de la siguiente manera. Las constantes s, w, l, m serían c_1, c_2, c_3 y c_4 respectivamente, las relaciones binarias $A(x, y)$ y $E(x, y)$ serían $R_1^2(x_1, x_2)$ y $R_2^2(x_1, x_2)$, y similarmente para las relacionas monádicas $C(x)$, $U(x)$, $D(x)$ y $T(x)$. Hecha esta traducción, el axioma 1, que decía:

Ax. 1. $D(s) \wedge \neg D(w) \wedge \neg D(l) \wedge \neg D(m)$

Se transformaría en:

Ax. 1. $R_3^1(c_1) \wedge \neg R_3^1(c_2) \wedge \neg R_3^1(c_3) \wedge \neg R_3^1(c_4)$

A continuación, consideremos los enunciados de primer orden en el lenguaje $\mathcal{L}_U$ cuya escritura no comienza con el símbolo de negación. El conjunto formado por todos estos enunciados es numerable, existe, entonces una biyección (una correspondencia uno a uno) que a cada enunciado Φ que no comienza con el símbolo "$\neg$" le asigna un número natural $2n$.

$$\Phi_0 \leftrightarrow 0$$
$$\Phi_2 \leftrightarrow 2$$
$$\Phi_4 \leftrightarrow 4$$
$$\Phi_6 \leftrightarrow 6$$
$$\vdots$$

Consideremos ahora las negaciones de cada uno de esos enunciados, es decir, $\neg\Phi_0$, $\neg\Phi_2$, $\neg\Phi_4$,...y extendamos la biyección asignando a cada enunciado $\neg\Phi_{2n}$ el número $2n + 1$. En otras palabras, establecemos la correspondencia:

$$\Phi_0 \leftrightarrow 0$$
$$\neg\Phi_0 \leftrightarrow 1$$
$$\Phi_2 \leftrightarrow 2$$
$$\neg\Phi_2 \leftrightarrow 3$$
$$\Phi_4 \leftrightarrow 4$$
$$\neg\Phi_4 \leftrightarrow 5$$
$$\vdots$$

En la sucesión Φ_0, $\neg\Phi_0$, Φ_2, $\neg\Phi_2$, Φ_4, $\neg\Phi_4$... aparecen esencialmente todos los enunciados de primer orden existentes. "Esencialmente" porque, por ejemplo, aunque en la lista no aparece el enunciado $\neg\neg R_1^1(c_1)$, sí aparece, en cambio, $R_1^1(c_1)$ que es equivalente a él, por lo que la omisión de $\neg\neg R_1^1(c_1)$ y la de otros enunciados similares es irrelevante. Podemos afirmar, entonces, que existe una biyección entre $\mathbb{N}$ y el conjunto de todos los enunciados de primer orden posibles. Esta biyección, además, puede ser calculada algorítmicamente, es decir, es posible programar una computadora de tal modo que, dado un número n cualquiera, la máquina calcule cuál es el enunciado Φ_n que le corresponde. Recíprocamente, dado Φ_n, el algoritmo calcula el número n que le corresponde. De manera similar a cómo funcionan los códigos de barras de los productos comerciales, se puede aceptar que cuando la computadora "lee" el número n lo interpreta inmediatamente como el enunciado Φ_n que le corresponde. En otras palabras, n y Φ_n son dos maneras diferentes de referirse el mismo objeto (de la misma forma que "Mi perro es rojo" y "My dog is red" son dos formas diferentes de escribir la misma proposición). En conclusión, los axiomas y teoremas de una teoría de primer orden constituyen, al mismo tiempo, un conjunto de secuencias finitas de símbolos de $\mathcal{L}_U$, y también un subconjunto de los números naturales. (Esta identificación entre números y enunciados no es original de este trabajo, sino que es uno de los pasos esenciales en la demostración de los teoremas de incompletitud de Gödel.)

Ahora bien, una teoría $\mathcal{T}$ es inconsistente si y sólo si existe un enunciado Φ_n tal que Φ_n y $\neg\Phi_n$ se deducen ambos de $\mathcal{T}$. Si se interpreta al conjunto de sus axiomas y teoremas como subconjunto de los naturales, una teoría $\mathcal{T}$ es consistente si y sólo si ese conjunto es no-contradictorio. Por consiguiente:

$\mathcal{T}$ es consistente $\leftrightarrow$ los axiomas y teoremas de $\mathcal{T}$ forman un conjunto no-contradictorio

El punto central que se quiere exponer es el siguiente. No sólo el concepto de "teoría consistente" es equivalente al de "conjunto no-contradictorio", sino que se trata del mismo concepto aplicado a los mismos objetos. Si "conjunto no-contradictorio" es, según el platonismo pleno, un concepto matemático platónico, entonces el concepto de "teoría consistente" también tiene que ser considerado como un concepto platónico. Afirmar lo contrario equivaldría a decir que el concepto de "número par" es platónico si se expresa en castellano o en inglés, pero que no lo es si se lo expresa en chino, simplemente porque este idioma usa símbolos diferentes de los de los otros dos.

Deducimos así que la idea según la cual la consistencia es una propiedad "prematemática" o "preplatónica" no sólo es una hipótesis *ad hoc*, sino que es, de hecho, contradictoria en sí misma. La paradoja expuesta en 4.3 no parece que pueda ser evitada mediante el argumento de que la consistencia no es un concepto matemático. Aunque con mucho menos detalle, una idea similar a la que se acaba de exponer fue sostenida por Stewart Shapiro.

> Como surge del programa de Hilbert, la consistencia es un concepto definido matemáticamente, aplicado a conjuntos de enunciados en un lenguaje formal. Los lenguajes formales son ellos mismos objetos matemáticos, que son estudiados mediante métodos matemáticos. En otras palabras, tal como la noción ha llegado a ser entendida en la matemática y en la filosofía contemporáneas, la consistencia es ella misma una noción matemática. Entonces, el platonismo pleno de Balaguer reduce la existencia a la consistencia, pero ésta es una noción matemática como cualquier otra. La circularidad amenaza. (Shapiro 2000: 253)

"Los lenguajes formales son ellos mismos objetos matemáticos, que son estudiados mediante métodos matemáticos", dice Shapiro en la cita, y ése es el corazón del argumento expuesto más arriba. Una teoría formal es un conjunto constituido por sucesiones finitas de símbolos de un lenguaje $\mathcal{L}$, y por consiguiente es en sí misma un objeto matemático. Su consistencia o inconsistencia es una propiedad matemática de ese conjunto, ya que la teoría es inconsistente si y sólo si el conjunto de sus axiomas y teoremas contiene dos sucesiones de símbolos, una de las cuales se obtiene de la otra concatenando delante de ella el símbolo de negación. En conclusión, si la consistencia de una teoría (en tanto propiedad matemática) no tuviera un correlato en el universo abstracto, entonces la tesis que sostiene el platonismo pleno sería falsa. Pero si la consistencia fuese una propiedad representable en el mundo abstracto, entonces, tal como se expuso en 4.3, el platonismo pleno sería autocontradictorio.

4.6. El Segundo Teorema de Incompletitud de Gödel

La principal motivación, y uno de los mayores atractivos, del platonismo pleno es que, aparentemente, consigue superar la objeción epistemológica. Sin embargo, como hemos adelantado en el capítulo anterior, existen argumentos que ponen en duda si realmente el platonismo pleno logra ese objetivo. A continuación, se exponen esos argumentos.

Comencemos diciendo que las pruebas de consistencia absoluta de las teorías matemáticas, para ser confiables, deberían emplear recursos (lógicos y metamatemáticos) que sean al menos tan seguros como los de la teoría cuya consistencia se quiere probar. De otro modo, la prueba resultaría inaceptable. Por ejemplo, sería inútil una prueba de la consistencia absoluta de la lógica de primer orden que empleara los recursos formales de la lógica de segundo orden, cuya consistencia no se conoce ni se sabe cómo podría probarse. Algo similar ocurre con la prueba de Gentzen de la consistencia de la aritmética, que apela a una teoría mucho más potente, como ZFC, de la cual no hay prueba de consistencia. Sin embargo, el Segundo Teorema de Incompletitud de Gödel establece un límite para las pruebas de consistencia de las teorías formales, ya que implica que necesariamente deberán emplearse los recursos formales de otra teoría (usualmente una teoría más potente), cuya consistencia a su vez será dudosa.

En consecuencia, no se cuenta con pruebas absolutas de consistencia para la mayoría de las teorías que emplean los propios matemáticos en todas las ramas importantes de esta disciplina. Así, para las teorías de conjuntos, del álgebra, del análisis y de la geometría, en el mejor de los casos, se dispone de pruebas relativas de consistencia. Este hecho tiene una consecuencia importante que afecta al platonismo pleno, y en especial a su estrategia para superar la objeción epistemológica: no resulta posible afirmar la existencia categórica de la gran mayoría de los objetos matemáticos, ya que no sabemos si las teorías que los postulan son consistentes o no. Por ejemplo, dado que no tenemos una prueba de la consistencia absoluta de ninguna teoría de conjuntos, no podemos afirmar categóricamente que existan, digamos, el conjunto vacío o el conjunto los números reales. Si nos atenemos a las pruebas relativas de consistencia disponibles, solamente estaremos en condiciones de realizar enunciados condicionales de existencia, como, por ejemplo, si existen los conjuntos postulados por la teoría ZFC, entonces, también existen los conjuntos postulados por la teoría NBG (incluidos, por supuesto, todos los conjuntos que no existen según ZFC). De esta manera, según el platonismo pleno, solamente podríamos conocer el universo de los objetos matemáticos de manera hipotética (con excepción de unos pocos, aquellos postulados por teorías, como la lógica de primer orden, cuya consistencia absoluta ha sido probada).

La consecuencia de ello, de acuerdo con el platonismo pleno, es que en la situación actual no solo desconocemos la mayor parte del universo matemático (lo cual sería esperable), sino también la existencia de la mayoría de los objetos postulados por las teorías matemáticas aceptadas. Así, el platonismo pleno más bien parece llevarnos al escepticismo acerca del conocimiento del universo matemático, ya que deberíamos suspender el juicio sobre la existencia de la mayoría de los objetos que habitan en dicho universo.

Esta situación, seguramente, reduce el atractivo del platonismo pleno, e incluso siembra dudas acerca de si realmente proporciona una solución satisfactoria a la objeción epistemológica. Podría decirse que en sentido estricto la resuelve exclusivamente para una situación ideal en la que la consistencia absoluta de todas las teorías matemáticas sea conocida con certeza.

Por otra parte, podría pensarse que el platonismo pleno al menos nos permite saber cuáles son los objetos que no existen en el universo matemático. En efecto, si se prueba que una teoría es inconsistente, podría inferirse que los objetos que postula dicha teoría no existen porque son imposibles. Sin embargo, esa conclusión, como lo muestra el caso de la teoría intuitiva de conjuntos de Cantor, no se sigue de la prueba de inconsistencia. Lo único que puede concluirse es que, si una teoría es inconsistente, al menos alguno de los objetos postulados por esa teoría no puede existir porque su existencia sería autocontradictoria. Pero, en primera instancia, no es posible determinar de una manera inequívoca cuáles son esos objetos. En el caso de la teoría de conjuntos de Cantor, el consenso de los matemáticos es que los conjuntos inconsistentes son aquellos que resultan "demasiado grandes", como el conjunto de todos los conjuntos, pero nadie duda, por ejemplo, de que los conjuntos finitos (y, por tanto, la aritmética finita) son consistentes. En general, dada una teoría inconsistente, queda por determinar cuáles son los objetos de esa teoría que no pueden existir.[33] Pero raramente serán todos los objetos postulados por la teoría, por el simple hecho de que una teoría inconsistente casi siempre contiene subteorías que son consistentes.[34] O, dicho de otra manera, un conjunto inconsistente de axiomas, casi siempre contiene algún subconjunto (no vacío) de tales axiomas que es consistente. La única excepción sería el caso en el que todos los axiomas de una teoría fueran autocontradictorias, pero no hay ejemplos en la historia de la matemática de tales teorías. Aparte de ese caso especial, no es tarea sencilla determinar cuáles son los axiomas de una teoría que son en sí mismos inconsistentes, o cuya conjunción resulta inconsistente, y, por consiguiente, cuáles son los objetos postulados por dicha teoría que no pueden existir.

4.7. Balance del platonismo pleno

El platonismo de objetos sostiene que los matemáticos, de algún modo, pueden percibir cuáles son los objetos abstractos que existen, y cuáles son los que no existen. Sin embargo, según se argumentó en el capítulo anterior, de existir objetos abstractos, estos serían incapaces de interactuar con el cerebro humano, por lo que resultaría imposible adquirir cualquier tipo de conocimiento de ellos. Esta objeción parece insalvable, y coincidimos con Balaguer cuando afirma que hace insostenible cualquier forma de platonismo de objetos, excepto el platonismo pleno, que es la única variante de platonismo que, al menos *a priori*, parece capaz de responder a esta objeción epistemológica. En efecto, dado que no es posible determinar mediante alguna forma de percepción cuáles objetos abstractos existen y cuáles no, las únicas alternativas razonables son, o bien postular que todos los que no son autocontradictorios existen (como hace el platonismo pleno), o bien postular que no existe ninguno (postura que, por supuesto, es incompatible con el platonismo).

---

[33] John von Neumann, por ejemplo, estableció el criterio según el cual "un conjunto es demasiado grande (esto es, incapaz de ser elemento) cuando y sólo cuando es equivalente al todo" (von Neumann 1923, trad. Ferreirós 2006: 290). Esto es, un conjunto es inconsistente cuando es biyectable con la clase universal.

[34] De hecho, contiene infinitas, ya que toda subteoría consistente contiene a su vez una subteoría (propia) que también es consistente.

No obstante, el platonismo pleno, por su parte, cae en una paradoja similar a la que Russell halló en la teoría de Frege. Tal como se mostró en 4.3, los postulados del platonismo pleno permiten demostrar la existencia de un objeto abstracto que niega la validez del propio platonismo pleno. La estrategia de Balaguer para evitar esta paradoja consiste en argumentar que la consistencia es un concepto prematemático o no-platónico. Pero esta idea, según se argumentó en 4.5, resulta ser, no sólo una hipótesis *ad hoc*, sino además una idea insostenible.

Se ha mostrado también que la visión que el platonismo pleno sostiene, en cuanto a que la matemática consiste en el estudio de teorías de primer orden, es incompatible con la práctica matemática, y con el hecho de que afirmaciones aritméticas como el Teorema de Goodstein sean consideradas unánimemente como verdaderas, a pesar de ser indecidibles con respecto a los axiomas estándar de la teoría de conjuntos. Esta visión presupone, además, la habilidad de determinar si una teoría de primer orden es consistente; una habilidad que, según el Segundo Teorema de Gödel los humanos no poseemos.

Finalmente, la inexistencia de pruebas absolutas de consistencia para la mayor parte de las teorías matemáticas implica que, si aceptamos el platonismo pleno, entonces no sería posible afirmar de manera categórica la existencia de objetos matemáticos tan básicos como el conjunto vacío o los números reales. Por otra parte, en tanto no se hayan encontrado inconsistencias en las respectivas teorías, tampoco podemos afirmar que los correspondientes objetos no existan. Así, según las propias premisas del platonismo pleno, la cuestión de la existencia o no de la gran mayoría de los objetos matemáticos resulta indecidible en la situación actual de la matemática. Por cierto, eso no implica que deba ser así para siempre, ya que en el futuro podrían encontrarse nuevas pruebas de consistencia para algunas teorías. Con todo, el ideal de que dispongamos de pruebas de consistencia absoluta para todas las teorías matemáticas resulta imposible a causa del Segundo Teorema de Gödel.

La conclusión a la que parecen apuntar todos estos argumentos es que el platonismo pleno no resulta sostenible como postura en la filosofía de la matemática; y, dado que el platonismo pleno hubiera sido la única variante del platonismo capaz de superar la objeción epistemológica, la conclusión final parece ser que el platonismo, considerado globalmente, no es aceptable.

5. El estructuralismo *ante rem*: descripción y crítica

5.1. Introducción al estructuralismo

El presente capítulo estará dedicado al análisis de la variante del platonismo conocida como estructuralismo *ante rem*; este análisis tiene como objetivo principal intentar determinar si las tesis principales de esta postura filosófica son compatibles con la práctica matemática. En el Capítulo 2 ya señalamos que el estructuralismo *ante rem* es la postura, elaborada por Stewart Shapiro (1997) y Michael Resnik (1997), que sostiene que los objetos que estudia la matemática son estructuras que existen *a priori* e independientemente de cualquier ejemplificación o instanciación que puedan tener en el mundo no-matemático.[35] Las ideas de Shapiro y de Resnik son esencialmente las mismas, pero están expresadas en lenguajes con vocabularios parcialmente diferentes. Así, por ejemplo, mientras Shapiro se refiere a la matemática como la ciencia de las estructuras, Resnik la llama la ciencia de los patrones (*patterns*). Aquí seguiremos la terminología de Shapiro, pero todas las afirmaciones y críticas que haremos sobre la versión del estructuralismo de Shapiro se aplican también, *mutatis mutandis*, a la versión de Resnik. Tomaremos, además, como representativa de la posición estructuralista la presentación más reciente de Shapiro (2006).

En la filosofía de la matemática actual existen otras posiciones que también se denominan estructuralistas, pero que, en primera instancia al menos, no parecen claramente comprometidas con el platonismo. Una de ellas es el *estructuralismo modal*, desarrollado por Geofrey Hellman, según el cual la matemática no trata acerca de estructuras realmente existentes, en el sentido de existentes en acto, sino acerca de estructuras *posibles*.[36] Los compromisos ontológicos de esta variedad del estructuralismo dependen de la posición que se adopte respecto de la metafísica de las modalidades, un tema del que no nos ocuparemos en esta tesis. En principio, la posición de Hellman es antirrealista en tanto no acepta la existencia independiente de las estructuras matemáticas.

[35] En la nota 13 del Capítulo 2 se indicaron las principales obras de estos dos autores. Señalemos aquí, además, la exposición sintética de Shapiro (2000).

[36] La primera presentación del estructuralismo modal la hizo Hellman (1989), que es un libro ampliamente citado. Otras formulaciones más breves, con algunos cambios y correcciones, pueden encontrarse en artículos posteriores, como Hellman (1996) (2001) y (2005).

Según el estructuralismo *ante rem*, los objetos matemáticos, tales como los números o los conjuntos, serían solamente posiciones determinadas en ciertas estructuras. Todas las propiedades matemáticamente relevantes de esos objetos serían relacionales, y no intrínsecas, porque provendrían de sus relaciones con las otras posiciones de esas mismas estructuras. Así, por ejemplo, el número 2 no existiría por sí mismo, sino que sería el "tercer lugar" (si se cuenta desde el 0) de la estructura "secuencia de los números naturales". Como afirma Shapiro:

> El número 2, así entendido, tiene muchas propiedades. Algunas de estas propiedades, como ser el número de puertas de mi comedor, son contingentes. Otras propiedades del número 2, como ser el número de padres de un humano normal, pueden ser biológicamente necesarias. Otras propiedades del número 2 son metafísicas y otras son matemáticas. Algunas de las propiedades matemáticas, como ser el primer número primo, son internas a la estructura de los números naturales. Otras, como ser el número de raíces complejas de −1, son externas a la estructura de los números naturales. Esto no es importante. Para el punto de vista en cuestión todas las propiedades de las que goza el número 2 surgen en virtud de que es una posición en la estructura de los números naturales. (Shapiro 2006: 121)

Estas estructuras, por otra parte, serían objetos abstractos, motivo por el cual el estructuralismo *ante rem* está sujeto, tal como discutimos en los capítulos 2 y 3, a la objeción epistemológica. Shapiro afirma explícitamente que

> El estructuralismo no es compatible con las versiones más crudas de la teoría causal del conocimiento. [...] Podemos obtener conocimiento de estructuras pequeñas mediante el contacto causal con sus instancias [...], pero no aprendemos sobre grandes estructuras de ese modo. Las grandes estructuras no están instanciadas en absoluto (en el mundo físico). (Shapiro 2006: 120)

Según la cita precedente, Shapiro admite que el estructuralismo *ante rem* no es compatible con las teorías causales del conocimiento, por lo que la objeción epistemológica queda, en cuanto a esta postura, totalmente sin respuesta. De todos modos, no es ésta la única objeción que se le puede plantear a esta postura, otras objeciones se analizarán en las páginas que siguen.

5.2. Una motivación

Se dijo en el Capítulo 2 que la pregunta relevante para la filosofía de la matemática no es si los objetos abstractos existen, sino si estos son los objetos de estudio de la matemática. De la misma forma, la pregunta relevante a los efectos del estructuralismo *ante rem* no es si las estructuras abstractas existen en sí mismas; la pregunta relevante es si, en caso de existir, esas estructuras son las que constituyen el objeto de estudio de la matemática. En las páginas que siguen se intentará argumentar que no es así. Sin embargo, antes de avanzar con las críticas al estructuralismo *ante rem* es oportuno hacer una observación. Tanto el estructuralismo *ante rem*, como también el platonismo pleno, parecen encontrar parte de su motivación en la búsqueda de una respuesta al llamado dilema de Benacerraf (1965), al que ya nos hemos referido en el Capítulo 2. Para explicar la idea, considérese el ejemplo siguiente.

En el contexto de la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel los números naturales son reducidos a conjuntos, sin embargo, esta reducción puede hacerse de maneras diferentes. La primera reducción propuesta históricamente se debe a Ernst Zermelo y establece que:

$$
\begin{aligned}
&0 = \emptyset \\
&1 = \{\emptyset\} \\
&2 = \{\{\emptyset\}\} \\
&3 = \{\{\{\emptyset\}\}\} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

En otras palabras, $0 = \emptyset$, $1 = \{0\}$, $2 = \{1\}$, $3 = \{2\}$, y así sucesivamente.

Una segunda definición, que es hoy en día la que se prefiere, se debe a John von Neumann y dice que:

$$
\begin{aligned}
&0 = \emptyset \\
&1 = \{\emptyset\} \\
&2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \\
&3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

En otras palabras, $0 = \emptyset$, $1 = \{0\}$, $2 = \{0, 1\}$, $3 = \{0, 1, 2\}$, y así sucesivamente.[37]

Estas reducciones permiten formular enunciados referidos a los números naturales que normalmente serían considerados sin sentido, como "$1 \in 3$" o "$2 \subseteq 5$". De acuerdo con la reducción de Zermelo, el enunciado "$1 \in 3$" es falso, mientras que según la reducción de von Neumann es verdadero. El dilema de Benacerraf plantea, entonces, preguntas tales como ¿Qué es realmente el número 2, es el conjunto $\{\{\emptyset\}\}$ o es el conjunto $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$? ¿El enunciado "$1 \in 3$" es verdadero, o es falso? Tanto el platonismo pleno como el estructuralismo *ante rem* ofrecen respuestas diferentes para estas cuestiones.

Ante la pregunta de si 2 es $\{\{\emptyset\}\}$, o si es $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, el platonismo pleno respondería que ambas opciones, dado que cada una de ellas es consistente, son correctas. Más exactamente, diría que existe una parte del mundo abstracto de las matemáticas en la que $2 = \{\{\emptyset\}\}$ y "$1 \in 3$" es falso, y también existe una parte en la que $2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ y "$1 \in 3$" es verdadero. El estructuralismo *ante rem*, en cambio, diría que el número 2 no es $\{\{\emptyset\}\}$, ni tampoco es $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, sino que es una posición en la estructura "secuencia de los números naturales", y que las reducciones de Zermelo y von Neumann son solamente dos instancias de esa estructura. En cuanto a la pregunta de si $1 \in 3$ o si $1 \notin 3$, esta postura diría que la pregunta es irrelevante porque la relación de pertenencia no es propia de la estructura.

Podemos plantear, por otra parte, la siguiente cuestión. Como se ha dicho más arriba, el estructuralismo *ante rem* considera a los ordinales de Zermelo y a los de von Neumann como instancias de la estructura "sucesión de los números naturales". Sin embargo, también podría considerarse que se trata de sendos ejemplos de otras dos estructuras diferentes, que podemos llamar respectivamente la "estructura de los ordinales de Zermelo" y la "estructura de los ordinales de von Neumann". En la primera, la propiedad relacional "$1 \in 3$" es falsa, mientras que en la segunda es verdadera. La pregunta, entonces, es en qué consiste una estructura o, más propiamente, cómo se identifica una estructura.

Los orígenes históricos del concepto de estructura (entendiendo el término en un sentido similar al que emplean Shapiro y Resnik) pueden hallarse en los trabajos sobre geometrías no euclidianas que, en la década de 1870, realizaron independientemente uno del otro Félix Klein y Eugenio Beltrami.[38]

---

[37] La reducción de los números a conjuntos se estudia con mayor detalle en el Capítulo 9.

[38] Shapiro (1997) dedica un extenso capítulo de su libro (el 5) a los precursores del estructuralismo, entre quienes incluye a Hilbert y Dedekind. Resnik (1997), en cambio, procede de manera más ahistórica.

En efecto, cuando Euclides formuló los cinco postulados de su geometría, es evidente que entendía que estos expresaban propiedades de ciertos objetos, tales como "puntos" o "rectas", que estaban claramente definidos previamente a la formulación de esos axiomas. Por el contrario, para Beltrami y Klein, quienes establecieron modelos para las geometrías no euclidianas, los significados de "punto" y "recta" no estaban especificados de antemano, por el contrario, ellos entendían a los términos como referidos a objetos cualesquiera, con la única restricción de que los postulados resultasen ser enunciados verdaderos. En otras palabras, para Klein y Beltrami los postulados de Euclides no se refieren a propiedades "internas" de objetos específicos previamente elegidos, sino a relaciones entre objetos que pueden ser elegidos libremente, siempre que esa elección implique que los postulados se conviertan en enunciados verdaderos. Es decir, los postulados, desde este punto de vista, actúan como definiciones implícitas.

Tal como se dijo en el Capítulo 2, otro origen histórico de la idea de estructura puede hallarse en la definición que da Georg Cantor para los conceptos, tanto de ordinal, como de cardinal de un conjunto. Para Cantor el ordinal de un conjunto es la "estructura subyacente" que se obtiene cuando se considera solamente el orden entre sus elementos, haciendo abstracción de la naturaleza interna de esos mismos elementos. Por ejemplo, el ordinal de $\mathrm{M} = \{0, 1, 2\}$ es, según la definición de Cantor, idéntico a $* < * < *$. Por otra parte, el cardinal es el resultado, según las propias palabras de Cantor, de un doble proceso de abstracción en el que no sólo se descarta la naturaleza de los elementos, sino también su orden. De este modo, el cardinal de $\mathrm{M} = \{0, 1, 2\}$ sería, para Cantor, idéntico a $* * *$. La nomenclatura que usaba Cantor para estos conceptos, según lo explica él mismo, refleja esta definición; el ordinal de un conjunto M era indicado como $\overline{\mathrm{M}}$, donde la barra indica el primer proceso de abstracción, mientras que el cardinal era $\overline{\overline{\mathrm{M}}}$, con una doble barra que indica el doble proceso de abstracción.

Una estructura es, entonces, una entidad que queda determinada por las relaciones entre ciertos objetos cuya naturaleza "intrínseca" es irrelevante. La estructura "sucesión de los números naturales" estaría entonces definida por la relación "es el sucesor de" y sus elementos, o posiciones, podrían representarse esquemáticamente de la siguiente manera: $*$, $Suc(*)$, $Suc(Suc(*))$,… Es decir, cada posición es el sucesor de la posición inmediatamente anterior.

La estructura "ordinales de Zermelo" sería, entonces, una subestructura de la estructura de los conjuntos finitos y quedaría definida por la propiedad de que cada posición tiene como único elemento a la posición anterior. La estructura "ordinales de von Neumann" sería también una subestructura de la estructura de los conjuntos finitos, pero quedaría definida por la propiedad de que cada posición tiene como únicos elementos a todas las posiciones anteriores.

Podemos formular, entonces, la siguiente conclusión: si una estructura queda determinada, no por los objetos (o posiciones) que la forman, sino por las relaciones que se definen entre estos objetos; entonces, dos estructuras definidas por propiedades relacionales diferentes deberán ser consideradas como estructuras diferentes. Como consecuencia, la estructura "sucesión de los números naturales", la estructura "ordinales de Zermelo" y la estructura "ordinales de von Neumann" serían tres estructuras diferentes. Nótese que el hecho de que la secuencia de conjuntos $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\{\emptyset\}\}$,… parezca ser una instancia de las dos primeras no contradice esta conclusión, porque, en tanto miembros de la estructura de Zermelo, tienen propiedades relacionales (como "$0 \in 1$") de las que carecen en tanto miembros de la sucesión de los números naturales. Por otra parte, en principio no parece haber contradicción alguna en que una misma estructura concreta sea instancia de dos estructuras abstractas diferentes.

5.3. El problema de la identidad

Aunque la principal crítica al estructuralismo *ante rem* se relaciona con la cuestión de la identidad de los objetos matemáticos.[39] En este sentido, conviene distinguir entre la identidad de las estructuras mismas y la identidad de las posiciones que forman las diferentes estructuras. Una estructura se identifica por sus propiedades intrínsecas y, de acuerdo con el principio de diferencia de los discernibles, si dos entidades difieren al menos en una propiedad, entonces, son diferentes. Así, por ejemplo, el hecho de que la "estructura de los números naturales" tenga una cantidad numerable de posiciones, mientras que la "estructura de los números reales" tenga una cantidad infinita no numerable de posiciones, es suficiente para concluir que se trata de estructuras diferentes.

En cuanto a los objetos que conforman las posiciones de cada estructura, en principio podría decirse que, tal como se ha mencionado en el Capítulo 2, para el estructuralismo *ante rem*, el número natural 2 es una posición en la estructura "sucesión de los números naturales", el número real 2 es una posición en la estructura "continuo de los números reales", el número complejo 2 es una posición en la

[39] En la nota 15 del Capítulo 2 hemos mencionado los principales trabajos críticos. Indiquemos, además, el de MacBride (2005).

“estructura de los números complejos” (por no hablar del número entero 2 o del número racional 2). Dado que esas estructuras son diferentes entre sí, entonces el número 2 natural sería un objeto diferente del número 2 real, que a su vez sería diferente del número 2 complejo, porque el 2 tiene propiedades relacionales diferentes en cada una de estas estructuras. Por ejemplo, tiene sucesor inmediato en la estructura de los números naturales, pero no lo tiene en la estructura de los números reales. Sin embargo, las condiciones de identidad son menos claras. De acuerdo con el estructuralismo *ante rem*, estos objetos no tienen propiedades intrínsecas, sino sólo propiedades relacionales. Tales propiedades están definidas solamente respecto de una estructura dada, es decir, son intrínsecas a cada estructura. Así, el número 2, como se dijo más arriba, tiene sucesor en la “estructura de los números naturales”, pero no en la “estructura de los números reales”, pero ¿esto es suficiente para decir que son dos objetos diferentes? Podría tal vez responderse que no, esto es, que los lugares de las estructuras no existen independientemente de ellas y que, por consiguiente, no habría posibilidad de plantear la pregunta acerca de su identidad.

De todos modos, Shapiro, posiblemente presionado por las críticas, acepta la “multiplicidad de números 2” como una consecuencia inevitable de su postura:

> En esta postura, la indeterminación permanente aparece en *el lenguaje*. La frase ‘número 2’ es sistemáticamente ambigua; denota una posición en la estructura de los números naturales, una posición en la estructura de los números enteros, una posición en la estructura de los números reales, una posición en la estructura de los ordinales, etc. Inclusive la frase ‘los números naturales’ es sistemáticamente ambigua; denota tanto a la estructura de los números naturales en sí, como a varias subestructuras de otras estructuras. Por ejemplo, ´los números naturales’ denota una subestructura de los números complejos. En consecuencia, la frase ‘el número natural 2’ es también ambigua. (Shapiro 2006: 128-129)

Pero esta ambigüedad sistemática va en contra, tanto de la práctica, como de la historia de la matemática, donde el número natural 2, el número entero 2, el número racional 2, el número real 2 y el número complejo 2 son considerados como uno y el mismo objeto, aunque en diferentes contextos. Las dos citas siguientes resumen la postura de Shapiro al respecto.

> Mi solución, si quieren llamarla así, era que la comunidad matemática ha *estipulado* que los números enteros no negativos de la estructura de los números reales son, de hecho, los números naturales. (Shapiro 2006: 125)

> Entonces, cuando dije […] que la comunidad matemática *estipula* que los ordinales finitos son los números naturales o que los números naturales son también números reales, debería haber dicho que los matemáticos (permanente o temporalmente) acuerdan estudiar un sistema particular que ejemplifica la estructura de los números naturales. […] Pero todavía arrojan luz sobre la estructura de los números naturales, ya que el sistema dado ejemplifica esa estructura. (Shapiro 2006: 129)

El problema de la identidad en el estructuralismo *ante rem* ha sido ampliamente debatido por diversos autores, incluido el propio Shapiro (2006), citado más arriba. Tanto es así que la sola descripción de los argumentos y contraargumentos, sostenidos tanto por los detractores como por los defensores de esta postura podrían abarcar un capítulo completo del presente trabajo. Sin embargo, el objetivo que se plantea aquí es aportar una idea nueva a la discusión. Para ello, como primera observación, nótese que la ambigüedad que conlleva el estructuralismo *ante rem* es mucho más profunda de lo que se ha mostrado más arriba. En efecto, el número 2, además de pertenecer a las estructuras ya mencionadas (la de los números naturales, enteros, etc.), pertenece también a otras infinitas estructuras que son todas claramente diferentes entre sí, entre las que se cuentan las siguientes:

1) La estructura de los números naturales pares.
2) La estructura de los números enteros pares.
3) La estructura de los números naturales primos.
4) La estructura de los números enteros primos.
5) La estructura de los números naturales que son pares y primos a la vez.
6) La estructura de los números enteros que son pares y primos a la vez.
7) La estructura de los ordinales de von Neumann hasta el cardinal $\aleph_0$.
8) La estructura de los ordinales de von Neumann hasta el cardinal $\aleph_1$ (así como $\aleph_2$, $\aleph_3$, y así sucesivamente).
9) La estructura de los ordinales de von Neumann hasta el cardinal $\aleph_\omega$.
10) La estructura de los ordinales de von Neumann hasta el cardinal $\aleph_{\omega+1}$ (así como $\aleph_{\omega+2}$, $\aleph_{\omega+3}$, y así sucesivamente).
11) La estructura de los números naturales escritos en base 2, o en binario.

Con respecto al último punto de la lista, podría argüirse que "los números naturales escritos en binario" no es una estructura diferente de la de "los números naturales"; sin embargo, los objetos de la primera estructura tienen propiedades relacionales de las que carecen los objetos de la segunda. En efecto, considérese a modo de ejemplo la relación "es un prefijo de", la cual está definida entre secuencias de símbolos. De este modo, abc es un prefijo de $abcde$, y también es un prefijo de $abceeg$, pero que no de $aabc$. Nótese que en la estructura de los números naturales escritos en lenguaje binario es verdadera la afirmación "10 es un prefijo de 100", mientras que en la estructura de los números naturales escritos en base diez es falso que "2 es un prefijo del 4". En otras palabras, la tercera posición de la estructura "los números naturales escritos en binario" es un prefijo de la quinta posición, mientras que la tercera posición de la estructura "los números naturales escritos en base 10" no *es* un prefijo de la quinta posición de esa estructura. Por otra parte, la relación "es un prefijo de" no puede ser definida en la "estructura de los números naturales" (a menos que se especifique una forma de escritura).

Como se dijo más arriba, una estructura queda determinada por las relaciones que existen entre sus posiciones, por lo que dos estructuras entre cuyas posiciones existen propiedades relacionales diferentes deben ser consideradas como estructuras diferentes. Concluimos así que "la estructura de los números naturales", "la estructura de los números naturales escritos en binario" y "la estructura de los números naturales escritos en base 10" son tres estructuras diferentes. En consecuencia, si extendemos esa diferencia a sus objetos constituyentes, el "2 escrito en binario" sería un objeto diferente del "2 como número natural", y del "2 como número natural escrito en base 10", ya que todos ellos tienen propiedades relacionales diferentes con respecto a las demás posiciones de las estructuras a las que pertenecen.

Podría objetarse que la especificación de que la estructura del número sea en binario (o en base 10) refiere a una propiedad extramatemática, o bien a una propiedad matemática irrelevante. Sin embargo, la relación "ser prefijo de" (que presupone la especificación del modo en que los números están escritos) es una propiedad matemática que se estudia, por ejemplo, en el contexto de la teoría de autómatas finitos, y que asimismo aparece en la demostración de ciertas generalizaciones del Teorema de Incompletitud Gödel.[40] Por tanto, la estructura de los números naturales escritos en binario es, con toda legitimidad, una estructura matemática. De la misma forma, de los

[40] Véase, por ejemplo, Martínez y Pineiro (2009), cap. 9, donde esta cuestión se analiza con más detalle.

postulados del estructuralismo *ante rem* parece deducirse que “dos”, “II”, “*deux*” y “*two*” no son solamente diferentes maneras de escribir al número 2, sino que son objetos diferentes, ya que pertenecen a estructuras con propiedades relacionales diferentes. Una situación similar es descripta por Jorge Luis Borges en su cuento *Funes, el Memorioso.*

> No sólo le costaba comprender [a Funes] que el símbolo genérico *perro* abarcara tantos individuos dispares de diversos tamaños y diversas formas; le molestaba que el perro de las tres y catorce (visto de perfil) tuviera el mismo nombre que el perro de las tres y cuarto (visto de frente). (Borges 1944: 115)

Análogamente, un hipotético matemático estructuralista debería, tal como le sucede a Funes, sorprenderse de que la comunidad matemática estipule que se llame con el nombre común de “número 2” a una cantidad infinita de objetos diferentes, cada uno de los cuales pertenece a una estructura diferente, todas ellas definidas a partir de propiedades relacionales diferentes. Ese matemático estructuralista podría, por ejemplo, preguntarse por qué la comunidad matemática considera que el tercer elemento de la estructura de “los ordinales de von Neumann hasta el cardinal $\aleph_1$” (estructura que tiene una cantidad no numerable de posiciones) es considerado idéntico al primer elemento de la estructura de “los números primos positivos” (que tiene, en cambio, una cantidad numerable de posiciones).

De todo lo expuesto podemos extraer dos conclusiones. La primera, surge de observar que la forma de escribir los números es una propiedad contingente, ya que depende de la historia y de la evolución de la cultura. El sistema de numeración posicional podría no haberse desarrollado nunca, así como podrían haberse creado formas de escritura basadas en principios diferentes. Por tanto, si, como hemos argumentado, la estructura de “los números naturales escritos en binario” es diferente de la estructura de “los números naturales escritos en base diez”, y si esta diferencia se basa en circunstancias contingentes que suceden dentro del espaciotiempo, entonces las estructuras que postula el estructuralismo *ante rem* no pueden ser objetos abstractos.

La segunda conclusión se refiere al problema de la identidad. Como se ha dicho más arriba, la comunidad matemática, a lo largo de los siglos y de las diferentes culturas, ha aceptado que el primer número primo positivo (o la primera posición en la estructura de los números primos positivos) es el mismo objeto que el tercer número natural, y así sucesivamente con una cantidad infinita de estructuras diferentes. Ante esta circunstancia, el principio de parsimonia nos lleva a concluir que la mejor explicación para esta convergencia de criterios es que todas esas posiciones son en realidad uno y el mismo objeto.

Más aún, podríamos sostener que el número 2 es un objeto cuya existencia es anterior a la existencia de las estructuras que lo contienen, las cuales relacionan al 2 con otros objetos igualmente preexistentes a esas mismas estructuras. Esta afirmación, por otra parte, es consistente con la historia de la matemática. En efecto, si se piensa en la estructura de los números naturales, implícitamente se está aceptando la existencia de un conjunto que es infinito en acto, un concepto que recién fue aceptado por los matemáticos a fines del siglo XIX, después de severas resistencias dentro de la propia comunidad matemática.

5.4. Las funciones de variable real

En esta sección se intentará proponer nuevos argumentos que muestran que el estructuralismo *ante rem* tiene consecuencias incompatibles con la práctica matemática. La tesis que se quiere defender aquí es la siguiente: aun cuando se rechazaran los argumentos de la sección anterior, la visión de la matemática que propone el estructuralismo *ante rem* sería, de todos modos, incapaz de dar cuenta de toda la riqueza de conceptos que los matemáticos utilizan en su trabajo diario.

En lo que sigue se mostrará una situación que ejemplifica esta tesis. El ejemplo se refiere al cálculo diferencial, rama de la matemática que, entre otros temas, estudia las funciones cuyo dominio y codominio son subconjuntos de los números reales. Es decir, funciones unarias $f: A \subseteq \mathbb{R} \to B \subseteq \mathbb{R}$.

Si aceptamos el estructuralismo *ante rem*, el conjunto de todas las funciones de A en B sería una estructura, es decir, cada una de estas funciones sería una posición en una estructura abstracta, la cual sería el verdadero objeto de estudio del cálculo diferencial. Todas las propiedades matemáticamente relevantes de esas posiciones serían propiedades relacionales referidas a las demás posiciones de esa misma estructura. Al analizar las consecuencias de los postulados del estructuralismo *ante rem*, una de las primeras dudas que surge es si el objeto de estudio del cálculo diferencial consiste en una sola estructura, o en una cantidad infinita de ellas. Por ejemplo, ¿la estructura que forman las funciones $f: [0,1] \to \mathbb{R}$, cuyo dominio es el intervalo cerrado $[0,1]$ y cuyo codominio es el conjunto de todos los números reales, es la misma que la estructura formada por todas las funciones $f: [0,1] \to [0,1]$, cuyo dominio y codominio es el intervalo cerrado [0,1]? Para responder esta pregunta conviene analizar con detalle qué es una función. La definición corrientemente aceptada de función se enuncia dentro la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel de la manera que se indica a continuación. Si A y B son dos conjuntos cualesquiera, una función $f: A \to B$ es un conjunto de pares ordenados (x, y) que cumple las dos condiciones siguientes:

a) Si $(x, y) \in f$ entonces $x \in A$ e $y \in B$.
b) Para todo $x \in A$ existe un único $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$.

Conviene aclarar que el enunciado "$(x, y) \in f$" suele escribirse como "$f(x) = y$", que A se llama el *dominio* de f, y que B se llama el *codominio* de f.

Se dice que una función $f: A \to B$ es *inyectiva* si y sólo si se cumple la siguiente condición: Si $(x, y) \in f$ y $(x', y) \in f$ entonces $x = x'$. Por otra parte, una función f es *sobreyectiva* si y sólo si para todo $y \in B$ existe algún $x \in A$ tal que $(x, y) \in f$. Finalmente, una función es *biyectiva* si y sólo si es al mismo tiempo inyectiva y sobreyectiva; es decir, f es biyectiva si y sólo si para todo $y \in B$ existe un único $x \in A$ tal que $(x, y) \in f$. Es importante destacar que "inyectiva", "sobreyectiva" y "biyectiva" son propiedades matemáticamente muy relevantes, y muy estudiadas al analizar funciones (de hecho, el concepto de función biyectiva, o de correspondencia uno a uno, ya fue mencionado en el capítulo anterior).

Establecidas estas definiciones se puede abordar la pregunta de si la "estructura de las funciones $f: [0,1] \to \mathbb{R}$" es la misma que la "estructura de las funciones $f: [0,1] \to [0,1]$". Para ello consideremos en la primera estructura la función $f_1: [0,1] \to \mathbb{R}$ que está definida por la fórmula $f_1(x) = x^2$. En otras palabras, f_1 está definida al modo conjuntista de la siguiente forma:

$$f_1 = \{(x, y) : x \in [0,1] \ \wedge \ y \in \mathbb{R} \ \wedge \ y = x^2\}$$

Es fácil probar que f_1 no es sobreyectiva, ya que no existe ningún $x \in [0,1]$ tal que $(x, 2) \in f_1$. Por otra parte, consideremos en la segunda estructura la función $f_2: [0,1] \to [0,1]$ definida por $f_2(x) = x^2$. Al modo conjuntista, f_2 se define así:

$$f_2 = \{(x, y) : x \in [0,1] \ \wedge \ y \in [0,1] \ \wedge \ y = x^2\}$$

La función f_2 es sobreyectiva, ya que, para todo $y \in [0,1]$ se cumple que $(\sqrt{y}, y) \in f_2$. Puesto que f_2 posee una propiedad de la que f_1 carece (la primera es sobreyectiva, mientras que la segunda no lo es), entonces f_1 y f_2 son objetos matemáticos diferentes (si ambos fueran el mismo objeto tendrían entonces exactamente las mismas propiedades). Sin embargo, sucede que los conjuntos de pares ordenados que definen a f_1 y f_2 son uno y el mismo. En efecto, según el axioma de extensionalidad de la teoría de Zermelo-Fraenkel, dos conjuntos son iguales si y sólo si tienen exactamente los mismos elementos; y, en efecto, puede probarse que cada par ordenado que pertenece a f_1 pertenece también a f_2, y viceversa.

Una pregunta que surge naturalmente es cómo puede suceder que dos conjuntos iguales tengan, sin embargo, propiedades diferentes (uno representa una función sobreyectiva, y el otro no). La solución a esta aparente paradoja es que f_1 y f_2 son iguales en tanto conjuntos, pero diferentes en tanto funciones. Es decir, a diferencia de lo que se sostiene habitualmente, el conjunto de pares ordenados no caracteriza totalmente a la función, sino que su dominio y su codominio (los conjuntos A y B) son también parte fundamental de la definición. Para definir completamente una función, no basta con indicar sus pares ordenados, sino que también debe establecerse qué conjunto es A y qué conjunto es B. Para ser idénticas, dos funciones deben tener el mismo dominio y el mismo codominio, además de estar formadas por los mismos pares. Por tanto, aunque f_1 y f_2 contienen los mismos pares ordenados (y por ende son dos conjuntos iguales) difieren, en cambio, en su codominio (y por lo tanto son dos funciones diferentes).

Se deduce de lo dicho más arriba que la "estructura de las funciones $f: [0,1] \to \mathbb{R}$" es diferente de la "estructura de las funciones $f: [0,1] \to [0,1]$", porque si fuesen la misma estructura, entonces la "posición f_1" de la primera sería idéntica a la "posición f_2" de la segunda, pero esto es falso según se acaba de ver.

En resumen, para cada A y para cada B tenemos una estructura diferente. Con más precisión, para cada par de conjuntos (A, B), con $A \subseteq \mathbb{R}$ y $B \subseteq \mathbb{R}$, existe una "estructura de las funciones $f: A \to B$" que le es propia y característica. Por tanto, para el estructuralismo *ante rem*, el cálculo diferencial no estudiaría una estructura sino una cantidad infinita no numerable de ellas.

Otro argumento a favor de esta diferenciación de las estructuras consiste en que, en la "estructura de las funciones $f: [0,1] \to [0,1]$" existen infinitas funciones que son simultáneamente continuas y biyectivas, mientras que en la "estructura de las funciones $f: [0,1] \to \mathbb{R}$"no existe ninguna función con esas características.

Considérese ahora la operación de composición de funciones, que se define de la siguiente manera. Si $f: A \to B$ y $g: B \to C$ son dos funciones, su composición, que se indica $g \circ f$, se define como la función de A en C tal que para todo $x \in A$ vale que $g \circ f(x) = g(f(x))$. En otras palabras, $(x, y) \in g \circ f$ si y sólo si existe algún $z \in B$ tal que $(x, z) \in f$ y $(z, y) \in g$.

Es importante observar que si A, B y C son tres conjuntos diferentes entonces las tres funciones f, g y $g \circ f$ existen en estructuras diferentes. Por tanto, existe una operación que sólo puede ser realizada entre elementos de estructuras diferentes, y cuyo resultado existe en una tercera estructura. Como la operación de composición de funciones no puede definirse en el contexto de una estructura específica, no habría, aparentemente, manera de que esta operación pueda ser definida consistentemente en el contexto del estructuralismo *ante rem*. Se muestra así un primer ejemplo de una operación matemática importante que escapa a la visión de la matemática que propone el estructuralismo *ante rem*.

Obsérvese, por otra parte, que cada función es en sí misma una estructura, ya que es un conjunto formado por pares ordenados. A su vez, los pares ordenados son asimismo estructuras, porque en el contexto de la teoría de Zermelo-Fraenkel, como ya se mencionado, se los define también como conjuntos. El estructuralismo *ante rem* afirma que las posiciones de una estructura no tienen propiedades intrínsecas; pero si estas posiciones son también estructuras, entonces tales propiedades intrínsecas son inevitables. De hecho, no queda claro que siempre pueda evitarse una regresión infinita en la cual una estructura esté formada por posiciones, que son a su vez estructuras, que a su vez estén formadas por posiciones que sean estructuras, y así sucesivamente.

En conclusión, no parece que puedan ofrecerse condiciones de identidad para los objetos matemáticos en el marco del estructuralismo *ante rem*. Por consiguiente, aceptando la idea de Quine, según la cual no podemos admitir la existencia de entidades que no seamos capaces de identificar ("*no entity without identity*", Quine, 1969: 23), el estructuralismo *ante rem* no proporciona una ontología adecuada para la matemática, ya que no permite determinar cuáles son los objetos matemáticos que realmente existen.

Finalmente, si, según afirma el estructuralismo *ante rem*, todas las propiedades matemáticas relevantes de un objeto son relacionales y están definidas en el contexto de la estructura a la que ese objeto pertenece, ¿cómo pueden entenderse, desde este punto de vista, el concepto de "función inyectiva"?

Recuérdese que una función $f: A \to B$ es inyectiva si y sólo si se cumple que si $(x, y) \in f$ y $(x', y) \in f$ entonces $x = x'$. Es decir, la inyectividad es, en principio, una propiedad intrínseca de la función, ya que no está definida a partir de sus relaciones con otras funciones de la estructura a la que pertenece. Sin embargo, un matemático estructuralista buscaría una definición alternativa de la inyectividad, que la transformara en una propiedad relacional. Tal definición alternativa existe porque puede demostrarse que una función $f: A \to B$ es inyectiva si y sólo si existe un subconjunto $C \subseteq B$ y una función $g: C \to A$ tal que $g \circ f: A \to A$ es la función identidad de A, es decir, la función $id_A: A \to A$ que cumple que $id_A(x) = x$.

De este modo, la inyectividad queda definida como una propiedad relacional, sin embargo, esto no salva la situación, porque la inyectividad de f queda definida por su relación con dos objetos de sendas estructuras diferentes: la función g en la estructura de las funciones de A en C y la función identidad en la estructura de las funciones de A en A. En realidad, no existe forma de definir la inyectividad de una función f como una propiedad que relacione a f con otros elementos de la misma estructura a la que pertenece. Por tanto, el estructuralismo *ante rem* no permite describir adecuadamente las propiedades elementales de una función, que a su vez uno de los conceptos más importantes de la matemática.

5.5. Balance del estructuralismo *ante rem*

Entre los objetos que estudia la matemática, independientemente de que estos sean abstractos o concretos, hay, en efecto, estructuras. La teoría de grupos, por ejemplo, es una rama de la matemática que se dedica esencialmente al estudio de la estructura de grupo. De hecho, en esa teoría existe un teorema muy conocido que suele enunciarse diciendo que “existe esencialmente un único grupo de cinco elementos”. La palabra “esencialmente” significa en ese contexto que todos los grupos de cinco elementos son isomorfos, es decir, que todos son instancias de la misma estructura. Es precisamente a esa estructura a la que se refiere el teorema, y no a los casos particulares (a los sistemas de objetos) que la ejemplifican.

Los argumentos expuestos en este capítulo sugieren que el estructuralismo *ante rem* cae en el error de sostener que todos los objetos que estudia la matemática están definidos sobre la base de las estructuras a las cuales pertenecen, las cuales preceden ontológicamente a sus instancias. Por el contrario, en la práctica matemática, las instancias siempre preceden a las estructuras generales, y sugieren el modo en que estas deben ser definidas. La estructura genérica de grupo, por ejemplo, sólo fue definida después de que se reconocieran las propiedades de grupos específicos.

Por otra parte, es verdad que muchas de las propiedades de un objeto matemático son relacionales, e incluso es posible que todas las propiedades matemáticamente relevantes de los números naturales sean de ese tipo. Sin embrago, como se ha visto en el caso de las funciones, es falso que todas las propiedades relevantes de todos los objetos matemáticos sean relacionales o, más exactamente, que provengan de sus relaciones con objetos con los que comparten la misma estructura. Concluimos así que la ontología que propone el estructuralismo *ante rem* es insuficiente para dar cuenta de la riqueza de los objetos que estudia la práctica matemática, ya que existen conceptos y propiedades que no pueden enmarcarse en la visión de la matemática que sostiene esta postura. En suma, la matemática se ocupa de estudiar estructuras, pero ese no es su único objeto de estudio, por lo cual no puede caracterizarse a la matemática en toda su generalidad como la ciencia de las estructuras, como han hecho explícitamente Resnik y Shapiro.

6. El ficcionalismo matemático

6.1. Introducción al ficcionalismo

El platonismo, a cuyo análisis estuvieron dedicados los capítulos anteriores, es, dentro de la filosofía de la matemática, una postura claramente realista. Dicho brevemente, en la filosofía de la matemática, como en cualquier otra disciplina filosófica, las posturas realistas son aquellas que sostienen que los objetos que estudia la matemática existen objetivamente, independientemente de la mente humana. El ficcionalismo matemático, al que llamaremos simplemente ficcionalismo, postura que será estudiada en este capítulo y en el siguiente, se enmarca, por el contrario, dentro del antirrealismo matemático. Esto se debe a que el postulado principal del ficcionalismo es que los objetos que estudia la matemática no existen. Para el ficcionalismo los términos singulares del lenguaje matemático, tales como "2" o "$\{\emptyset\}$" no hacen referencia a ningún objeto existente.

Este punto de vista fue propuesto por primera vez en Hartry Field (1980), en parte como una reacción al platonismo, que en ese momento todavía era la postura dominante en la filosofía de la matemática; y desde su presentación ha ganado un número importante de adherentes. Por ejemplo, entre otros, Mary Leng, Mark Balaguer, Gideon Rosen, Stephen Yablo y Otávio Bueno.[41] Tanto es así que hoy en día el ficcionalismo ha llegado a transformarse en la postura antirrealista más ampliamente defendida dentro de la filosofía de la matemática. Debido a esta circunstancia, el análisis de las posturas antirrealistas se centrará exclusivamente en el ficcionalismo matemático, y sólo se hará una breve mención, en la sección siguiente, a otras posturas antirrealistas más antiguas, que no tienen particular vigencia en la actualidad

El ficcionalismo sostiene, por ejemplo, que el número 2 y el número 4 no existen. Esto lleva naturalmente a plantear dos cuestiones. La primera es cuál debería ser el valor de verdad de un enunciado como "$2 + 2 = 4$", el cual, según el ficcionalismo, se refiere a una relación entre entes que no existen. ¿Ese enunciado debe considerarse verdadero (como habitualmente sucede)? ¿O, por el contrario, es falso? ¿O carece de

[41] Además de las obras de Balaguer y Leng citadas en este capítulo, véanse Bueno (2009), Burguess & Rosen (1997), Rosen (1990) y Yablo (2005), entre otros.

valor de verdad? Por otra parte, ¿cuál es el criterio que permite afirmar, si es que ese fuera el caso, que "$2 + 2 = 4$" tiene un valor de verdad diferente que "$2 + 2 = 5$"?

La segunda cuestión se refiere a las aplicaciones prácticas de la matemática, en especial a las ciencias empíricas. La pregunta sería ¿es compatible la hipótesis de que los números no existen con el hecho de que, en física, por ejemplo, se usen números para expresar relaciones entre masas o cargas eléctricas?

Así como el platonismo admite diferentes variantes, dependiendo de cuáles sean exactamente los objetos matemáticos cuya existencia se postula, el ficcionalismo admite también diferentes matices, dependiendo de cuáles sean las respuestas que se propongan para las dos cuestiones planteadas más arriba. Más exactamente, es posible distinguir tres formas del ficcionalismo, el ficcionalismo original propuesto por Hartry Field, el ficcionalismo en la versión de Mary Leng y, finalmente, el ficcionalismo de Mark Balaguer. El presente capítulo estará dedicado a describir estas tres posturas, mientras que en el siguiente se elaborarán las críticas que creemos que pueden planteárseles.

6.2. Realismo y antirrealismo matemático

Antes de abordar la descripción de las diferentes variantes del ficcionalismo, resulta interesante analizar cómo se ubica esta postura dentro del marco general del realismo y el antirrealismo matemático. Para ello nos basaremos en la clasificación que se presenta en Balaguer (1998). En ese texto el autor clasifica primeramente a las posturas de la filosofía de la matemática en platonistas y antiplatonistas. Entre las primeras, por supuesto, se incluyen las variantes del platonismo mencionadas en los capítulos previos: el platonismo de objetos, el platonismo pleno y el estructuralismo. En cuanto a las posturas antiplatonistas, Balaguer las divide, a su vez, en realistas y antirrealistas.

> La división principal en el campo antiplatonista es entre *realistas* y *antirrealistas*. Los primeros sostienen que, aunque nuestras teorías matemáticas no describen objetos abstractos, sí describen objetos concretos (es decir, espaciotemporales). Los últimos sostienen que nuestras teorías matemáticas no tratan acerca de ningún objeto en absoluto, es decir, que esas teorías son fácticamente vacías. (Balaguer 1998: 11)

Respecto de las posturas que son simultáneamente antiplatonistas y realistas, Balaguer afirma que estas, a su vez, se dividen, en aquellas que afirman que la matemática estudia objetos físicos (o bien propiedades físicas de objetos concretos), y las que afirman que la matemática estudia objetos mentales. Entre las primeras se encuentra, por ejemplo, la postura de John Stuart Mill, quien afirmaba que la matemática es la más general de las ciencias naturales, ya que estudia las propiedades que son comunes a todos los objetos (plantas, rocas, animales, etc.). Según este punto de vista, la afirmación "$2 + 2 = 4$" dice que, si tomamos dos objetos cualesquiera, y agregamos otros dos objetos, siempre obtenemos cuatro objetos en total.[42]

Más allá de lo que afirma Balaguer, es interesante observar que las ideas de Mill se desarrollaron en una época en la que, según se expuso en el capítulo 3, la matemática estaba, en efecto, fuertemente asociada a la descripción de fenómenos físicos, o de las propiedades físicas de los objetos concretos, de modo que la postura de Mill fue, hasta fines del siglo XIX, la concepción dominante en la filosofía de la matemática. Esta observación, por otra parte, intenta mostrar que la filosofía de la matemática está fuertemente condicionada por la historia de esta ciencia.

Para ver otro ejemplo de esta última circunstancia, consideremos una vez más el dilema de Benacerraf, que, como ya se ha dicho en el capítulo anterior, plantea la pregunta de si el número 2 es el conjunto $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, o el conjunto $\{\{\emptyset\}\}$. Es notable que esta pregunta sólo pudo haber sido planteada después de la primera década del siglo XX, cuando el estilo conjuntista comenzó a predominar en el lenguaje matemático. En el siglo III a.C., por el contrario, durante el apogeo de la matemática clásica griega, se consideraba que los números eran objetos geométricos. En este contexto, el número 4, por ejemplo, era un segmento cuya longitud era cuatro veces la de un segmento arbitrariamente elegido como unidad, aunque al mismo tiempo era también un cuadrado de lado 2. Por lo tanto, en aquella época el dilema de Benacerraf podría haber consistido en preguntarse si el número 4 es una longitud o una superficie.

Volviendo a la clasificación de Balaguer, entre las posturas realistas no platonistas que afirman que la matemática estudia objetos mentales, el autor menciona al *psicologismo*, postura que sostiene que la matemática habla de ideas. Así, por ejemplo, "$2 + 2 = 4$" sería una afirmación que habla de la relación entre ciertas ideas que existen en la mente humana. Balaguer afirma asimismo que el psicologismo también puede clasificarse como una postura antirrealista, ya que los objetos mentales no existen independientemente de los seres humanos.

---

[42] Aquí no nos ocuparemos de analizar los detalles de la posición de Mill. Para una exposición sintética de su filosofía de la matemática véase Shapiro (2000): 91-102.

En cuanto a las posturas antirrealistas, Balaguer sostiene que la única defendible es el ficcionalismo, que el autor define, coincidentemente con lo dicho más arriba, como el punto de vista según el cual los objetos matemáticos no existen.

> (a) no hay tal cosa como objetos matemáticos, y en consecuencia, (b) los términos matemáticos singulares son vacíos. (Balaguer 1998: 12)

Sin embargo, no es ésta la única postura antirrealista posible. Otra postura de este tipo que Balaguer incluye en su clasificación es el *convencionalismo* que el autor define como el punto de vista que sostiene que las definiciones de los objetos matemáticos son convencionales, y que un enunciado como "$2 + 2 = 4$" es analíticamente verdadero, ya que su verdad surge como consecuencia de las definiciones convencionalmente adoptadas para los símbolos "2", "4", "+" e "=".

Otra postura antirrealista es el *deductivismo*, que sostiene que todo enunciado matemático es de la forma "La oración θ se deduce del sistema de axiomas A", que se simboliza como "$A \vdash \theta$". Un ejemplo de enunciado matemático verdadero sería, entonces, "$AP_1 \vdash (2 + 2 = 4)$", donde AP_1 designa a los axiomas de Peano de primer orden. En este contexto, el enunciado "$2 + 2 = 4$" sería, o bien falso, si se lo interpreta como "$\vdash (2 + 2 = 4)$", que significa que "$2 + 2 = 4$" es universalmente válido; o bien "$2 + 2 = 4$" no sería un enunciado matemático, porque no tiene la forma "$A \vdash \theta$".

Balaguer también le atribuye carácter antirrealista al *formalismo* de Hilbert, que el autor considera casi indistinguible del deductivismo (aunque en el capítulo 4 de este trabajo se ha cuestionado que la filosofía de Hilbert fuese antirrealista). Asimismo, Balaguer le atribuye a Wittgenstein una postura antirrealista cercana al convencionalismo y al deductivismo. El intuicionismo de L.E.J. Brouwer puede ser considerado también como parte del antirrealismo matemático.[43]

Antes de cerrar esta sección, es importante señalar que no todos los filósofos de la matemática estarían de acuerdo con la clasificación propuesta por Balaguer. Se dijo más arriba que este autor hace una primera división entre posturas platonistas y antiplatonistas, y a estas últimas, a su vez, las divide en realistas y antirrealistas. Otros

---

[43] La interpretación de las filosofías de la matemática de Brouwer, Hilbert y Wittgenstein ha suscitado debates en los cuales no es necesario entrar aquí, ya que esas filosofías no serán objeto de estudio en esta tesis. Casi todos los libros introductorios a la filosofía de la matemática se ocupan del formalismo y del intuicionismo matemáticos, entre otros, los de Shapiro (2000), Bostock (2009) y Linnebo (2017). Para una selección de textos originales comentados véase Mancosu (1998) y para una evaluación más detallada de las dos posiciones véase Shapiro (2005), capítulos 8-11.

filósofos, por el contrario, consideran que los objetos matemáticos, si es que existen, sólo pueden ser objetos abstractos. Para estos autores, entonces, "platonismo" y "realismo matemático" son expresiones sinónimas, por lo que sería contradictorio hablar de posturas que sean al mismo tiempo antiplatonistas y realistas. Como puede verse en las citas siguientes, este es el caso, tanto de Hartry Field, como de Mary Leng.

> El término 'entidad abstracta' puede no ser enteramente claro, pero algo que sí parece claro es que presuntas entidades tales como números, funciones y conjuntos son abstractos –es decir, serían abstractos si existieran. (Field 1980: 1)

> Usaré el nombre de realismo matemático de manera intercambiable con el nombre 'platonismo', donde platonismo es la postura según la cual debemos creer que los objetos matemáticos son *abstractos*. (Leng 2010: 18)

Esta observación es de interés, porque en las tres secciones siguientes analizaremos respectivamente el ficcionalismo de Hartry Field, el de Mary Leng y el de Mark Balaguer. Por lo tanto, se debe tomar en cuenta que cuando los dos primeros dicen que los objetos matemáticos no existen, en realidad están diciendo que no existen en tanto objetos abstractos, ya que descartan *a priori* cualquier otro tipo de existencia para esta clase de objetos. En cambio, cuando Balaguer dice que los objetos matemáticos no existen está diciendo que no existen como objetos abstractos, ni tampoco como objetos concretos.

6.3. El ficcionalismo de Hartry Field

El ficcionalismo, como ya se dijo, sostiene que los objetos que estudia la matemática no existen, y que todos los enunciados matemáticos son fácticamente vacíos. En la obra donde describe por primera vez esta postura, Field dice de manera categórica: "Niego que existan los números, funciones, conjuntos o cualquier otro ente similar" (Field 1980: 1). Por otra parte, como ya se indicó, al clasificar las diferentes posturas ficcionalistas se adoptará el criterio de distinguirlas según cuáles sean las respuestas que estas posturas den a las dos preguntas siguientes. La primera pregunta es: ¿qué puede afirmarse acerca del valor de verdad de un enunciado como "$2 + 2 = 4$"? La otra pregunta dice: ¿cómo puede compatibilizarse la inexistencia de los entes matemáticos con el hecho de que esta ciencia tenga aplicaciones concretas en ciencias empíricas tales como la física, la química o la biología?

El análisis de esta última pregunta, a su vez, conduce a la discusión del llamado "argumento de la indispensabilidad de la matemática", formulado, en términos muy semejantes, por Quine (1976) y Putnam (1979). Este argumento afirma que el hecho de que la matemática sea indispensable para desarrollar las teorías de las ciencias empíricas aporta una evidencia muy fuerte a favor de la hipótesis de que los objetos matemáticos existen. De acuerdo con este argumento, la referencia a (o la cuantificación sobre) entidades tales como números, funciones o conjuntos es indispensable para poder desarrollar nuestras mejores teorías científicas y nos compromete ontológicamente con la existencia de tales entidades.[44]

Para responder a esta objeción, en Field (1980), obra muy descriptivamente titulada *Science Without Numbers*, el autor intenta demostrar que, contrariamente a lo que sostienen Quine y Putnam, la matemática no es indispensable para las ciencias empíricas y que sería posible, por ejemplo, hacer física sin matemáticas. A modo de argumento a favor de esta tesis, Field expone lo que, según él sostiene, es una formalización de la teoría de la gravitación de Newton que no apela a conceptos matemáticos. En el próximo capítulo, que estará dedicado a las críticas al ficcionalismo, se analizará si esta reformulación de la teoría de la gravitación es exitosa. En resumen, la respuesta de Field a la pregunta de cómo se compatibiliza la inexistencia de las entidades matemáticas con las aplicaciones de la matemática en la física (y otras ciencias fácticas) consiste en afirmar que el empleo de la matemática no es realmente necesario para la física; la matemática es solamente una herramienta útil, pero no indispensable para las ciencias empíricas.

Por otra parte, en cuanto al valor de verdad de "$2 + 2 = 4$", la cita siguiente nos dice qué respuesta da Field a la pregunta general de cuál es el valor de verdad de los enunciados matemáticos.

> La forma que adopta mi propio antirrealismo es muy directa: [...] afirma simplemente que no existen entes matemáticos, y en consecuencia que los enunciados matemáticos que aseveran que existen tales entidades no son verdaderos. Esto significa que la mayoría, si no todos, los enunciados matemáticos atómicos son no-verdaderos [*untrue*] (si se los toma con su significado aparente, como prefiero hacerlo), como también lo son todos los enunciados cuyo conectivo principal es un cuantificador existencial cuyo

[44] El argumento de la indispensabilidad ha sido analizado con detalle por Colyvan (2001). Para nuestros fines en esta tesis basta con lo formulación general que le henos dado.

rango pretendido corre sobre entidades matemáticas; mientras que los enunciados cuyo principal conectivo es un cuantificador universal sobre entidades matemáticas son vacuamente verdaderos, aun si entran en conflicto con teorías matemáticas establecidas. Obviamente, no estoy proponiendo que reemplacemos la matemática usual por una nueva matemática que rechace todas las afirmaciones existenciales y acepte todas las universales; tal cuerpo de afirmaciones no sería de interés matemático. Estoy aseverando, en cambio, que lo matemáticamente interesante y lo que es verdadero no coinciden. (Field 1989: 144)

Para Field, entonces, el enunciado atómico "$2 + 2 = 4$", tomado literalmente, es no-verdadero [*untrue*], afirmación que significa que "$2 + 2 = 4$" no es verdadero, pero tampoco es falso. Si se lo interpreta de esta manera, el ficcionalismo de Field introduce un tercer valor de verdad para los enunciados matemáticos. A su vez, todo enunciado universal es considerado como vacuamente verdadero, aun cuando esto entre en conflicto con las teorías matemáticas establecidas. Así, por ejemplo, el enunciado "Todo cuadrado es igual a la suma de dos cuadrados", o más formalmente, "$\forall x \in \mathbb{N}\ (\exists y \in \mathbb{N}, \exists z \in \mathbb{N}\ (x^2 = y^2 + z^2))$", que en la matemática usual es falso, sería, según el ficcionalismo de Field, verdadero; mientras que el enunciado "$\exists x \in \mathbb{N}\ (x + 2 = 4)$", que la matemática usual considera verdadero (precisamente porque $2 + 2 = 4$), sería, para el ficcionalismo de Field, un enunciado falso.

Una manera de hacer compatibles estas afirmaciones con las de la matemática estándar consiste en introducir un concepto ficcionalista de verdad, semejante al que se emplea para los enunciados que se refieren a las ficciones literarias. Se lo ha denominado en ocasiones "verdad en la ficción".[45] Según declara Field:

Un ficcionalista no necesita (ni debería) negar que existe *algún* sentido en el cual '$2 + 2 = 4$' es verdadera; pero conceder que es verdadera en algún sentido no nos compromete a encontrar ningún procedimiento interesante que traduzca afirmaciones matemáticas aceptables en afirmaciones verdaderas que no postulen entidades matemáticas. En cambio, los ficcionalistas pueden decir que el sentido en el cual '$2 + 2 = 4$' es verdadera es muy parecido al sentido en el cual 'Oliver Twist vivía en Londres' es verdadera: esta última afirmación es verdadera sólo en el sentido de que es verdadera *de acuerdo con*

[45] La filosofía de las ficciones literarias, de la cual no nos ocuparemos en esta tesis, ha tenido un desarrollo muy amplio en años recientes, sobre todo en los campos de la metafísica y la filosofía del lenguaje. Para una introducción al tema véase García-Carpintero (2016).

cierta historia bien conocida, y aquella es verdadera sólo en el sentido de que es verdadera *de acuerdo con la matemática estándar*. (Field 1989: 2-3)

Field admite, entonces, que existe algún sentido en el cual "$2 + 2 = 4$" es un enunciado verdadero, no en tanto afirmación matemática literal, sino por la misma razón (o por una razón similar) a aquella que permite decir que "Oliver Twist vivía en Londres" es una afirmación verdadera. Así como esta última es una afirmación referida a una historia bien conocida creada por Charles Dickens, de manera similar, "$2 + 2 = 4$" sería, según Field, una afirmación referida a la historia de la matemática. De manera análoga, "Oliver Twist vivía en Roma" es un enunciado falso en la historia de Dickens y "$2 + 2 = 5$" es falso en la historia efectiva de la matemática. En el próximo capítulo formularemos varias críticas a esta postura de Field.

6.4. El ficcionalismo de Mary Leng

En Leng (2010), la autora sostiene que el problema de la existencia de los objetos matemáticos admite dos aspectos, los cuales deben ser analizados por separado. Uno de estos aspectos se refiere al problema de la existencia de los objetos que estudia la matemática aplicada (es decir, aquella parte de la matemática que es utilizada de manera directa por las ciencias empíricas), mientras que el otro aspecto se refiere al problema de la existencia de los objetos que estudia la matemática pura.

Cabe preguntarse, a modo de primera observación, si realmente existe una diferencia tan clara entre la matemática aplicada y la matemática pura. En efecto, la historia de la matemática exhibe numerosos ejemplos de ramas de la matemática que fueron, a veces durante siglos, consideradas como parte de la matemática pura, pero que posteriormente pasaron a tener aplicaciones prácticas muy concretas. De todos modos, no resultará necesario profundizar en esta idea, ya que, tanto para la matemática aplicada, como para la matemática pura, la conclusión a la que llega Leng es prácticamente la misma. De los objetos de la matemática aplicada, concluirá que no hay razón para suponer que existan; mientras que de los objetos de la matemática pura dirá que hay razones para suponer que no existen.

Al analizar la existencia de los objetos de la matemática aplicada, Mary Leng estudia, como hace Field, el argumento de la indispensabilidad. En este sentido, Leng afirma que la inferencia que lleva del argumento de la indispensabilidad al realismo matemático sigue el siguiente esquema:

Premisa 1 (o tesis del "naturalismo", postura a la que adhiere Leng): Debemos mirar a la ciencia, y en particular a las afirmaciones que consideramos mejor confirmadas de acuerdo con las teorías científicas estándar, para determinar en qué debemos creer (es decir, para determinar cuáles son los objetos que debemos aceptar que existen).

Premisa 2 (u "holismo confirmacional"): Cuando una teoría es confirmada, esta confirmación se extiende por igual a todas sus afirmaciones.

Premisa 3 ("indispensabilidad"): Las afirmaciones cuya verdad requiere la existencia de objetos matemáticos son indispensables para formular nuestras mejores teorías científicas.

Las "mejores" teorías científicas, mencionadas en la tercera premisa, lo son porque han sido confirmadas experimentalmente de manera reiterada. Por otra parte, la segunda premisa asegura que cuando una teoría es confirmada, esta confirmación se extiende a todas sus afirmaciones. La tercera, dice que es indispensable que entre esas afirmaciones haya enunciados que afirman la existencia de objetos matemáticos. Finalmente, la primera premisa dice que, dado que se dan por confirmados enunciados que afirman la existencia de objetos matemáticos (al menos, de la matemática aplicada), entonces se debe creer que esos objetos existen. Se llega así a la siguiente conclusión.

Conclusión ("platonismo"): Se debe aceptar que existen objetos matemáticos. (Recuérdese que, tanto para Leng como para Field, si existieran objetos matemáticos, entonces estos serían, necesariamente, objetos abstractos.)

Leng rechaza la conclusión final, pero, a diferencia de Field, su estrategia no consiste en argumentar en contra de que la matemática sea indispensable para formular las mejores teorías científicas (premisa 3). En cambio, sostiene que, por un lado, el uso de los enunciados de la matemática aplicada por parte de las ciencias empíricas no implica un compromiso ontológico con los objetos de la matemática. Por otro lado, Leng rechaza la segunda premisa, el "holismo confirmacional". Más específicamente, rechaza que la confirmación de una teoría científica se extienda a todos los enunciados matemáticos utilizados para formularla.[46] Esta afirmación de Leng

[46] El holismo de la confirmación se origina con la obra de Duhem (1906), pero allí se limita a la física teórica. La extensión del holismo hasta incluir la lógica y la matemática se debe a Quine (1951). El propio Quine, en

parece acertada. Por ejemplo, en el siglo XVIII, cuando comenzó a usarse el cálculo diferencial para la formulación analítica de la mecánica newtoniana, los fundamentos básicos de esa rama de la matemática eran lógicamente inconsistentes. Sin embargo, la confirmación de la mecánica de Newton no implicó la aceptación del cálculo diferencial. Más aún, la fundamentación del cálculo requirió de un proceso histórico independiente del de la evolución de la física. Por otra parte, la aritmética de los números naturales (o reales) forma parte de las más diversas teorías físicas, tanto de las que se consideran confirmadas como de las que se consideran refutadas. Entonces, debería concluirse que la aritmética ha sido a la vez confirmada y refutada por la experiencia. Para escapar a la contradicción, el holista podría responder que la matemática no se confirma o refuta por sí misma, sino en el contexto de un sistema más amplio que tiene contenido empírico. No obstante, es difícil escapar a consecuencias poco deseables: si se revisara la aritmética en el contexto de un sistema refutado, entonces, para mantener la consistencia de la propia aritmética sería necesario también revisarla en el contexto de todos los sistemas confirmados, lo cual parece poco razonable.

En resumen, en lo que se refiere a los objetos de la matemática aplicada, Leng concluye que no hay ninguna razón para creer que estos existan. El principio de parsimonia llevaría a la conclusión de que lo más razonable es suponer que, en efecto, no existen.

En cuanto a los objetos de la matemática pura, dado que no hay ninguna teoría científica que necesite postular su existencia, y que la cuestión de esta existencia no puede ser decidida por ningún criterio fisicalista, Leng concluye que esos objetos no existen. Un ejemplo característico de matemática pura lo proporciona la teoría de conjuntos, que postula la existencia de números cardinales y ordinales transfinitos más grandes que los números reales, números que no se emplean en las teorías empíricas. Ninguna experiencia, entonces, podría confirmar la existencia de tales números transfinitos, ni siquiera de manera indirecta a través de la confirmación de alguna teoría que los use. El principio de parsimonia, una vez más, nos lleva a concluir que los objetos de la matemática pura tampoco existen.

En cuanto al valor de verdad de "$2 + 2 = 4$", la cita siguiente muestra qué afirma Mary Leng al respecto.

> En la […] imagen a la que adhiero, la pregunta de si los enunciados de la matemática estándar afirman verdades es un asunto altamente teórico: dependerá de su rol en

escritos posteriores, moderó esta posición en varios aspectos. Para un análisis del holismo de Quine acerca de la matemática véase Resnik (2005).

> nuestras teorías científicas mejor confirmadas. Antes de conocer la respuesta a esta pregunta no podemos conocer la verdad de ni siquiera las afirmaciones matemáticas más elementales. Que $2 + 2 = 4$, por ejemplo, no es objeto de conocimiento: a lo sumo, podemos saber que se sigue de los axiomas de Dedekind-Peano que $2 + 2 = 4$, dejando a las ciencias empíricas el establecer si los axiomas de Dedekind-Peano son de hecho verdaderos para algún objeto. (Leng 2010: 91)

En la cita parece sostenerse que los enunciados de la matemática, al menos de la aritmética elemental y de las partes de la matemática que se emplean en la formulación de las teorías de la física, son hipótesis empíricas, que podrían verificarse mediante la experiencia. Otro pasaje de la obra de Leng corrobora esta impresión:

> Cuando decimos que es obvio que $2 + 2 = 4$, es posible que algunas veces esto signifique, no que es obvio que la teoría de números implique que $2 + 2 = 4$, sino más bien que es obvio que si cuento de manera correcta exactamente dos objetos de algún tipo (por ejemplo, dedos extendidos de mi mano izquierda), y exactamente dos objetos de otro tipo (por ejemplo, dedos extendidos de mi mano derecha), entonces tomando estos objetos todos juntos seré capaz de contar exactamente cuatro objetos que son del primer tipo o del segundo. (Leng 2010: 93)

De los dos pasajes anteriormente citados podemos concluir que, para Leng, un enunciado atómico como "$2 + 2 = 4$" es solamente una manera de expresar el hecho de que cada vez que a dos objetos concretos (como dedos o piedras) les agregamos otros dos objetos obtendremos un total de cuatro objetos. Dado que el enunciado se refiere a cantidades de objetos concretos, y no habla del número 2 como una entidad abstracta, entonces, para Leng, "$2 + 2 = 4$", aunque verdadera, no implica ningún compromiso ontológico.

6.5. El ficcionalismo de Mark Balaguer

En los capítulos previos se ha mencionado a Mark Balaguer como el creador y principal defensor del platonismo pleno. Parece contradictorio, entonces, que se lo incluya ahora entre los defensores de una postura antirrealista. Sin embargo, en los primeros años del presente siglo la postura de Balaguer viró del platonismo pleno al ficcionalismo. Este cambio desde la postura que afirma que todo lo que puede existir en efecto existe, hacia el antirrealismo matemático más extremo, no es tan radical como puede parecer a primera vista.

En efecto, en Balaguer (1998) el autor sostiene, por un lado, que el ficcionalismo de Hartry Field es la única forma defendible del antirrealismo matemático, y que el platonismo pleno es la única forma defendible del realismo matemático. Por otro lado, Balaguer argumenta que no existen, ni pueden existir, hechos objetivos ("*there are no facts in the matter*") que permitan decidir entre una y otra de esas dos posturas. Es decir, excepto por el hecho de que ambos puntos de vista sostienen afirmaciones opuestas con respecto a la existencia de los objetos matemáticos, el ficcionalismo y el platonismo pleno serían, según Balaguer, posturas indistinguibles desde el punto de vista de la práctica matemática. Ningún hecho permite decidir, por ejemplo, si el conjunto de los números reales existe o no existe. Sin embargo, cualquiera sea la posición ontológica que adopten dos matemáticos sobre este punto, coincidirán en aceptar, según Balaguer, exactamente los mismos enunciados acerca de los números reales, es decir, todos los teoremas que se consideren efectivamente demostrados. Así pues, el desacuerdo sobre la cuestión de la existencia de los objetos matemáticos no se traduce en ningún desacuerdo sustancial acerca de los enunciados que constituyen las teorías matemáticas aceptadas.[47] Planteada esta tesis, no resulta tan sorprendente que Balaguer pudiera modificar su postura inicial y que pasara de sostener el platonismo pleno a sostener el ficcionalismo.

Sin embargo, la actual postura ficcionalista de Mark Balaguer difiere en algunos puntos importantes de la postura original de Hartry Field. La diferencia puede apreciarse en la manera de concebir el valor de verdad de los enunciados de la matemática. Según Balaguer:

> En la versión del ficcionalismo que defiendo, las oraciones como '3 es primo' son simplemente falsas. Pero debería notarse que esto no es esencial para este punto de vista. Lo que es esencial para el ficcionalismo matemático es que (a) no hay tal cosa como objetos matemáticos, y en consecuencia, (b) los términos matemáticos singulares son vacíos. Si esto significa que las oraciones como '3 es primo' son falsas, o si carecen de valor de verdad, o alguna otra situación, depende de nuestra teoría de la vacuidad.

[47] En cambio, un desacuerdo acerca de los métodos de demostración admisibles, como ocurre en el intuicionismo, que rechaza las pruebas por el absurdo, implicaría un desacuerdo considerable en los teoremas que se consideran aceptables. De hecho, la mutilación de partes sustanciales de la matemática clásica fue la principal razón por la que los matemáticos profesionales rechazaron el intuicionismo.

> Adoptaré el punto de vista de que tales oraciones son falsas, pero nada importante se sigue de esto.
>
> Es también importante notar aquí que la comparación entre el discurso matemático y el discurso ficcional no es de hecho central para la concepción ficcionalista de la matemática. (Balaguer 2009a: 47)

Nótese que, mientras que Field dice que "los ficcionalistas pueden decir que el sentido en el cual '$2 + 2 = 4$' es verdadera es muy parecido al sentido en el cual 'Oliver Twist vivía en Londres' es verdadera", estableciendo así una clara relación entre la verdad matemática y la verdad de la ficción literaria; por el contrario, Balaguer afirma que la comparación entre la matemática y el discurso ficcional no resulta fundamental para la postura ficcionalista. La siguiente cita, por otra parte, expresa la opinión de Balaguer acerca del criterio para decidir el valor de verdad de un enunciado como "$2 + 2 = 4$".

> Una oración de la matemática pura es correcta, o ficcionalísticamente correcta, si y sólo si es verdadera en la historia de la matemática [...]; o equivalentemente, si y sólo si habría sido verdadera si existieran efectivamente objetos matemáticos abstractos del tipo que los platonistas tienen en mente, es decir, del tipo al que se supone que se refieren nuestras teorías matemáticas. (Balaguer 2009b: 138)

El enunciado "$2 + 2 = 4$" es verdadero, según Balaguer, porque es considerado como tal por los filósofos platonistas, es decir, debido a que sería un enunciado verdadero si los números 2 y 4 fueran entidades abstractas existentes. Finalmente, con respecto al argumento de a indispensabilidad, Balaguer entiende que el programa de Field, que propone eliminar la matemática de la ciencia, no es realizable.

> El argumento de Field para (NI) [la negación de la indispensabilidad] ha sido sometido a un gran número de objeciones, y el consenso entre los filósofos de la matemática parece ser que ese programa de nominalización no puede funcionar. (Balaguer 2009a: 84)

> La estrategia que tengo en mente aquí es (a) conceder [...] que *hay* aplicaciones indispensables de la matemática a las ciencias empíricas –es decir, que la matemática está completa e inextricablemente entretejida en algunas de nuestras teorías

> empíricas– y (b) simplemente *explicar* estas aplicaciones indispensables desde un punto de vista ficcionalista. (Balaguer 2009a: 85, subrayado por el autor)

Balaguer concede, entonces, que la matemática es indispensable para las ciencias empíricas, pero al mismo tiempo sostiene que este hecho no contradice el punto de vista ficcionalista porque, según Balaguer, no implica la existencia de objetos matemáticos abstractos. Por ejemplo, dado que los objetos abstractos son causalmente inertes, entonces no tienen ninguna relación directa con nuestras teorías empíricas. Una afirmación como “La temperatura del sistema *S* es de 40°C” no le atribuye ninguna relación causal al número 40, y no implica que el número 40 tenga una existencia independiente.

En el próximo capítulo se expondrán diversas críticas al ficcionalismo en general, así como a las versiones de Field, Leng y Balaguer en particular.

7. Críticas al ficcionalismo matemático

En el capítulo anterior se ha hecho una descripción general del ficcionalismo matemático, este capítulo estará dedicado al desarrollo de las críticas que se le pueden formular a esta postura. En la primera sección, como parte del estudio de cuánto afecta el argumento de la indispensabilidad al ficcionalismo matemático, se analizará si Hartry Field tiene éxito en su intento de refutar ese argumento mediante su programa de nominalización de la física. En la segunda sección, independientemente del éxito o del fracaso del intento de Field, se tratará la pregunta de si el argumento de la indispensabilidad constituye realmente una objeción de peso para el ficcionalismo. En las secciones restantes se analizarán las consecuencias que se derivan de la ontología ficcionalista.

7.1. El programa de Hartry Field para la física

Para comenzar, recuérdese que, según se indicó en el capítulo anterior, Leng (2010) enuncia el argumento de la indispensabilidad de esta forma: la ciencia, y en particular las hipótesis mejor confirmadas de las teorías científicas estándar, son las que nos indican cuáles son los objetos que debemos creer que existen. Por otra parte, cuando una teoría es confirmada, esta confirmación se extiende a todas sus hipótesis. Finalmente, las hipótesis cuya verdad suponen la existencia de objetos matemáticos son indispensables para formular nuestras mejores teorías científicas. Como consecuencia de esas premisas, debemos creer en la existencia de los objetos matemáticos.

Dado que el postulado central del ficcionalismo sostiene que los objetos matemáticos no existen, el argumento de la indispensabilidad de la matemática, de ser correcto, constituiría una refutación de esa postura filosófica. La estrategia de Hartry Field para responder a esta objeción consiste en atacar la premisa de que la matemática es indispensable para formular nuestras mejores teorías científicas. En Field (1980) el autor argumenta que es posible formular las teorías de las ciencias empíricas sin apelar a enunciados que hagan referencia a objetos matemáticos. Para mostrar la viabilidad de esta idea propone una formulación “sin matemática” de la teoría newtoniana de la gravitación. La cuestión que se debe analizar es si Field tiene éxito en su intento.

¿En qué elementos, ya que no en números ni funciones, basa Field su formulación de la teoría de Newton de la gravitación? El autor formula axiomáticamente la teoría de la gravitación tomando como base los puntos, rectas y planos del espacio euclidiano tetradimensional (tres dimensiones para el espacio y una para el tiempo). Por otra parte, para establecer qué se entiende por el espacio euclidiano tetradimensional, Field toma la definición axiomática propuesta por en Hilbert (1899). No es necesario detallar aquí cuáles son los axiomas que propone Field para la gravitación; basta con tener presente que su propuesta consiste fundamentalmente en reemplazar los números reales por los puntos de la recta euclidiana. Pero ¿implica este reemplazo una supresión de los objetos matemáticos? Para Field la respuesta es afirmativa, ya que él considera que los puntos de la recta euclidiana son "objetos espaciotemporales", es decir, entes concretos que existen dentro del espaciotiempo y que no son, entonces, objetos matemáticos (recuérdese que para Field los objetos matemáticos, en caso de existir, son necesariamente abstractos).

Una primera objeción a la idea de que los números son "abstractos", mientras que los puntos euclidianos son "concretos", objeción que el proprio Field menciona en su libro, consiste en observar que en la matemática estándar la recta euclidiana se considera equivalente al conjunto de los números reales. Por lo tanto, utilizar puntos geométricos sería una forma "encubierta" de utilizar números reales. Field (1980: 32) responde a esta objeción argumentando que no existe una verdadera equivalencia entre la recta euclídea y los números reales, ya que estos tienen una estructura (dada por las operaciones de suma y producto) de la que la recta euclidiana carece. Más aún, Field afirma que intentar definir una estructura en la recta euclídea presupondría la existencia de los números reales, ya que implicaría la necesidad de asignar arbitrariamente los números 0 y 1 a ciertos puntos de la recta.

Pero aun si se aceptara esta respuesta de Field, quedaría todavía por responder la cuestión de por qué los puntos de la recta euclidiana no pueden ser, ellos mismos, objetos abstractos. La respuesta que propone Field a esta pregunta es que el conocimiento de los objetos abstractos es solamente *a priori*, mientras que las relaciones geométricas entre puntos, rectas y planos surgen, en cambio, de la experiencia sensible. Este último argumento, sin embargo, no parece muy convincente, ya que implicaría que el axioma de las paralelas, que involucra rectas de longitud infinita, y que puede ser negado sin generar una inconsistencia[48], es una afirmación

[48] Debe entenderse: sin generar alguna inconsistencia conocida hasta ahora con los restantes axiomas de la geometría euclídea. En el caso de la axiomatización de Hilbert (1899) la negación del axioma de las paralelas (el vigésimo de su lista) es compatible con los otros 19 axiomas. Si se reemplaza el axioma de

empírica sobre objetos concretos y que surge de la experiencia sensible inmediata, mientras que una relación numérica sencilla como “$2 + 2 = 4$” sólo podría ser entendida como una relación *a priori* entre objetos abstractos intemporales. En otras palabras, parece muy poco razonable sostener que el enunciado de una relación entre objetos de longitud infinita deba ser considerado como una afirmación empírica sobre objetos concretos, mientras que el de una relación entre un número finito de objetos discretos, que tiene un correlato empírico bien definido, expresa una relación *a priori* entre objetos abstractos.

Pero más allá de éste y otros argumentos que Field formula y rechaza, creemos que la objeción más fuerte que se le puede realizar al programa de Field es la siguiente: ¿es razonable suponer que los puntos del espacio euclídeo no son objetos matemáticos? Si se admite, como hace Balaguer (1998), que un “objeto matemático” es todo aquél que es estudiado por los matemáticos, entonces es claro que los objetos que estudia la geometría euclidiana (puntos, rectas, etc.) son objetos matemáticos. La geometría euclidiana no sólo es una rama de la matemática, sino que es la más antigua de todas las ramas de la matemática occidental, la primera en incorporar el razonamiento deductivo a partir de postulados y axiomas y la que, durante siglos, fue la rama central de toda la matemática, la rama en la que todas las demás basaban sus definiciones y demostraciones (ese papel es desempeñado hoy en día por la teoría de conjuntos).

De modo que, siendo la geometría una rama de la matemática, es razonable afirmar que los objetos que estudia (entre ellos los puntos euclidianos) son objetos matemáticos y que la formulación de Field (que, por otra parte, es axiomática, es decir, se basa en estructuras lógicas propias de la matemática), aunque evita los números, no logra excluir las entidades matemáticas en general. Nuestra conclusión es que el intento de Field de atacar el argumento de la indispensabilidad mediante una reformulación de la física que no requiera conceptos matemáticos no es exitoso.

A modo de comentario final de esta sección, conviene mencionar que estamos de acuerdo con Field en que los puntos euclídeos no son objetos abstractos. Es decir, que son objetos matemáticos no abstractos. Es nuestra opinión que tanto Field como Mary Leng han quedado atrapados en una falsa dicotomía, según la cual los objetos matemáticos o bien son abstractos, o bien no existen en absoluto. Volveremos a este tema más adelante, tanto en este capítulo como en el siguiente.

---

las paralelas por el axioma de Lobachevsky, según el cual por un punto exterior a una recta (que se encuentran en el mismo plano) pasa más de una paralela, se obtiene una axiomatización de la geometría hiperbólica. Pero hasta ahora no existen pruebas de consistencia absoluta ni para la geometría euclídea ni para la geometría hiperbólica, sino solo pruebas relativas de una respecto de la otra.

7.2. El compromiso ontológico del lenguaje matemático

En la sección anterior se defendió la idea de que la estrategia que propone Hartry Field para refutar el argumento de la indispensabilidad de la matemática no tiene éxito. Sin embargo, es evidente que esto no excluye la posibilidad de que el argumento pueda ser refutado mediante alguna estrategia diferente. Por ejemplo, según se expuso en el capítulo anterior, Mary Leng propone una refutación basada en un ataque a la premisa de que, si una teoría es confirmada, entonces esta confirmación se extiende a todas sus afirmaciones, y en particular a aquellas que presuponen la existencia de objetos matemáticos. (El holismo de la confirmación sostiene que lo que se confirma en un experimento no es una teoría, sino un sistema más grande de hipótesis, que incluye, por ejemplo, hipótesis auxiliares y teorías presupuestas. La matemática entraría en ese sistema, entonces como una teoría presupuesta.) Si, como se expuso en el capítulo anterior, la premisa del holismo extendida a la teoría matemática subyacente resulta ser falsa, entonces el argumento de la indispensabilidad de la matemática podría considerarse refutado. De todos modos, se explorará a continuación un modo diferente de atacar dicho argumento. Para ello, consideremos la premisa de que las afirmaciones matemáticas cuya verdad requiere la existencia de objetos matemáticos abstractos son indispensables para formular nuestras mejores teorías científicas; esta premisa es la conjunción de dos afirmaciones, a las que llamaremos (a) y (b) respectivamente.

(a) Los enunciados matemáticos son indispensables para formular nuestras mejores teorías científicas.

(b) La verdad de las afirmaciones matemáticas implica la existencia de objetos matemáticos.

La afirmación que Hartry Field intenta refutar con su programa de "desmatematización" de la física es la (a). Es nuestra opinión que esa premisa es verdadera y que cualquier intento de formular, por ejemplo, una teoría física sin apelar a la matemática acabaría, como en el caso del intento de Hartry Field, en un reemplazo de los números, funciones o ecuaciones por otros objetos matemáticos; por ejemplo, estructuras como ("grupos", "espacios vectoriales" o "espacios topológicos"). Sin embargo, creemos que la premisa (b) es falsa; para justificar esta afirmación tomemos, a modo de ejemplo, un enunciado matemático que las ciencias empíricas necesitan que sea verdadero, como "$1 + 1 = 2$".

¿Qué significa que el enunciado "$1 + 1 = 2$" sea verdadero? Para Hartry Field, así como para Mark Balaguer, significa que el enunciado expresa correctamente una relación entre dos objetos (los números "1" y "2") que existen independientemente de los seres humanos. Según esta interpretación, la verdad de un enunciado matemático nos comprometería a aceptar la existencia de objetos abstractos. Por el contrario, Mary Leng admite la posibilidad de que "$1 + 1 = 2$" sea interpretado como un enunciado empírico, es decir, como la expresión del hecho de que, si tenemos, por ejemplo, una piedra y agregamos otra piedra más, entonces tendremos dos piedras.

Nuestro argumento es que las aplicaciones de la matemática a las ciencias empíricas no requieren optar por una u otra interpretación, más aún, se argumentará que las aplicaciones prácticas de la matemática son ontológicamente neutrales. Para ello, obsérvese que la justificación de los enunciados aritméticos que son necesarios para esas ciencias puede siempre ser referida a los axiomas de Peano de primer orden. Es decir, sin necesidad de analizar la posible "verdad" del enunciado "$1 + 1 = 2$", siempre es posible afirmar objetivamente (y eso es suficiente para las ciencias empíricas) que "$1 + 1 = 2$" es demostrable a partir de los axiomas de Peano de primer orden mediante deducciones sintácticas que no apelan al significado de las fórmulas involucradas (y, por consiguiente, tampoco apelan a su valor de verdad). Para mostrar un ejemplo de una deducción así, recuérdese en primer lugar qué dicen los axiomas de Peano de primer orden, cuyos símbolos primitivos son la función sucesor S, las operaciones binarias $+, \cdot$, y los elementos distinguidos $1, 0$.[49]

Ax. 1. $\forall x(Sx \neq 0)$
Ax. 2. $\forall x \forall y(Sx = Sy \Rightarrow x = y)$
Ax. 3. $\forall x(x + 0 = x)$
Ax. 4. $\forall x \forall y\big(x + Sy = S(x + y)\big)$
Ax. 5. $\forall x(x \cdot 0 = 0)$
Ax. 6. $\forall x \forall y(x \cdot Sy = x \cdot y + x)$

[49] Adviértase que estos axiomas, que están escritos tal como se los formula usualmente, ya están interpretados. Caracterizan el modelo pretendido de la aritmética de Peano de primer orden en el dominio de los números naturales $M = \langle \mathbb{N}, S, +, ., 1, 0 \rangle$. En una formulación puramente sintáctica en lenguaje formalizado, $\mathbb{N}$ debería reemplazarse por un conjunto no vacío de objetos cualesquiera, S por un funtor unario, $+$ y . por dos funtores binarios, y 1 y 0 por dos constantes individuales. La demostración que sigue podría escribirse, entonces, con este vocabulario abstracto: $AP = \langle C, f_1, f_2, f_3, a, b \rangle$.

Axioma-esquema de Inducción: Si $\theta(x)$ es una fórmula, entonces de $\theta(0)$ y de $\forall x(\theta(x) \rightarrow \theta(Sx))$ se deduce $\forall x\, \theta(x)$.

Además, por definición, $S0 = 1$, $SS0 = 2$, y así sucesivamente. Por lo tanto, demostrar que "$1 + 1 = 2$" equivale a demostrar que "$S0 + S0 = SS0$". Establecidas estas bases, la demostración de "$1 + 1 = 2$" se realiza de la siguiente manera.

Teorema: $S0 + S0 = SS0$.
Demostración:

1. $0 + 0 = 0$ (por axioma 3)
2. $0 + S0 = S(0 + 0)$ (por axioma 4)
3. $0 + S0 = S(0 + 0) = S0$ (por líneas 1 y 2)
4. $S0 + S0 = S(0 + S0)$ (por axioma 4)
5. $S0 + S0 = S(0 + S0) = S(S0) = SS0$ (por líneas 3 y 4)
6. $S0 + S0 = SS0$ (por línea 5)

Nótese que la demostración que se acaba de exhibir se basa solamente en manipulaciones de símbolos, sin que sea necesario apelar al significado de los mismos. Por lo tanto, aceptar que "$1 + 1 = 2$" es demostrable a partir de los axiomas estándar de la aritmética, y por ende aceptar la validez de ese enunciado, no implica compromiso ontológico alguno. Pero no solamente la aritmética, sino todas las teorías matemáticas que son empleadas por las ciencias empíricas, como es el caso por ejemplo de la teoría de grupos o de la geometría euclidiana, están basadas asimismo en axiomas estándar, por lo que es posible validar los enunciados matemáticos de esas teorías mediante deducciones sintácticas similares a las que se han mostrado más arriba. El punto que se desea señalar aquí es que estas deducciones no implican un compromiso con entidades abstractas; se concluiría de este modo que la afirmación (b) es falsa, por lo que el argumento de la indispensabilidad de la matemática no constituiría una objeción de peso para el ficcionalismo. Cualquier posible refutación de esta postura deberá seguir, entones, una estrategia diferente.

7.3. Primera observación sobre la ontología ficcionalista

Como se ha dicho, el postulado central del ficcionalismo afirma que los objetos matemáticos no existen. En lo que resta del presente capítulo se analizarán las consecuencias de este postulado, en especial en lo que refiere a su posible compatibilidad, o incompatibilidad, con la lógica clásica y con la práctica matemática. Pero, antes de comenzar este análisis, es importante hacer una aclaración. Si el postulado del ficcionalismo se interpreta en el sentido de que no existen objetos matemáticos abstractos, entonces estamos de acuerdo con él. De hecho, en los capítulos 2 al 5 de esta tesis, en los que se ha intentado refutar las variantes más aceptadas del platonismo matemático, se han dado argumentos contrarios a la existencia de objetos matemáticos abstractos. Sin embargo, el ficcionalismo postula una afirmación más contundente: que los objetos matemáticos no existen en absoluto. Debemos decir que no estamos de acuerdo con esta afirmación y que nuestra intención en lo que sigue es intentar refutarla. Si esta refutación resultara ser exitosa, y si también ha sido exitosa la refutación del platonismo matemático, podría concluirse que los objetos matemáticos existen, y que existen dentro del espaciotiempo.

La pregunta que debe formularse, no por primera vez en esta tesis, es qué es un objeto matemático. Se puede adoptar, una vez más, la respuesta que se da en Balaguer (1998): un objeto matemático es todo aquél que sea estudiado por los matemáticos. Sin embargo, tanto Balaguer, como la mayoría de los filósofos de la matemática, suelen mencionar como únicos ejemplos a los números, los conjuntos y las funciones. Sin embargo, la riqueza de los problemas que estudian los matemáticos conlleva una gran riqueza de objetos, que exceden a los tres mencionados. Se mostrarán a continuación otros ejemplos, que permiten apreciar la riqueza y la variedad de los objetos matemáticos.

Como primer ejemplo, considérese la teoría de la complejidad, que es la rama de la matemática cuyo objeto de estudio son los algoritmos. Un algoritmo es una sucesión finita de instrucciones, que recibe una entrada, la cual puede ser, tanto un objeto matemático, como un objeto de naturaleza diferente (por ejemplo, una lista de palabras que se quiere ordenar alfabéticamente). A esta entrada se le aplican las operaciones indicadas por el algoritmo y se llega finalmente a una salida, que es el nombre que se la da al resultado final del cálculo, o del procedimiento, que se quería realizar (por ejemplo, la lista de palabras ordenadas alfabéticamente). La teoría de la complejidad en sí estudia esencialmente qué tan rápidamente crece el tiempo de cómputo en relación con el tamaño de la entrada (por ejemplo, qué tan rápidamente crece el tiempo que se tarda en ordenar alfabéticamente listas cada vez más largas de palabras).

Dado que los algoritmos son estudiados por los matemáticos especializados en la teoría de la complejidad, son entonces objetos matemáticos. Pero los algoritmos son esencialmente los programas informáticos que rigen el funcionamiento de las computadoras, así como de los teléfonos celulares inteligentes, y de muchos otros dispositivos electrónicos. Por lo tanto, aspectos muy reales y concretos de nuestra vida (desde detalles pequeños del día a día, hasta cuestiones globales de la macroeconomía mundial) dependen decisivamente de ellos. En consecuencia, dado que tienen efectos muy tangibles en el mundo concreto, parece poco razonable afirmar que los objetos matemáticos conocidos como algoritmos simplemente no existen (aunque parece tal vez menos razonable decir que el algoritmo de algún juego de moda en Internet sea un objeto abstracto intemporal).

Como segundo ejemplo de objeto matemático que influye de manera directa y concreta sobre la vida cotidiana podemos mencionar a la información. Ésta es el objeto de estudio de una rama de la matemática, iniciada por Claude Shannon y Warren Weaver en la década de 1940, y que estudia las leyes matemáticas de la transmisión, así como del procesamiento, de la información, la cual, de este modo, se transforma un objeto matemático que claramente existe en el espaciotiempo.

Consideramos, entonces, que no puede sostenerse razonablemente que los objetos matemáticos no existen en absoluto (aunque tampoco puede sostenerse que sean objetos abstractos). Por sí sola, esta conclusión refutaría el postulado central del ficcionalismo, sin embargo, es posible ir más allá y plantear la pregunta, más específica, de si es sostenible la afirmación de que los números naturales no existen. Se analizará esta cuestión en las secciones que siguen.

7.4. El número 3 y la raíz cuadrada de -1

La pregunta que se estudiará a continuación es si resulta posible sostener la afirmación de que el número 3 no existe. Para dar una primera respuesta a esta pregunta, llamemos c a un número real cualquiera tal que $c^2 = -1$, y d al menor número primo impar positivo. ¿Existe el número c? ¿Existe el número d?

Cualquier matemático profesional respondería que c no existe; de hecho, en la conferencia inaugural del Segundo Congreso Internacional de Matemáticas, celebrado en París, en el año 1900, David Hilbert pone precisamente a este número c como ejemplo de un ente matemático no existente.

> Si a un concepto se le asignan atributos contradictorios, yo digo que *matemáticamente el concepto no puede existir*. Así, por ejemplo, un número real cuyo cuadrado es –1 no existe matemáticamente. (Citado en Gray 2000: 275)

En cuanto al número d, la amplia mayoría de los matemáticos profesionales (probablemente todos) responderían que d existe y que es el número 3. Un defensor del ficcionalismo, en cambio, aunque coincidiría con la afirmación de que c no existe, diría que tampoco existe el número d, porque ningún ente matemático existe. En otras palabras, si se acepta la ontología ficcionalista, se llegaría a la conclusión de que el estatus ontológico del número 3 sería el mismo que el de un número real que elevado al cuadrado es igual a -1. Y dado que c y d tienen el mismo estatus ontológico, cualquier teoría que se refiera al número c sería, *a priori*, tan legítima o aceptable como una teoría que se refiera al número 3.

Sin embargo, mientras que cualquier teoría que hable de la existencia del objeto c será lógicamente inconsistente, ya que la propia definición de c es autocontradictoria, existen teorías consistentes que hablan de la existencia de d. Por lo tanto, si se acepta la ontología ficcionalista, una teoría lógicamente inconsistente (como sería cualquiera que hable de c) resultaría ser tan legítima como una teoría consistente. Dado que esta situación parece inaceptable, se llega a la conclusión de que tiene que existir una diferencia entre el estatus ontológico del número 3 y el de un número real que sea una raíz cuadrada de -1. Dado que este último no existe, se deduciría que el número 3 sí existe.

El argumento que se acaba de exponer puede parecer poco contundente, pero entendemos que abona la conclusión, que ampliaremos en la sección siguiente, de que la afirmación de que los números naturales no existen es incompatible con la práctica matemática y con la lógica clásica.

7.5. El ficcionalismo y la lógica clásica

El objetivo de esta sección es llegar de una manera más formal a la misma conclusión de la sección anterior: la ontología ficcionalista no es compatible con la lógica clásica ni con la práctica matemática. Como punto de partida de nuestra argumentación, concedamos que el número 3 no existe, ¿qué puede decirse, en consecuencia, del valor de verdad del enunciado "3 es primo"?

Para guiar nuestro razonamiento, consideremos un objeto cuya inexistencia no pueda ser puesta en duda: sea P un pentágono de cuatro lados. (Existe una versión del platonismo, conocida como meinongianismo, que sostiene que todos los objetos, aun aquellos con propiedades lógicamente contradictorias, existen. Sin embargo, dado que tal postura es claramente opuesta a la práctica matemática, puede ser descartada en nuestro análisis. Por otra parte, esta posición es claramente incompatible con la lógica clásica.[50] De modo que aceptaremos que P es, en efecto, un objeto inexistente.)

Considérese a continuación el siguiente enunciado:

"La suma de los ángulos interiores de P no es mayor que dos rectos." [1]

¿El enunciado [1] es verdadero o falso? Para responder la pregunta, llamemos $\theta(x)$ a la fórmula "La suma de los ángulos interiores de x es mayor que dos rectos" y escribamos el enunciado siguiente:

$$\exists x((x = P) \land \neg\theta(x)) \qquad [2]$$

En este enunciado, ¿qué rango recorre la variable cuantificada x? La respuesta, en realidad, es irrelevante porque no importa cuál sea ese recorrido, es claro que no puede haber ningún ente x que a la vez exista y sea igual a P, simplemente porque P no existe. Por lo tanto, el enunciado [2] es falso.

Un modo más formal de probar la falsedad de [2] es el siguiente: el enunciado $\exists x((x = P) \land \neg\theta(x)) \to \exists x(x = P)$ puede deducirse formalmente de los axiomas de la lógica clásica. Si el enunciado [2] fuera verdadero, entonces, por aplicación de la regla del *modus ponens*, también sería verdadero el enunciado $\exists x(x = P)$, pero esto último es absurdo porque P no existe.

Por otra parte, el enunciado [2] es equivalente a:

$$\exists x(\neg((x = P) \to \theta(x))) \qquad [3]$$

Que a su vez es equivalente a:

$$\neg\forall x((x = P) \to \theta(x)) \qquad [4]$$

Es importante notar que la equivalencia entre [2], [3] y [4] también puede ser demostrada sintácticamente mediante las reglas formales de la lógica clásica. Por lo tanto, como [2] es falso, entonces [4] también lo es. Deducimos así que el siguiente enunciado, que es equivalente a la negación de [4], es verdadero:

[50] Sobre la ontología meinongiana véase el capítulo 3 de Sainsbury (2010). Sobre las lógicas meinongianas véase Jacquette (1996).

$$\forall x((x = P) \rightarrow \theta(x)) \qquad [5]$$

Finalmente, y esto también puede ser probado mediante las reglas de la lógica clásica, tenemos que [5] es equivalente a $\theta(P)$. Como $\theta(P)$ representa al enunciado [1], “La suma de los ángulos interiores de P es mayor que dos rectos”, concluimos que “La suma de los ángulos interiores de P es mayor que dos rectos” es un enunciado verdadero.

Observemos ahora que, en realidad, el razonamiento que acaba de mostrarse más arriba es independiente del significado que se le atribuya a la fórmula $\theta(x)$, y que se basa exclusivamente en la suposición de que el objeto indicado como P (no importa cuál sea éste) no existe. Por lo tanto, si $\theta(x)$ es una fórmula cualquiera y P es cualquier objeto inexistente, la lógica clásica nos lleva a concluir que $\theta(P)$ es un enunciado verdadero.

Si se acepta la ontología ficcionalista, deberá aceptarse que el número 3 es un objeto inexistente; por lo tanto, en el razonamiento anterior se puede tomar al número 3 como el objeto P. Además, puede tomarse a “x es primo” como $\theta(x)$. Se llega así a la conclusión de que “3 es primo” es un enunciado verdadero. Pero de la misma forma, también puede tomarse como $\theta(x)$ a la expresión “x no es primo”, por lo cual también sería verdadero el enunciado “3 no es primo”, que es la negación del enunciado anterior. Es decir, un enunciado y su negación serían simultáneamente verdaderos; e inclusive sería verdadero el enunciado “La suma de los ángulos interiores de 3 no es mayor que dos rectos”.

Es claro entonces que la ontología ficcionalista es incompatible con la lógica clásica, y en consecuencia con la práctica matemática, ya que ésta se basa precisamente en la lógica clásica. Se llegaría así, una vez más, a la conclusión de que el ficcionalismo no es una postura aceptable en la filosofía de la matemática.

Algunos ficcionalistas admiten esta incompatibilidad; por ejemplo, en Leng (2010: 93-94) se dice que, aunque “$2 + 2 = 4$” puede considerarse verdadera (por ser la expresión de un hecho empírico), en cambio la afirmación $\exists n(n + 2 = 4)$, que para la lógica clásica es una consecuencia de la anterior, no es, en cambio, verdadera, dado que, para el ficcionalismo, todo enunciado existencial es falso. Al respecto, Leng afirma que:

> Cuando decimos que es obvio que $2 + 2 = 4$, es plausible que a veces queramos decir, no que es obvio que la teoría de números implica que $2 + 2 = 4$, sino, más bien, que si cuento de manera correcta exactamente dos objetos de un tipo […] y exactamente dos objetos de otro tipo, entonces, tomando todos esos objetos juntos podré contar de manera correcta exactamente cuatro objetos que son del primer tipo o del segundo. Pero esto hace solamente un uso adjetival de los números naturales. [...] Y si vemos al enunciado '$2 + 2 = 4$' como siendo usado ocasionalmente para expresar afirmaciones de este tipo [...] el traslado a la afirmación cuantificada $(\exists n)(n + 2 = 4)$ no estará justificado. (Leng 2010: 93-94)

Otro ejemplo de la incompatibilidad arriba señalada es el hecho de que, mientras que "$1 + 1 = 2$" sería, para Leng, un enunciado verdadero, en cambio "$\exists n(n = 1 \ \wedge n + 1 = 2)$" sería falso, mientras que "$\forall n(n = 1 \ \rightarrow n + 1 = 2)$" sería un enunciado universal vacuamente verdadero. Sin embargo, para la lógica clásica, cada uno de los tres es una consecuencia del que le sigue, por lo cual, si el primero es verdadero, los otros dos también deben serlo.

Se puede argumentar, incluso, que la idea de que los enunciados existenciales son siempre falsos, mientras que los universales son siempre verdaderos (en uno y otro caso, debido a la supuesta inexistencia de los objetos referidos por las variables y constantes) es, en sí misma, contradictoria. En efecto, de la definición de primalidad se concluye que el enunciado "3 es primo" es equivalente al siguiente enunciado universal:

$$\forall n \ \forall m(3 = n.m \rightarrow (n = 1 \vee m = 1)) \qquad [6]$$

Pero "3 es primo" también es equivalente a un enunciado existencial. En efecto, se puede demostrar, como señala Davis (1982: 204 y 223), que existe un polinomio con coeficientes enteros $P(x_1, x_2, \dots, x_k)$ tal que "3 es primo" equivale a:

$$\exists m_1 \cdots \exists m_k(P(m_1, m_2, \dots, m_k) = 3) \qquad [7]$$

Es decir, el enunciado existencial [7] es equivalente al enunciado universal [6], por lo que es inconsistente sostener que uno es falso y el otro verdadero. El ficcionalismo le atribuye, a dos enunciados equivalentes, valores de verdad diferentes, o tres valores, si agregamos el valor "untrue" que Field le asigna a "3 es primo". Parece claro, entonces, que la visión de la matemática que propone el ficcionalismo es inconsistente y, por consiguiente, resulta incompatible con la lógica clásica.

En nuestra opinión sólo existen dos formas posibles de compatibilizar la ontología ficcionalista con la lógica clásica. La primera consistiría en renunciar totalmente al uso de cuantificadores; solución que implica un costo excesivamente alto para la práctica matemática, la segunda forma será analizada en la penúltima sección del presente capítulo.

7.6. Historia y ficción

Se ha intentado demostrar en las dos secciones previas que el ficcionalismo matemático es incompatible con la lógica clásica, más aún, se ha intentado demostrar que le atribuye valores de verdad diferentes a enunciados que son equivalentes. Esta afirmación, entendemos, bastaría para concluir que el ficcionalismo no es una postura aceptable en la filosofía de la matemática. Sin embargo, resulta interesante, de todos modos, profundizar en el criterio que propone Field para decidir el valor de verdad de los enunciados matemáticos atómicos como "$2 + 2 = 4$".

Según se ha señalado en el capítulo anterior, de acuerdo con Field los ficcionalistas aceptan que "$2 + 2 = 4$" es una afirmación verdadera (y, presumiblemente, que "$2 + 2 = 5$" es falsa) por razones muy similares a las que permiten decir que "Oliver Twist vivía en Londres" es verdadera (mientras que "Oliver Twist vivía en Buenos Aires" es falsa). Concretamente, "Oliver Twist vivía en Londres" es una afirmación que forma parte (o es una consecuencia inmediata) de una historia bien conocida, escrita por Charles Dickens; y aunque no se diga explícitamente, se deduce también de esa historia que Oliver Twist no vivía en Buenos Aires. Se afirma usualmente que la primera oración es "verdadera en la ficción", mientras que la segunda es "falsa en la ficción".[51] En el mismo sentido, dice Field, "$2 + 2 = 4$" es una afirmación que forma parte de una historia bien conocida, la historia de la matemática, en cuyo contexto se afirma que $2 + 2$ es 4, y que no es 5 (ni ningún otro número distinto de 4). Y así como Oliver Twist bien podría haber vivido en Dublín, en París, o en cualquier otra ciudad, de la misma forma, fue solamente el devenir histórico de la matemática el que "decidió" que $2 + 2$ fuese 4, pero bien podría haber sucedido que $2 + 2$ fuese 5, o cualquier otro número.

[51] Sobre la verdad en la ficción véase García-Carpintero (2016) y la bibliografía allí citada. Como ya se indicó en el capítulo anterior, en esta tesis no nos ocuparemos de la filosofía de la filosofía de las ficciones literarias. Las mencionamos porque Field y otros ficcionalistas apelan a la comparación entre ficciones matemáticas y ficciones literarias. Sobre aspectos metafísicos del ficcionalismo véase también Sainsbury (2010).

Una objeción que puede presentarse a esta idea es que no existe “la” historia de la matemática. Existe, en realidad, la historia de la matemática europea, cuyos orígenes se remontan a la matemática griega clásica; pero también existe la historia de la matemática del Antiguo Egipto y la historia de la matemática de la Antigua Mesopotamia, que comenzaron mucho antes que la historia de la matemática griega, y se desarrollaron una independientemente de la otra. Y también existe la historia de la matemática del Japón Antiguo y de la Antigua China, que seguramente se influyeron mutuamente, pero que se desarrollaron independientemente de todas las anteriores. Y también existe la historia de la matemática de la Antigua India, que influyó un poco sobre la europea, pero que comenzó independientemente de las anteriores. Y también la historia de la matemática maya, totalmente independiente de todas las demás. Por no citar a los incas, aztecas, maoríes, y muchos otros.

En todas esas historias, sin excepción, existe la operación de suma, y en todas ellas $2 + 2$ es siempre igual a 4. Mesopotámicos, mayas e indios desarrollaron sistemas posicionales para escribir números que son mutuamente reconocibles (basados, entre otras, en la operación de suma). Indios, mesopotámicos y egipcios desarrollaron métodos de resolución de ecuaciones que son mutuamente reconocibles como equivalentes (es decir, con sólo entender el idioma, un matemático mesopotámico, por ejemplo, entendería y reconocería como válidos, los métodos egipcios). La antigua geometría japonesa planteó problemas que son perfectamente resolubles en el contexto de la geometría de Euclides. Mesopotámicos, egipcios y chinos conocieron el teorema de Pitágoras.

Para volver a la analogía con la literatura, la enumeración que se acaba de hacer equivaldría a decir que existe una obra literaria que ha sido escrita de manera absolutamente independiente, una y otra vez a lo largo de los siglos por toda civilización humana que haya dejado algún registro escrito (y en forma oral por aquellas que no tuvieron escritura). Esta hipotética obra, salvo las diferencias obvias en cuanto al idioma (y algunas otras diferencias menores, como los sistemas de notación) es siempre exactamente la misma, porque narra exactamente los mismos hechos acerca de los mismos protagonistas. Protagonistas que, aunque en una y otra edición de la obra tienen nombres diferentes, son, sin embargo, perfectamente reconocibles debido a todo aquello que les sucede, así como por las relaciones que se establecen entre ellos. Una obra, finalmente, de la que jamás se ha encontrado una versión diferente.

Si una obra así fuese hallada, el más elemental sentido común indicaría que no se trata de una obra de ficción, sino de un texto basado en hechos “reales” (en el sentido de “no ficcionales”) percibidos prácticamente del mismo modo por todas esas civilizaciones.

Una obra literaria de esas características jamás ha sido hallada (y tal vez nunca lo será), pero sí existe una obra no literaria que cumple esos requisitos, esta “obra” es la aritmética de los enteros positivos y la geometría elemental. En resumen, no parece razonable afirmar que “$2 + 2 = 4$” es una afirmación cuyo valor de verdad se establece de manera similar a “Oliver Twist vivía en Londres”, y que es sólo un accidente histórico. En conclusión, creemos que esta propuesta de Field es incompatible con la historia de la matemática.

7.7. El deductivismo como solución posible

Como se adelantó más arriba, entendemos que existe un modo de compatibilizar la ontología ficcionalista con la lógica clásica, aunque creemos que probablemente que no sería aceptable para los filósofos ficcionalistas. Esta propuesta consiste en reemplazar el concepto de “verdadero” por el de “demostrable”, en otras palabras, el ficcionalismo debería adoptar los preceptos centrales de la corriente conocida como deductivismo, que afirma que los enunciados matemáticos no son verdaderos ni falsos, sino que sólo son cadenas de símbolos sin significado que se pueden deducir, o no, de un sistema axiomas (que sea consistente) mediante demostraciones formales. De este modo, por ejemplo, el símbolo “∀” carecería de todo compromiso ontológico y actuaría solamente a nivel sintáctico de la siguiente manera: de una fórmula del tipo $\forall x P(x)$ puede deducirse $P(t)$ donde “t” es un término cualquiera del lenguaje.

Según este punto de vista, “3 es primo” no sería “verdadero” ni “falso”, sino solamente un enunciado demostrable a partir de los axiomas de Peano mediante deducciones sintácticas (similares a las que se mostraron en la sección 7.4 para “$1 + 1 = 2$”). Por otra parte, la afirmación “’3 es primo’ es demostrable a partir de los axiomas de Peano” sí sería una afirmación verdadera, pero en este contexto debería ser considerada como una afirmación metamatemática, y no como un enunciado matemático.

Afirmamos que el deductivismo es compatible con la ontología ficcionalista porque, dado que el enunciado “3 es primo” es tomado solamente como una cadena de símbolos sin significado, pasa a ser irrelevante si el símbolo “3” designa a un ente que existe, o que no existe, por lo que no se produciría ninguna incompatibilidad si suponemos que los términos matemáticos no son referenciales. Sin embargo, la adopción de esta postura implicaría un costo que la vuelve incompatible con la práctica matemática, porque transformaría a esta disciplina en un estudio de teorías axiomáticas independientes entre sí, de manera muy similar a como lo hace el platonismo pleno. En particular, perderían validez todas aquellas demostraciones que prueban enunciados de una teoría mediante herramientas provistas por una teoría diferente, como es el caso de la demostración del teorema de Fermat, o del teorema de Goodstein. Concluimos así que la solución aquí propuesta, aunque reconcilia a la ontología ficcionalista con la lógica clásica, implica un costo que no es aceptable para la práctica matemática.

7.8. El cambio de lógica

Dado que el ficcionalismo no es compatible con la lógica clásica, una forma, aunque bastante radical, de preservar la validez de esta postura consistiría en realizar un cambio de lógica. Ninguno de los problemas que hemos analizado podría resolverse con una mera extensión de la lógica clásica, por lo que sería necesario adoptar una lógica rival. Puesto que, además, debería ser una lógica que no preserve todas las inferencias clásicas, entonces, necesariamente, algunas de las demostraciones de la matemática clásica no serían válidas de acuerdo con la nueva lógica. La gran mayoría de los matemáticos rechazaría esta opción porque consideraría que tiene un costo demasiado alto. Entre otras cosas, nos obligaría a revisar todas las demostraciones aceptadas que se basan en la lógica clásica y a descartar algunas de ellas. De hecho, como ya se mencionó en la nota 47 del capítulo anterior, esa fue una de las razones principales por las cuales la comunidad de los matemáticos rechazó de manera casi unánime la lógica intuicionista.

Por otra parte, no es claro cuál debería ser la lógica no clásica apropiada para el ficcionalismo. Este es un tema que tiene interés por sí mismo y merecería ser investigado, pero los principales defensores del ficcionalismo matemático (al menos, los que hemos tomado en cuenta) no se han ocupado del asunto. Algunos lógicos han sugerido que alguna variedad de la llamada “lógica libre”, una lógica que admite términos singulares que no denotan objetos del dominio de los cuantificadores (o incluso que no denotan objetos en absoluto), sería una lógica adecuada para el ficcionalismo en general. En particular, se ha sugerido que la llamada “lógica inclusiva” (o “lógica universalmente libre”), que admite la cuantificación sobre un dominio vacío, sería el tipo de lógica más conveniente.[52] Aquí no nos pronunciaremos sobre la conveniencia de esta clase de lógica para el ficcionalismo matemático. Para nuestros fines basta constatar que se trata de una lógica no clásica en la cual muchas inferencias clásicamente válidas (por ejemplo, $P(a) \to \exists x P(x)$) resultan inválidas (pero no se validan inferencias clásicamente inválidas, por lo cual las lógicas libres resultan más débiles que la lógica clásica).

Hay otras posibilidades aparte de la lógica libre. Aquí no sería pertinente explorarlas con detalle, por lo que nos limitaremos a mencionarlas brevemente. Una de ellas sería considerar que los enunciados matemáticos singulares no son ni verdaderos ni falsos, sino que tienen un tercer valor de verdad (el llamado "*untrue*"). En tal caso, se podría considerar que una lógica trivalente, o polivalente, sería la más adecuada. Así, tanto '2+2=4' como '2+2≠4' tendrían ambos el tercer valor de verdad. No obstante, los enunciados cuantificados universalmente deberían considerarse verdaderos y sus respectivas negaciones, que son enunciados existenciales, deberían ser falsas. Por tanto, no sería cierto que todos los enunciados matemáticos no son ni verdaderos ni falsos.

Un ficcionalista también podría adoptar la posición según la cual los enunciados matemáticos singulares carecen de valor de verdad. Frecuentemente, se ha afirmado que los enunciados que contienen descripciones vacías no son ni verdaderos ni falsos. Existen diversas lógicas que admiten "huecos" (*gaps*) en los valores de verdad, como las propias lógicas libres. De todos modos, tampoco sería posible justificar la afirmación de que todos los enunciados matemáticos carecen de valor de verdad, ya que los enunciados cuantificados universalmente deberían ser verdaderos.

En suma, no resulta claro que sea posible sostener de manera coherente que todos los enunciados matemáticos son falsos, o que no son ni verdaderos ni falsos, sino que tienen otro valor de verdad, o, finalmente, que todos carecen de valor de verdad. Cualquiera que sea la lógica no clásica que se adopte, tendrá como consecuencia que al menos algunos enunciados matemáticos son verdaderos y, por consiguiente, sus respectivas negaciones son falsas.

Como ya señalamos al comienzo de esta sección, los matemáticos rechazarían de manera casi unánime cualquier cambio de lógica que implicara invalidar algún teorema demostrado mediante la lógica clásica, puesto que ello implicaría necesariamente

[52] Para un estudio detallado de las lógicas de la ficción véase Woods (2006) y las referencias que allí se citan.

abandonar infinitos teoremas de la matemática clásica (entre otros, todas las consecuencias lógicas de dicho teorema). Por otra parte, en el lenguaje usual de la práctica matemática se llama verdaderos a todos los teoremas demostrados, y consiguientemente, falsos a todos los teoremas incompatibles con los que han sido demostrados. Difícilmente se abandonaría ese lenguaje a causa de un cambio de lógica, si no se advierte que haya algún beneficio considerable implicado por dicho cambio. Si se pierden teoremas de la matemática estándar, ello se consideraría como un costo a pagar. Si se mantuvieran todos los resultados clásicos, no se encontraría ningún beneficio en el cambio de lógica, y, menos todavía en el cambio de los hábitos lingüísticos. Por estas razones, no es en modo alguno casual que los matemáticos se hayan adherido siempre a la lógica clásica y hayan desestimado un cambio global de lógica. Las lógicas no clásicas se exploran por sí mismas, como tantas teorías matemáticas que no tienen aplicaciones en otras ciencias. Algunas lógicas no clásicas han encontrado aplicaciones locales, incluso en la física, la computación o la ingeniería, pero no han sido consideradas como alternativas a la lógica clásica para la realización de las pruebas matemáticas. En síntesis, los matemáticos nunca han considerado seriamente la posibilidad de una alternativa global a la lógica clásica ni la de una reforma global del lenguaje (o del metalenguaje) de la matemática.

7.9. Balance del ficcionalismo matemático

Algunos matemáticos sostienen la convicción de que todas las demostraciones matemáticas pueden formalizarse dentro de la lógica de primer orden. Es decir, que cualquier demostración puede traducirse a una sucesión finita de enunciados escritos en un lenguaje formal de primer orden, de tal modo que cada uno de ellas es, o bien un axioma de la teoría en la que se enmarca la demostración, o bien un enunciado que se deduce de los inmediatos anteriores por aplicación de ciertas reglas sintácticas de inferencia lógica. Más aún, suele sostenerse que todos los enunciados matemáticos considerados como verdaderos por la matemática estándar pueden ser enunciados y demostrados en el contexto de la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel con el axioma de elección. Sin embargo, estos hechos nunca han podido ser demostrados rigurosamente, hasta el punto de que el matemático Reuben Hersh ha llegado a sostener que esos hechos solamente pueden ser aceptados por un “acto de fe”.

> Este punto de vista […] involucra un acto de fe. ¿Cómo, de hecho, podemos saber que nuestro teorema más reciente sobre la difusión en variedades es formalmente deducible de la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel [con el axioma de elección]? Ninguna tal demostración formal ha sido ni siquiera escrita. Si así fuera, y si fuera verificada por un lector humano, la probabilidad de error sería mayor que la de verificar una demostración matemática ordinaria (no formalizada). (Hersh 1998: 18)

Se concluye de la cita de Hersh (que es un matemático profesional) que la lógica de la práctica matemática no siempre es la lógica de primer orden, sino que, según se deduce de la lectura de libros de texto, así como de artículos científicos, las demostraciones que hacen los matemáticos en su práctica diaria utilizan la lógica clásica. Por lo tanto, se puede afirmar que una postura en la filosofía de la matemática, para ser aceptable, debe ser compatible con la aplicación de la lógica clásica en los razonamientos matemáticos. La intención principal de este capítulo ha sido, precisamente, mostrar que la ontología ficcionalista no es consistente con la lógica clásica.

A modo de ejemplo, si entendemos, como sostiene el ficcionalismo, que los términos matemáticos no son referenciales y que, entones, el enunciado

$$\forall x\big((x = 4) \rightarrow (x \text{ es primo})\big) \qquad [8]$$

tiene que ser considerado vacuamente verdadero. Se llegaría así a la conclusión de que “4 es primo” es verdadero, ya que este enunciado es equivalente a [8]. Aunque, según el criterio de Field, debería ser falso porque así lo indica el relato histórico de la matemática.

Las modificaciones que harían del ficcionalismo una postura compatible con la lógica clásica implican un costo que es inaceptable para la práctica matemática. En efecto, como ya hemos señalado, una primera solución consistiría en adoptar un lenguaje que omita el uso de cuantificadores, lo que obligaría a abandonar casi toda la matemática clásica.

La segunda solución consistiría en adoptar el punto de vista deductivista, según el cual los enunciados matemáticos son cadenas de símbolos sin significado que se deducen formalmente de ciertos sistemas consistentes de axiomas. Aunque este punto de vista es, en efecto, compatible con la ontología ficcionalista, y con la lógica clásica, conllevaría el costo de fragmentar a la matemática en una serie de teorías formales independientes, una consecuencia que ya se ha visto que es incompatible con la práctica matemática. Esta solución también contradeciría la tendencia de los matemáticos a relacionar los conceptos de teorías diferentes, tal como lo muestra la existencia de ramas de la matemática como la topología algebraica o la teoría analítica de números.

Finalmente, la tercera alternativa, la sustitución global de la lógica clásica por alguna lógica no clásica, junto con la reforma lingüística que ello implicaría, sería considerada una estrategia excesivamente costosa para la propia matemática, que no compensaría los posibles beneficios filosóficos o epistemológicos que pudiera acarrear. Por lo demás, dado que todavía no está claro cuál es la lógica no clásica apropiada para el ficcionalismo, todavía no resulta posible siquiera evaluar cuáles serían los beneficios de renunciar a la lógica clásica.

Así pues, dado que el ficcionalismo matemático resulta incompatible con la lógica clásica y, por tanto, con las prácticas demostrativas y lingüísticas de los propios matemáticos, parece razonable concluir que no es una posición viable en la filosofía de la matemática.

8. Una solución convencionalista

8.1. Introducción a la solución propuesta

La intención en el presente capítulo es proponer una tercera alternativa, diferente del platonismo y del ficcionalismo, la cual, entendemos, permite evitar los problemas que presentan las dos anteriores. En particular, la postura que se aquí se presentará será consistente con la práctica matemática y con la lógica clásica, y podrá dar cuenta de la riqueza de los objetos que estudia la matemática.

Para facilitar su descripción, conviene presentar esta postura en tres partes. La primera sostiene que la práctica matemática es convencionalista, es decir, que las definiciones y los axiomas en los cuales se basan las demostraciones matemáticas son adoptados convencionalmente. La segunda parte de la propuesta intenta explicar el origen de esas convenciones; se argumentará que estas no son arbitrarias, sino que surgen, en principio, de la necesidad de traducir a un lenguaje preciso (o tan preciso como sea posible) ciertas ideas intuitivas, como la de "cantidad" o de "distancia". Esta traducción es necesaria para que la comunidad matemática pueda trabajar en conjunto, y para que pueda haber acuerdos acerca del modo de plantear y resolver problemas matemáticos. En la tercera parte de la presentación se intentará explicar por qué la amplia mayoría de los matemáticos, de todas las culturas y a lo largo de toda la historia, han adoptado convenciones acerca de los números naturales y de la geometría elemental que son equivalentes entre sí. Argumentaremos que, en última instancia, la fuente de las ideas matemáticas está en la organización de nuestro cerebro, más exactamente, en ciertas estructuras que la evolución imprimió en el cerebro humano y que influyen en la percepción del mundo.

Este desarrollo comenzará en la sección 2, donde se propondrá una definición de qué es la matemática. La primera parte de la solución convencionalista será analizada en las secciones 3 y 4; la segunda parte, sobre el origen de las convenciones, será expuesta en las secciones 5 a 7; mientras que la tercera parte, sobre la uniformidad de las convenciones, será analizada en la sección 8. En la sección 9, finalmente, se estudiará la cuestión de la existencia de los objetos matemáticos.

8.2. ¿Qué es la matemática?

La exposición que se hará en el presente capítulo comienza con la pregunta que encabeza esta sección, ¿qué es la matemática? Como primera aproximación a una respuesta, comenzaremos argumentando que la matemática no puede definirse por su objeto de estudio, sino por su método y su criterio de validación. Por una parte, cualquier intento de definir a la matemática por su objeto de estudio parece conducir a un círculo vicioso. En efecto, en los capítulos precedentes se adoptó la definición, aceptada también, entre otros, por Mark Balaguer y Hartry Field, según la cual un objeto matemático es aquel que es estudiado por la matemática. En consecuencia, dado que esta definición del objeto de estudio presupone conocer qué es la matemática, entonces, si se definiera a la matemática por su objeto se caería en un círculo vicioso. En otras palabras, la definición de la matemática debe preceder a la definición de su objeto de estudio, y no al revés.

Podría argumentarse, por otra parte, que quizás sea posible definir el concepto de objeto matemático de una manera independiente, sin apoyarse en una definición previa de la matemática. Sin embargo, todo parece indicar que es prácticamente imposible caracterizar a los objetos matemáticos por su propia naturaleza. En efecto, no parece que haya una característica común que englobe a entes tan diversos como el número 30, el conjunto de todos los números naturales, la clase de todos los ordinales transfinitos, la estrategia ganadora en el ajedrez y los enunciados indecidibles cuya existencia es demostrada por el Primer Teorema de Incompletitud de Gödel. La única característica que todos estos objetos parecen tener en común es, precisamente, la de ser estudiados por la matemática.

Una objeción posible a esta última afirmación es que sí existe una característica común a todos los objetos matemáticos, y que ésta consiste en que todos ellos son conjuntos. Siguiendo esta idea podría proponerse que los objetos matemáticos son, simplemente, diferentes tipos de conjuntos.

Esta objeción, a su vez, puede ser respondida de dos maneras. Por una parte, como es bien sabido, la teoría de conjuntos fue desarrollada a fines del siglo XIX, y fue precedida por miles de años de evolución histórica de la matemática. El desarrollo de la teoría de conjuntos es, de hecho, una consecuencia de esa evolución histórica, más precisamente, del proceso de fundamentación del cálculo. Parece claro, entonces, dado que muchos de los objetos que estudia la matemática (por ejemplo, los números, las funciones, las ecuaciones y todos los objetos geométricos) existieron en la consideración de los matemáticos mucho antes que los conjuntos, que esos objetos no pueden ser conjuntos.

Una segunda respuesta a la objeción sostiene que existen objetos que no son estudiados *a priori* por los matemáticos, pero que pueden ser, de todos modos, definidos como si fuesen conjuntos. Un ejemplo está dado por los lenguajes naturales, o por los diccionarios, que pueden ser definidos como conjuntos finitos de secuencias de letras.

Proponemos aquí la tesis, que analizaremos tanto en este capítulo como en el siguiente, de que los objetos matemáticos no son conjuntos, sino que la teoría de conjuntos solamente provee un lenguaje suficientemente flexible y potente como para describir todos los objetos que estudia la matemática. La definición conjuntista de los objetos matemáticos alude a una cuestión lingüística, no relativa a la naturaleza de los objetos en sí. De hecho, el uso del lenguaje conjuntista se ha extendido tanto en la matemática que, si acaso existiera un objeto que no pudiera ser descripto de esa manera, probablemente los matemáticos, precisamente por esa razón, omitirían estudiarlo.

¿Qué es, entonces, la matemática? ¿Cómo puede definirse, si no es a través de su objeto de estudio? Entendemos que la matemática queda definida por el criterio de validación de sus enunciados, criterio que, como se argumentará en los párrafos que siguen, la diferencia claramente de las demás ciencias, tales como la biología, la física o la química. Obsérvese en primer lugar que el trabajo matemático se basa en axiomas y definiciones, los cuales son aceptados como verdaderos sin necesidad de ninguna contrastación empírica. Más aún, argumentaremos en este mismo capítulo que la elección de estos axiomas y definiciones es convencional. La única exigencia que se les impone es que sean lógicamente consistentes (es decir, que no exista ningún enunciado P tal que él y su negación sean ambos deducibles de esos axiomas y definiciones, por aplicación de la lógica clásica).[53]

Conviene aclarar que la distinción entre axiomas y definiciones es, en gran medida también convencional. Por ejemplo, los axiomas 3 y 4 de la aritmética de Peano, que son los enunciados $\forall x(x+0=x)$ y $\forall x \forall y\big(x+Sy=S(x+y)\big)$, constituían en la formulación original de Giuseppe Peano, de 1890, la definición de la suma. De manera similar, los axiomas 5 y 6, $\forall x(x\cdot 0=0)$ y $\forall x \forall y(x\cdot Sy=x\cdot y+x)$, conformaban la

[53] De manera más general, que no toda fórmula de un sistema axiomático sea demostrable como teorema en dicho sistema.

definición del producto[54]. Otro ejemplo interesante está dado por la definición de probabilidad condicional, de Kolmogorov, que muchos autores prefieren introducir como axioma. Según como se formule la teoría de la probabilidad, resulta conveniente optar por una u otra presentación (por ejemplo, dependiendo de si se toma como concepto primitivo la probabilidad condicional o la absoluta).

Para los enunciados que no son axiomas ni definiciones el único criterio de validación que se aplica es el de la demostración. Es decir, una vez establecidos los axiomas y las definiciones, el matemático aplica la lógica clásica para deducir, a partir de ellos, distintos teoremas. Una vez demostrados, esos teoremas no requieren de ninguna justificación posterior; en particular, no necesitan de ninguna clase de contrastación empírica (característica que diferencia a los enunciados matemáticos de los enunciados típicos de la física, la química o la biología). En resumen, en su práctica cotidiana (cuyo objetivo general es la resolución de problemas), el matemático eventualmente puede nombrar ciertos objetos y postular, mediante definiciones o axiomas convencionales, cuáles son sus propiedades básicas, o bien, como sucede en la mayoría de los casos, adopta definiciones o axiomas que han sido propuestos por otros matemáticos. Una vez que los objetos han sido nombrados, y sus propiedades básicas han sido postuladas, el matemático deduce de ellos, mediante la lógica clásica, diversos teoremas, los cuales son considerados verdaderos sin que exista la necesidad de alguna otra corroboración.

Proponemos, entonces, la siguiente definición: Un objeto matemático es un objeto O tal que todo enunciado significativo referido a él es verdadero si y sólo si es un axioma o una definición (elegidos convencionalmente), o bien es un teorema que se deduce de esos axiomas o definiciones mediante la lógica clásica. Si se descubriera que los axiomas son inconsistentes, entonces, o bien se abandona el estudio de ese objeto o, más frecuentemente, los axiomas son modificados convenientemente para evitar la contradicción. Una cebra, por ejemplo, en tanto animal de carne y hueso, no es un objeto matemático, ya que sus propiedades no pueden ser postuladas convencionalmente (podría postularse, si se quisiera, una teoría referida a cebras perfectamente iguales entre sí, pero no sería, de ningún modo, una teoría sobre las cebras de carne y hueso). Por el contrario, un modelo numérico del comportamiento de las cebras, donde se formule una descripción matemática simplificada de su comportamiento, basada en postulados y definiciones convencionales, sí sería, en cambio, un objeto matemático.

[54] Véase van Heijenoort (1976: 95–96).

La historia de la física de partículas elementales podría inducirnos a pensar que los *quarks* y otros entes estudiados por esa rama de la física poseen propiedades básicas que son postuladas convencionalmente. Sin embargo, no son objetos matemáticos, ya que la física exige que su existencia deba ser, directa o indirectamente, corroborada mediante observaciones o experimentos. Tómese, a modo de ejemplo, el hecho de que la hipótesis de Peter Higgs sobre el campo que lleva su nombre, sólo fue aceptada como descripción posible del universo después de que se hubieran hallado pruebas empíricas de la existencia del *bosón de Higgs*. En otras palabras, la física, igual que la matemática, postula la existencia de determinados tipos de objetos, pero, en el campo de la física, la correspondiente hipótesis existencial no será aceptada hasta que se obtenga suficiente evidencia empírica que la confirme.[55] En la matemática, en cambio, sólo se requiere que las hipótesis existenciales sean consistentes, y esa única condición resulta a la vez necesaria y suficiente para que esa hipótesis sea aceptada.

8.3. La práctica matemática y el convencionalismo

En la sección anterior se ha sostenido que la matemática sólo puede definirse por su método y su criterio de validación. El matemático nombra ciertos objetos y postula sus propiedades básicas mediante axiomas y definiciones, de los cuales deduce, mediante la lógica clásica, teoremas cuya validez queda asegurada por el solo hecho de haber sido demostrados, sin que se requiera corroboración posterior. ¿Cómo elige el matemático esos axiomas y definiciones? Tal como se dijo en la introducción, sostenemos la tesis de que la elección es convencional. Muchas veces estas convenciones son adoptadas libremente por cada matemático; y aunque existen numerosas convenciones que están impuestas casi universalmente, en la mayoría de los casos esas convenciones fueron propuestas originalmente por algún matemático individual.

¿Cómo se podría argumentar a favor de la idea de que los axiomas y las definiciones de la matemática son convencionales? La respuesta debe buscarse allí donde queda registrado el resultado de la práctica matemática, es decir, en los artículos científicos, en los libros de texto y en las exposiciones en conferencias y congresos.

Un primer argumento, tal vez menor, a favor de la tesis de que la práctica matemática es convencionalista está dado por el uso recurrente, sobre todo al formular

[55] Aquí no distinguiremos entre los conceptos de confirmación y corroboración, cuya diferencia no es relevante para nuestros fines.

definiciones, de la expresión "Decimos que…", o su equivalente más formal "Se dice que…". El "nosotros" implícito que aparece en esta expresión incluye tanto al autor del texto como a los lectores, y debe entenderse en el sentido de "convenimos en adoptar el siguiente significado para el concepto".

Sin embargo, como se ha dicho, se trata de un argumento menor. Una razón más categórica sería la siguiente: si en verdad las definiciones y los axiomas se eligen convencionalmente, entonces existe la posibilidad de que, en ciertas circunstancias, distintos matemáticos adopten convenciones diferentes al momento de definir un mismo concepto. Es decir, el convencionalismo conlleva la posibilidad de que en una misma época diferentes matemáticos definan (por ejemplo, por razones de conveniencia) un mismo concepto de maneras diferentes y no equivalentes entre sí. Nótese que la referencia a una misma época excluye la posibilidad de que la diferencia en la definición se deba a una evolución histórica del concepto.

Más aún, si en el contexto de una misma teoría, usando el mismo lenguaje, y en la misma época, dos o más matemáticos definieran un mismo concepto de maneras no equivalentes entre sí, y si además todas esas definiciones fueran aceptadas como válidas por la comunidad matemática, entonces esa circunstancia podría ser tomada virtualmente como una demostración de que la práctica matemática es convencionalista. En la sección siguiente se mostrará un ejemplo que cumple las condiciones que se acaban de describir.

8.4. Un ejemplo: La definición de función continua

Como se adelantó en el último párrafo de la sección anterior, se mostrará a continuación un ejemplo de un concepto que ha sido definido de maneras no equivalentes entre sí por distintos matemáticos contemporáneos, en el contexto de una misma teoría, y usando el mismo lenguaje, con la condición adicional de que todas esas definiciones sean consideradas como correctas por la comunidad matemática. Como también se dijo, la existencia del ejemplo que se mostrará (y que es sólo uno de entre otros muchos posibles) es un argumento de mucho peso a favor de la tesis de que la práctica matemática es convencionalista.

El ejemplo que se expondrá es la definición de función continua, un concepto central para el cálculo, y que tiene aplicaciones en todas las ciencias empíricas. Se muestran a continuación tres definiciones de este concepto, tomadas de textos universitarios de fines del siglo XX y principios del XXI. Después de cada definición se da, además, una breve explicación de su significado.

(1) Se dice que una función f es continua en un punto p si: a) f está definida en p, y b) $\lim_{x \to p} f(x) = f(p)$.
(Apostol 1999: 160)

Explicación: El símbolo $\lim_{x \to p} f(x)$, que se lee “límite de $f(x)$ cuando x tiende a p” se refiere al valor al que se acerca $f(x)$ cuando x se va acercando cada vez más a p (aunque x nunca llega a valer exactamente p). Una condición para que este límite pueda calcularse es que existan, tan cerca de p como se quiera, valores de x donde la función esté definida. La parte a) de la definición indica que $f(p)$ debe existir; la parte b) dice que el valor de $f(p)$ debe coincidir con el valor al que se acerca $f(x)$ cuando x se va a acercando a p.

(2) Sea f una función definida en un intervalo abierto (a, b) y sea $x_0 \in (a, b)$. Decimos que f es continua en x_0 si: $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
(Noriega 2003: 200)

Explicación: La definición es similar a la anterior (el punto se llama aquí x_0 en lugar de p, pero la diferencia es irrelevante). La condición de que $f(x_0)$ exista, que es la parte a) de la definición anterior, está implícita aquí en el simple hecho de que $f(x_0)$ sea mencionado (una convención implícita en el lenguaje matemático es que, si un objeto se menciona en una definición, sin hacer referencia a si existe o no, entonces se sobreentiende que, para que la definición sea consistente, ese objeto tiene que existir). La diferencia importante con la definición anterior consiste en que en este caso se pide que la función esté definida en un intervalo abierto (a, b), esta condición implica que, tanto a la derecha como a la izquierda de x_0 deben existir valores de x tales que $f(x)$ exista.

(3) Una función $f: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua en $\alpha \in A$ si para cada sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de A que converja a α, la sucesión $(f(a_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $f(\alpha)$.
(Matera 2012: 213)

Explicación: El punto aquí es llamado a; la condición $a \in A$ equivale a decir que $f(a)$ existe, ya que A es el conjunto de todos los números donde la función puede calcularse. La definición nos dice que $f(x)$ es continua en $x = a$ si y sólo si $a_1, a_2, a_3, \ldots$ es una sucesión de números de A (es decir, números en los que $f(x)$ está definida) que converge a a, entonces $f(a_1), f(a_2), f(a_3), \ldots$ converge a $f(a)$.

Cada definición tiene la intención de capturar la idea intuitiva de que una función $f(x)$ es continua en $x = a$ si y sólo si "cuando los valores de x se acercan a a, entonces, los valores de $f(x)$ se acercan a $f(a)$". Sin embargo, como puede verse, aunque la idea intuitiva es siempre la misma, su traducción al lenguaje formal es, en cada caso, diferente. Pero ¿son realmente definiciones diferentes? ¿O, por el contrario, a pesar de las apariencias, las tres definiciones son equivalentes? ¿No será que en todos los casos se trata esencialmente de la misma definición, sólo que escrita de maneras diferentes?

La respuesta es que las tres definiciones son realmente diferentes, es decir, que no son equivalentes entre sí. Para justificar esta afirmación se mostrará a continuación una función $f(x)$ tal que, ante la pregunta de si $f(x)$ es continua, cada una de las tres definiciones implica una respuesta diferente. Si las definiciones fueran equivalentes, deberían conducirnos todas ellas a la misma conclusión, por lo tanto, la existencia de esta función $f(x)$ demuestra que las tres definiciones no son, en efecto, equivalentes.

El ejemplo está dado por la función $f: A \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2(x-1)}$, donde A es el conjunto de todos los números donde la función puede calcularse. Este conjunto, llamado el *dominio* de la función, está formado en este caso por el número 0 y por todos los números mayores o iguales que 1 (pero no incluye a los números intermedios entre 0 y 1). El conjunto A tiene un punto aislado en $x = 0$, es decir, aunque el 0 pertenece a A, ningún número cercano alrededor del 0 pertenece a ese conjunto. El gráfico de la función $f(x)$ tiene, asimismo, en $x = 0$, un punto aislado y se completa con una curva que "comienza" en $x = 1$ y se desarrolla "hacia arriba y a la derecha".

La pregunta que se analizará es la siguiente: ¿cómo responde cada una de las tres definiciones de continuidad a la pregunta de si $f(x)$ es continua en $x = 0$ y en $x = 1$?

La definición (1) presupone que para analizar si $f(x)$ es continua en $x = p$ la función debe estar definida en valores de x tan cercanos a p como se quiera. En el caso del ejemplo, como $x = 0$ es un punto aislado, no existen valores de x en los que la función esté definida y que se encuentren tan cercanos al 0 como se quiera. Por lo tanto, no tiene sentido calcular $\lim_{x \to 0} f(x)$ y, en consecuencia, la definición (1) nos dice que $f(x)$ no es continua en $x = 0$. Sin embargo, para esta misma definición, sí es posible analizar la continuidad en $x = 1$, ya que es posible acercarse a ese número desde su derecha (porque la función está definida para todos los valores de x mayores que 1).

No entraremos en mayores detalles, pero puede probarse que la definición (1) dice que $f(x)$ sí es continua en $x = 1$.

¿Qué sucede con la definición (2)? Como se dijo más arriba, esta definición presupone que para determinar si $f(x)$ es continua, la función debe estar definida tanto a la derecha como a la izquierda del punto a analizar. Sin embargo, en el ejemplo que se está analizando $f(x)$ no está definida ni a la derecha ni a la izquierda de $x = 0$, y sí a la derecha, pero no a la izquierda de $x = 1$. Por lo tanto, si se aplica la definición (2), la conclusión será que $f(x)$ no es continua en ninguno de los dos puntos; más aún, la pregunta ni siquiera podría formularse porque la función no cumple la condición inicial de estar definida a la derecha y a la izquierda de los puntos que son objeto de análisis.

¿Qué respuesta da la definición (3)? Para analizar si $f(x)$ es continua en $x = 0$ se debe tomar una sucesión $a_1, a_2, a_3, \ldots$ formada por elementos de A que converja a 0. Dado que 0 es un punto aislado, la única sucesión posible es la sucesión constante 0, es decir, 0, 0, 0,… La definición (3) dice que para que $f(x)$ sea continua la sucesión $f(0), f(0), f(0), \ldots$ debería converger a $f(0)$. Como esto último evidentemente sucede, se concluye que la definición (3) dice que $f(x)$ es continua en $x = 0$. Un análisis un poco más complejo (que no es necesario ofrecer aquí) permite demostrar que, para la definición (3), $f(x)$ también es continua en $x = 1$.

En resumen:
La definición (1) implica que $f(x)$ es continua en $x = 1$, pero no en $x = 0$.
La definición (2) implica que $f(x)$ no es continua en $x = 0$, ni en $x = 1$.
La definición (3), en cambio, implica que $f(x)$ es continua en ambos puntos.

Por lo tanto, las tres definiciones no son equivalentes entre sí, ya que, de serlo, deberían dar en los tres casos la misma respuesta. Ante esta situación, una pregunta que podría surgir naturalmente es cuál de las tres definiciones es la "correcta".[56] La respuesta a esta pregunta es que las tres definiciones son correctas, en el sentido de que son aceptadas como válidas por la comunidad matemática, y esto último se debe a que son convenciones, todas autoconsistentes, propuestas por matemáticos profesionales. En cuanto a si la función $f(x)$ es continua en $x = 0$ y $x = 1$, la única respuesta posible es "depende de la convención que se adopte".

---

[56] Suponemos que las definiciones, como todos los enunciados aceptados por convención, no son ni verdaderas ni falsas. No creemos que sea necesario introducir el concepto de "verdad por definición", de acuerdo con el cual todas las definiciones resultan verdaderas.

Se concluye así que la traducción al lenguaje formal de la idea intuitiva de continuidad es convencional, y que al adoptar una convención el matemático tiene (hasta cierto punto, al menos) libertad de elección.

Otro ejemplo de dos convenciones diferentes que son ambas consideradas como correctas por la comunidad matemática está dado por la definición de los números naturales. En efecto, hay dos definiciones posibles de este conjunto que se diferencian en que en una de ellas se incluye en este conjunto al número 0, mientras que en la otra el 0 no es incluido. Es decir, para la primera $\mathbb{N} = \{0,1,2,3, \dots\}$, pero para la segunda $\mathbb{N} = \{1,2,3, \dots\}$.

La primera definición, que es de origen más reciente, tiene inspiración conjuntista y proviene de considerar que los números naturales son los cardinales de los conjuntos finitos; de este modo el 0 sería un número natural porque es el cardinal del conjunto vacío. La segunda definición refleja la idea intuitiva de que los números naturales son aquellos que usamos desde niños al aprender a contar; según esta idea el primer número natural es el 1. El punto que se desea destacar es que, en la actualidad, ambas definiciones se consideran válidas, y ante la pregunta de si el 0 es un número natural la respuesta es: “depende de la convención que se adopte”.

8.5. La fuente de las convenciones

En la sección anterior se ha intentado demostrar que los axiomas y definiciones en los que se basa la práctica matemática son convencionales; sin embargo, esto no implica que la elección de esos axiomas y definiciones se realice de manera completamente arbitraria, ni, mucho menos, que cada matemático sea libre para proponer o adoptar sus propias convenciones.

Las convenciones matemáticas se basan en ciertas ideas que, en primera instancia, son comprendidas de un modo informal e intuitivo; los axiomas y definiciones intentan traducir esas ideas a un lenguaje preciso. En el caso del primer ejemplo que se ha analizado en la sección anterior, el de la continuidad, la idea que se intenta captar es: “una función $f(x)$ es continua si cada vez que los valores de x se acercan a a entonces los valores de $f(x)$ se acercan a $f(a)$”. Dos ideas más básicas (en el sentido de que la idea de función se basa en ellas) son la de “cantidad” (pensada como cantidad de objetos discretos, tal como piedras, ovejas o hijos) y la idea de “longitud” (que equivale a la idea de “distancia”, ya que, intuitivamente, la longitud de un segmento es la distancia entre sus dos extremos).

¿Cuál es el camino que lleva desde estas ideas intuitivas hasta las convenciones matemáticas? Considérese, por ejemplo, la idea de "cantidad". Un niño sabe que, si tiene la mano vacía y coloca en ella una piedra, tendrá entonces una sola piedra. Sabe también que, si agrega una piedra más, tendrá dos piedras; y si agrega una piedra más, tendrá tres piedras. Tal como dice Mary Leng, ya citada en los dos capítulos previos, los enunciados matemáticos "$0 + 1 = 1$", "$1 + 1 = 2$" y "$2 + 1 = 3$" son la expresión formal de estos hechos empíricos. Traemos a consideración, una vez más, la cita correspondiente.

> Cuando decimos que es obvio que $2 + 2 = 4$, es posible que algunas veces esto signifique, no que es obvio que la teoría de números implique que $2 + 2 = 4$, sino más bien que es obvio que si cuento de manera correcta exactamente dos objetos de algún tipo (por ejemplo, dedos extendidos de mi mano izquierda), y exactamente dos objetos de otro tipo (por ejemplo, dedos extendidos de mi mano derecha), entonces tomando estos objetos todos juntos seré capaz de contar exactamente cuatro objetos que son del primer tipo o del segundo. (Leng 2010: 93)

Las cantidades "pequeñas" tales como 1, 2 o 3 pueden ser percibidas a "golpe de vista". De la misma manera puede percibirse que "$3 + 1 = 4$" y que "$4 + 1 = 5$". No se pueden percibir del mismo modo cien objetos; sin embargo, la operación física de contar permite conocer empíricamente que 100 piedras son más que 90, que 90 son más que 20 y que "$99 + 1 = 100$". Inspirado en estos hechos, el matemático propone el concepto formal de "número natural", e inspirado en desigualdades que son conocidas empíricamente y que involucran "cantidades pequeñas", tales como $1 + 1 > 1$, $2 + 1 > 2$ y otras similares, el matemático postula, a modo de axioma (o bien postula axiomas que permiten demostrar como teorema) que, dada cualquier cantidad n, habrá siempre una cantidad $n + 1$ tal que $n + 1 > n$. Es decir, postula que:

$$\forall n \left(n \in \mathbb{N} \to \big((n + 1 \in \mathbb{N}) \land (n + 1 > n) \big) \right)$$

Es importante aclarar que, en la práctica matemática, a diferencia de lo que sucede en las ciencias empíricas, enunciados como éste no son presentados como hipótesis inductivas (obtenidas del análisis de casos individuales) que deben ser confirmadas mediante la experiencia. Aunque el matemático se inspira en esos casos "empíricos", los axiomas y definiciones son presentados a modo de convenciones que no necesitan ningún tipo de validación e inclusive sin que se dé ninguna explicación de su origen (aunque esa explicación aparece en algunos libros de texto, con la intención de ofrecerles a los lectores un acercamiento intuitivo al tema).

8.6. Convenciones como base de nuevas convenciones

Una vez establecida la definición de los números naturales, es posible basarse en ella para crear nuevos conceptos asociados. Consideremos el siguiente pasaje:

> Como la sustracción no podía efectuarse de un modo general en el campo de los números naturales definióse una nueva especie numérica de la manera siguiente: entiendo por número negativo a' $(= -a)$ un número tal que sumado con a produce cero. Por haber confundido esta definición nominal con una definición real, opusiéronse a la introducción de los números negativos muchas objeciones y dificultades. En efecto, algunos creyeron que con los números negativos se introducían entes misteriosos que carecen de existencia.
>
> La definición de los números negativos podría ser muy bien enteramente caprichosa; si bien para dar la mayor sencillez posible al cálculo con los nuevos números, defínense estos de forma que se conserven las leyes del antiguo campo numérico, no significando ellos, en realidad, sino una extensión del sentido del campo. (Por ejemplo, permanecen la ley asociativa y la conmutativa de la adición y la multiplicación.) [...]
>
> A esta definición que crea conceptos enteramente nuevos se la denomina definición creadora. A ella pertenecen también los puntos del infinito que considera la geometría, así como los números imaginarios de la teoría de números. (Brand y Deutschbein 1930: 20-21)

¿A qué se refieren Brand y Deutschbein en este pasaje? Una vez definidos los números naturales, 0, 1, 2, 3, 4,… un matemático puede decidir que es conveniente extender el conjunto de los números disponibles. Una motivación posible para este desarrollo es darle sentido, por ejemplo, a una operación como $3 - 5$ o $2 - 3$. Esta fue, efectivamente, la razón que llevó a los matemáticos europeos en el siglo XVI a introducir el concepto de número negativo (y similarmente el de los números complejos). Estos matemáticos se encontraron ante el hecho de que, al trabajar con ciertas ecuaciones, el método de resolución los llevaba a calcular restas tales como $3 - 5$, situación que los forzó a extender el campo numérico para incluir “nuevos” números que pudieran ser el resultado de operaciones de ese tipo.

Los matemáticos chinos de la antigüedad definieron también los números negativos, aunque su motivación fue muy diferente. En efecto, la cosmovisión de la Antigua China sostenía que todo ente tenía su opuesto y que, por lo tanto, cada número natural debía tener como opuesto un número “negativo”.

> El capítulo octavo de los “Nueve capítulos del arte matemático” (*Jiu Zhang suanshu*) es el primer texto propiamente matemático (con todas las reservas que una restricción así conlleva) en construir cierta forma de *negatividad*: la que llamaremos *zhen/fu/wu* [la primera palabra, según aclara el autor, podría traducirse como “positivo”, la segunda como “negativo”, y la tercera como “nada”].
> […] Los orígenes […], en contraste con su total ausencia en la matemática griega clásica, se indagan en la fuente misma de la episteme china, en los nudos simbólicos desde cuya trama se van perfilando las categorías matrices del modo de pensar chino. (Lizcano 1993: 62–63)

¿Cómo define el matemático las operaciones que involucran a los números negativos? Brand y Deutschbein dicen que la convención natural consiste en definir esas operaciones de tal modo “que se conserven las leyes del antiguo campo numérico”, es decir, de tal manera que las operaciones de suma y producto mantengan (en la medida de lo posible) las mismas propiedades que ya tenían entre los números positivos. Digamos, por ejemplo, que se conviene en llamar a los números negativos $1'$, $2'$, $3'$, $4'$,… y que, según la idea intuitiva de que los negativos “compensan” a los positivos, se conviene asimismo que $n + n' = 0$. De este modo, por ejemplo:

$$1 + 1' = 0$$

Si en la igualdad anterior, se suma 1 a ambos miembros se obtiene:

$$1 + (1 + 1') = 1 + 0$$

Si se conviene en que la propiedad asociativa debe conservarse, se tendrá que:

$$(1 + 1) + 1' = 1 + 0$$
$$2 + 1' = 1$$

Que también se puede escribir de la siguiente manera (supuesto que la resta $n - m$ está definida para $n \geq m$):

$$2 + 1' = 2 - 1$$

Un razonamiento similar permite concluir que si $n > m$ entonces:

$$n + m' = n - m$$

Dado que la intención es que se conserven las propiedades ya existentes, se adopta entonces la convención que esta última igualdad, que en principio vale para $m < n$, valga también si $m \leq n$. En particular, si se toma $n = 0$ se deduce que:

$$0 + m' = 0 - m$$
$$m' = 0 - m$$

Que conduce naturalmente a la escritura usual $m' = -m$, y también a la convención usual de que $n - m = n + (-m)$. ¿Cuánto vale $3 - 5$? Para responder esta pregunta sea $k = 3 - 5$:

$k = 3 - 5$
$k = 3 + 5'$ (por definición convencional de la resta)
$k + 5 = 3 + 5' + 5$ (se suma 5 a ambos miembros)
$k + 5 = 3 + 0$ (porque $5' + 5 = 0$)
$k + 5 = 3$ (0 es el elemento neutro de la suma)
$k + 5 = 5 - 2$ (porque $3 = 5 - 2$)
$k + 5 = 5 + (-2)$ (por definición convencional de resta)
$k + 5 + 5' = 5' + 5 + (-2)$ (se suma 5' a ambos miembros)
$k + 0 = 0 + (-2)$ (porque 5+5'=0)
$k = -2$ (0 es el elemento neutro de la suma)

Se deduce así que la convención de que $n + n' = 0$, sumada a la convención general de "conservar las propiedades de las operaciones entre los números naturales", conduce a la conclusión de que $3 - 5 = -2$. Los libros de texto no suelen introducir los números negativos del modo en que se acaba de esbozar, sino que normalmente se limitan a formular axiomas y definiciones que, o bien expresan todas las propiedades de las operaciones entre números enteros, o bien permiten demostrarlas. Como se puede advertir en el siguiente pasaje, existen sin embargo algunas excepciones.

> Proposición 1.11.
> Sea a un número real cualquiera y sean m y n números naturales cualesquiera. Entonces vale:
> a) $a^{n+m} = a^n . a^m$
> b) $(a^n)^m = a^{n.m}$
> [...]
> Para terminar con los números enteros, veamos cómo se define la potencia de exponente entero. La guía para nuestra definición será que la Proposición 1.11 siga siendo válida cuando m y n son enteros. [En este texto, el autor adopta la convención de no incluir al 0 entre los números naturales]
> En primer lugar, definimos a^0. Si vale a) de 1.11, entonces será:
>
> $$a^0 . a^n = a^{0+n} = a^n$$
>
> y, si $a \neq 0$, multiplicando por $(a^n)^{-1}$ (que también es distinto de 0):
>
> $$a^0 = 1$$
>
> Por lo tanto, estamos obligados a definir a^0 como 1 para $a \neq 0$.
> (Noriega 2003: 21, 33)

Nótese que el texto citado hace explícito el hecho de que la definición de la potencia de exponente negativo es elegida de tal modo que sigan valiendo las propiedades para los exponentes naturales. Este requisito, a su vez, es en sí mismo una convención, la cual se funda en la intención de mantener la matemática tan simple y unificada como sea posible.

¿Qué ocurriría si se adoptaran otras convenciones? En ese caso la potenciación de exponente entero no conservaría las propiedades de la potenciación de exponente natural o. En principio, no hay nada imposible en ello, pero la matemática como un todo se volvería menos coherente y más complicada.

8.7. Los números reales como convenciones

En la Edad de Bronce, mucho antes de la introducción de los números negativos, la necesidad de trabajar con mezclas de metales en proporciones específicas, así como la necesidad de calcular el pago de impuestos (en los nacientes estados organizados), condujo a la introducción de los hoy llamados "números racionales positivos". Sin embargo, como es bien sabido, en el siglo VI a.C. los pitagóricos descubrieron la existencia de proporciones que no son expresables mediante números racionales.

La filosofía pitagórica sostenía que si A y B son dos segmentos cualesquiera entonces existe siempre un segmento U que cabe una cantidad entera de veces tanto en A como en B. En términos pitagóricos, el segmento U *mide* simultáneamente a A y a B, y estos dos segmentos son siempre *conmensurables*, palabra que significa, literalmente, "que pueden ser medidos al mismo tiempo". El descubrimiento que se le atribuye a los pitagóricos, y que derrumbó algunos de sus presupuestos filosóficos básicos, es que si L es el lado de un cuadrado y D es su diagonal, entonces L y D son inconmensurables.

En efecto, llamemos l y d a las longitudes de los segmentos L y D respectivamente. Si L y D fuesen conmensurables entones existiría un segmento U, de longitud u, y números naturales positivos n y m, tales que $d = nu$ y $l = mu$. Luego:

$$\frac{d}{l} = \frac{nu}{mu} = \frac{n}{m}$$

Donde $\frac{n}{m}$ es un número racional. Sin embargo, por el teorema de Pitágoras, $\frac{d}{l} = \sqrt{2}$, que no es racional. Por lo tanto, la igualdad $\frac{d}{l} = \frac{n}{m}$ es imposible. Queda demostrado así que L y D son inconmensurables.

El razonamiento que se acaba de esbozar supone implícitamente la idea intuitiva de que a todo segmento le corresponde una longitud bien definida, la cual puede ser medida, al menos en teoría, con una precisión absoluta. Esta idea intuitiva, a su vez, se formaliza mediante el "axioma de completitud" de los números reales. Para explicar qué dice este axioma obsérvese en primer lugar que una convención usual en la matemática consiste en representar a los números reales en una recta de longitud infinita, que suele ser dibujada en posición horizontal. A cada número real a se le asigna un punto de esa recta, al que llamaremos P_a. Para realizar esta asignación, en primer lugar, a un punto cualquiera de la recta se le hace corresponder el número 0, y a otro punto ubicado a la derecha de él se le asigna el número 1. Es decir, P_0 y P_1 son elegidos arbitrariamente, bajo la única condición de que el segundo se encuentre a la derecha del primero (esto último es sólo una convención gráfica asociada al hecho de que escribimos de izquierda a derecha).

Una vez asignados los números 0 y 1, y si se adoptan las convenciones usuales, es posible determinar sin mayores dificultades qué punto le corresponde a cada número racional. Estas convenciones son dos, la primera dice que si $a < b$ entonces P_a estará a la izquierda de P_b; la segunda, que la distancia entre P_a y P_b debe ser igual al valor absoluto de $a - b$. De este modo, por ejemplo, es fácil deducir que el punto que corresponde al número 0,5 tiene que ser exactamente el punto medio del segmento $\overline{P_0 P_1}$.

La existencia de segmentos de longitud irracional, por otra parte, implica que los números racionales no completan la recta; en otras palabras, que existe al menos un punto P tal que $P \neq P_a$ para todo a racional. El axioma de completitud dice fundamentalmente que los números reales sí completan la recta; en otras palabras, para todo punto P de la recta existe un número real a tal que $P = P_a$.

Como se dijo más arriba, el axioma de completitud expresa formalmente la idea intuitiva de que todo segmento tiene una longitud bien definida. En efecto, si P es un punto cualquiera de la recta numérica, el axioma de completitud dice que existe un número a tal que $P = P_a$, y esto implica que el segmento $\overline{P_0 P}$ tiene una longitud igual al valor absoluto de a.

En conclusión, la definición convencional de los números reales, así como su representación en la recta numérica, se basa, entre otras, en dos convenciones. Una de ellas dice que existen rectas de longitud infinita (al menos en potencia); la otra, que la longitud de cualquier segmento puede ser medida con precisión absoluta. Estas convenciones, a su vez, están inspiradas en nuestras percepciones cotidianas; una de ellas es que en el universo parece haber, en efecto, puntos tan distantes entre sí como se quiera (y, consecuentemente, rectas potencialmente infinitas). Otra percepción es que, al menos a nivel macroscópico, toda longitud parece que puede ser medida con cualquier precisión razonable. Y aun cuando la cosmología, o la física de las partículas elementales, refutaran la validez de alguno de estos supuestos, la definición convencional de los números reales difícilmente sería abandonada.

8.8. La uniformidad de las convenciones

Como se ha dicho en el capítulo anterior, culturas que no tuvieron ningún contacto entre ellas, como es el caso de los aztecas, los antiguos egipcios o los antiguos chinos, emplearon los mismos conceptos matemáticos básicos. Todos ellos, por ejemplo, trabajaron con la idea de "cantidad discreta", que conduce a los números naturales, y con nociones geométricas asociadas a la idea de "longitud". Sin embargo, no todas las civilizaciones desarrollaron las mismas convenciones de "segundo grado" (esto es, convenciones basadas en otras convenciones). Por ejemplo, los antiguos chinos concibieron los números negativos, pero no así los aztecas ni los egipcios; los aztecas tenían un símbolo para el cero, pero no así los egipcios.

¿A qué se debe esta coincidencia universal en las matemáticas básicas de todas las civilizaciones? En otras palabras, ¿por qué todos los matemáticos de la historia adoptaron las mismas convenciones básicas de "cantidad" y "longitud"? Conjeturamos que esto se debe a que esas ideas están programadas en nuestro cerebro como resultado de la evolución, son nociones que median nuestras percepciones conscientes.

Según los estudios modernos de la percepción, las sensaciones que llegan a nuestra conciencia han sido elaboradas previamente (de manera inconsciente) por diversos sistemas del cerebro que proveen a la conciencia de una percepción parcialmente interpretada ("inconsciente" significa aquí simplemente "que no está bajo nuestro control consciente"). Esta es la explicación última de muchas ilusiones ópticas, y del por qué no podemos dejar de ser "engañados" por la ilusión aun cuando se nos dice lo que realmente sucede (véase, por ejemplo, Dehaene 2016: cap. 2). De forma análoga, nuestro cerebro tiene incorporados ciertos "procesadores" de conceptos matemáticos básicos, procesadores que compartimos, en mayor o menor medida, con otros mamíferos y que evolucionaron como parte de las habilidades necesarias para la supervivencia. Al respecto, afirma un estudioso del tema:

> Uno no puede más que maravillarse con la flexibilidad de un cerebro que, según el contexto y la época, puede planificar una caza de mamuts o concebir una demostración del último teorema de Fermat. Sin embargo, esta flexibilidad no debería sobrestimarse. De hecho, mi opinión es que precisamente las capacidades y los límites de nuestros circuitos cerebrales son los que determinan los puntos fuertes y débiles de nuestras habilidades matemáticas. Desde tiempos inmemoriales, nuestro cerebro, como el de la rata, ha sido dotado de una representación intuitiva de las cantidades. Por eso somos hábiles para realizar aproximaciones, y nos parece tan obvio que 10 es más grande que 5. Como contrapartida, nuestra memoria, a diferencia de la que posee la computadora, no es digital, sino que funciona asociando ideas. Tal vez por este motivo nos resulte tan difícil recordar la pequeña cantidad de ecuaciones que conforman las tablas de multiplicar.

> Al igual que el cerebro del incipiente matemático se presta con mayor o menor felicidad a los requisitos de la matemática, los objetos matemáticos también evolucionan para combinarse cada vez mejor con nuestras limitaciones cerebrales. La historia de la matemática provee gran cantidad de evidencia de que nuestros conceptos de número, lejos de estar congelados, se encuentran en evolución constante. […] Algunos objetos matemáticos hoy parecen muy intuitivos simplemente porque su estructura se adapta bien a nuestra arquitectura cerebral. (Dehaene 2016: 25–26)

En el capítulo 2 formulamos la pregunta de por qué hay matemáticos platonistas, a pesar de todas las dificultades epistemológicas que presenta la filosofía platonista de la matemática (y el platonismo en general). A modo de posible respuesta, se propusieron cuatro razones por las que un matemático podría sentirse inclinado al platonismo.

1) Porque al demostrar o al calcular, los objetos matemáticos parecen ofrecer una resistencia casi física a la manipulación.

2) Porque muchas estructuras matemáticas importantes, tal vez la mayoría (por ejemplo, la estructura de grupo o la de espacio topológico), parecen haberse "impuesto" históricamente por sí mismas, casi sin que fueran buscadas deliberadamente.

3) Porque muy frecuentemente se han dado a lo largo de la historia descubrimientos matemáticos simultáneos.

4) Por la eficacia de la matemática como herramienta para describir la evolución de los fenómenos físicos.

En el capítulo 2 se dijo también que una filosofía razonable de la matemática debería poder dar una explicación para estos cuatro hechos. Trataremos de argumentar que, en efecto, las ideas esbozadas en este capítulo pueden ofrecer una explicación satisfactoria.

Comencemos con el problema de la eficacia de la matemática para describir los fenómenos físicos.[57] Es decir, ¿por qué la matemática es tan eficaz para describir el mundo que nos rodea? La respuesta que proponemos es que en realidad no sabemos si la matemática es eficaz para describir el mundo que nos rodea, sólo sabemos que la matemática es eficaz para describir el mundo tal como lo percibimos. Y esa eficacia se debe a que la manera en que percibimos el mundo está mediada por procesos inconscientes que incluyen, en parte, un procesamiento matemático de la información.

[57] Este es un problema que ha preocupado a muchos físicos teóricos (como Wigner, 1960) y que ha sido objeto de varios estudios por parte de los filósofos de la matemática Véanse Steiner (2005) y Colyvan (2012), capítulo 6, y las obras allí citadas..

En resumen, la información que llega a nuestra conciencia está previamente interpretada por procesos que tienen incorporadas ciertas "nociones matemáticas básicas" que son, a su vez, la base de la matemática misma. Por lo tanto, la matemática es eficaz para describir el mundo tal como lo percibimos simplemente porque nuestra percepción tiene incorporados conceptos matemáticos de los que no podemos desprendernos.

La misma explicación puede darse para cualquiera de los otros tres hechos mencionados. Por ejemplo, con respecto al hecho 3), es importante observar que los descubrimientos simultáneos en matemática no se han dado en el vacío. El cálculo, por ejemplo, tuvo muchos precursores, y surgió por la necesidad de dar respuesta a algunos problemas específicos no resueltos de la geometría (relacionados, por ejemplo, con cálculos de áreas o volúmenes), así como para describir ciertos fenómenos físicos. No es extraño, entonces, que, ante los mismos problemas, basados en las mismas convenciones matemáticas, y empleando la misma lógica, diferentes personas lleguen a soluciones equivalentes.

En cuanto a los dos primeros hechos, en ambos casos, es interesante aclarar que, tanto la "resistencia de los objetos matemáticos" como la "imposición de las estructuras" se encuentran en la organización misma del cerebro humano. Este es un tema que no podemos proseguir aquí, ya que implicaría incursionar en cuestiones empíricas acerca de la percepción, y del funcionamiento del cerebro en general, que no forman parte de la filosofía de la matemática. Las conjeturas que hemos formulado, no obstante, nos parecen plausibles a la luz de nuestros conocimientos actuales, aunque sin duda merecen una investigación más detallada.

8.9. La ontología de la matemática

La práctica matemática, según hemos argumentado en el capítulo anterior, es ontológicamente neutral, es decir, ninguno de los axiomas o definiciones en los que se basa presupone que los objetos matemáticos existan por sí mismos, aunque tampoco presupone lo contrario. Sin embargo, como se dijo en el capítulo anterior, la práctica matemática es inconsistente con la afirmación de que los objetos matemáticos no existen en absoluto. ¿Cómo se resuelve esta aparente paradoja? ¿Cómo puede ser la práctica matemática ontológicamente neutral, pero a la vez inconsistente con la afirmación de que los objetos matemáticos no existen?

Se dijo más arriba que O es un objeto matemático si y sólo si a todo enunciado significativo referido a O se le puede aplicar el método de validación que emplea la matemática. Por lo tanto, las ideas básicas a las que nos hemos referido antes (como las de "longitud" o "cantidad discreta") no son objetos matemáticos, pero sí lo son los entes convencionales que se definen a partir de ellas. Por ejemplo, la idea de cantidad no es un objeto matemático, pero sí lo son los números naturales. Establecida esta distinción, puede formularse la siguiente pregunta; ¿existen los objetos matemáticos independientemente de nosotros?

En realidad, la formulación de la pregunta conlleva una ambigüedad. En efecto, ¿a qué se refiere la palabra "nosotros"? ¿Se refiere a cada ser humano como individuo? ¿O a la especie humana en su totalidad?

Comencemos por formular una pregunta diferente: ¿existen las fronteras nacionales? Y en caso de que existan, ¿existen independientemente de nosotros? Es evidente que las fronteras nacionales son convenciones sociales que adoptan los seres humanos. Por ejemplo, inmediatamente al norte y al sur de la frontera entre México y Estados Unidos el aire, el suelo y el agua tienen exactamente la misma composición físicoquímica. En un gran número de casos las fronteras nacionales no nacen de un hecho físico objetivo, sino de una convención política (en muchos casos, basadas en hechos de fuerza, como el desenlace de una guerra entre estados). Sin embargo, parece inapropiado decir que esas fronteras no existen, ya que tienen consecuencias concretas, y hasta decisivas, en la vida de las personas.

Parece evidente que las fronteras nacionales efectivamente existen de un modo muy concreto. Pero ¿existen independientemente de nosotros? Si por "nosotros" entendemos cada persona individual, la respuesta es sí. Ninguna persona por sí misma tiene el poder de modificar las fronteras nacionales porque las convenciones que las sostienen involucran a millones de personas.

Sin embargo, es también evidente que, si la humanidad desapareciera, las fronteras[58] nacionales también desaparecerían; ya que son convenciones sociales humanas. Por lo tanto, las fronteras existen independientemente de cada individuo, pero no independientemente de la especie humana. Una reflexión similar puede hacerse con respecto a las leyes, al dinero y a las instituciones humanas en general.

Los objetos matemáticos, sostenemos, son también convenciones sociales. Estas convenciones, como se dijo, expresan ciertas ideas intuitivas "básicas", y, como en el caso de las fronteras nacionales, las leyes y el dinero, existen con independencia de los

[58] La obra de Searle (1995) contiene un estudio detallado de las convenciones que llevan a la construcción de objetos sociales.

individuos, pero no existen independientemente de la especie humana. Si la especie humana desapareciera, la matemática desaparecería también; sólo quedarían sus registros escritos, de la misma forma que quedarían los mapas con las fronteras nacionales trazadas en ellos.

Se puede argumentar en contra de esta tesis que, si hay, por ejemplo, dos piedras en la cima de una montaña, entonces esa cantidad "dos" es un objeto matemático que existe independientemente de que haya, o no sea, seres humanos. Nuestra respuesta sería que la "cantidad dos" no es en sí misma un objeto matemático. El objeto es la convención llamada "número natural", que pueden adoptar algunos matemáticos, y que se inspira en esa cantidad, pero no se identifica con ella. Esta convención necesita de un cerebro humano para ser formulada, y dejaría de existir si los humanos desaparecieran, como ocurriría con cualquier otra convención.

9. La teoría de conjuntos como caso de estudio

9.1. Diferentes convenciones posibles

En el capítulo anterior se ha defendido la tesis de que los números naturales son objetos matemáticos definidos convencionalmente sobre la base de la idea intuitiva de "cantidad discreta". También se ha propuesto que esa idea intuitiva es fundamentalmente invariable (probablemente porque está implantada en nuestro cerebro por la evolución). Sin embargo, a pesar de la probable invariancia de la idea intuitiva, las convenciones basadas en ellas pueden adoptar muchas formas diferentes. Los números naturales positivos, por ejemplo, podrían representarse mediante grupos de piedras: una piedra representaría al número 1, dos piedras al número 2, y así sucesivamente. De hecho, hace aproximadamente 30.000 años, algunos grupos de *homo sapiens* del sur de África usaron una convención muy similar: representaban los enteros positivos mediante muescas hechas en huesos de animales. Si se adoptara la convención de las piedras, o la de las muescas, la suma equivaldría a la operación física de agregar piedras (o muescas), mientras que la resta equivaldría a la operación de quitarlas.

Una convención diferente adoptó Euclides en su obra *Elementos*. En este caso, los números naturales positivos son representados mediante objetos geométricos (segmentos o rectángulos, principalmente). Según esta convención, la suma de dos "números lineales", es decir de dos segmentos, equivale a la operación geométrica de trazar uno de ellos a continuación del otro.

Cada convención conlleva ciertos beneficios, y también ciertos costos, y puede ser considerada como más conveniente o menos conveniente dependiendo de qué criterios se adopten para juzgarla. Por ejemplo, la convención de las piedras o muescas es muy fácil de comprender (de hecho, es la primera convención que usan los niños pequeños), pero es muy poco conveniente para trabajar con números grandes. Por ejemplo, es muy difícil basarse en esta convención para demostrar que "Si $2^n - 1$ es primo entonces n es primo". Por otra parte, es casi imposible apoyarse en la convención de las piedras o las muescas para definir los números reales o los complejos. La convención geométrica euclidiana, por otra parte, permite trabajar con cierta facilidad con los números reales, pero tiene dificultades para definir los números negativos o los complejos.

En la actualidad, como es bien sabido, la convención usual consiste en representar a los objetos matemáticos como conjuntos. Es decir, se toma al “conjunto” como objeto primitivo (objeto que, a su vez, se basa en la idea intuitiva de “agregado de objetos concretos”) y partir de él se definen todas las demás entidades matemáticas, como los números y las funciones. ¿Qué costos y beneficios conlleva la adopción de la convención conjuntista? ¿Cómo se resuelve el problema de la falta de unicidad de los números naturales? Estas preguntas serán el tema del presente capítulo.

9.2. La teoría de conjuntos

Aunque es frecuente hablar de “la” teoría de conjuntos, en realidad, como ya se ha mencionado en capítulos anteriores, no existe una única teoría de conjuntos, sino varias. En la práctica matemática usualmente se utiliza la teoría ZFC, o bien NBG, o bien la teoría intuitiva, dependiendo de la conveniencia. Todas estas teorías, tal como sucede con las otras ramas de la matemática, están basadas en convenciones. Las convenciones de la teoría intuitiva, a su vez, se apoyan de manera directa en las percepciones asociadas a las propiedades de los agregados “pequeños” de objetos físicos. Las convenciones de ZFC y de NBG tienen exactamente la misma base, a la que se agregan cuestiones técnicas que tienen el objetivo de evitar las paradojas de la teoría intuitiva.

El hecho de que la teoría intuitiva de conjuntos es una extensión de la teoría de conjuntos finitos fue explicitado por el propio Cantor en 1883, en el artículo donde presenta su teoría de los ordinales infinitos, *Fundamentos para una Teoría General de Conjuntos*, En ese texto Cantor dice:

> La precedente exposición de mis investigaciones en teoría de conjuntos ha llegado a un punto en el que su continuación depende de una extensión del verdadero concepto de número más allá de los límites conocidos, y esta extensión va en una dirección que hasta donde yo sé no había sido explorada antes por nadie.
> […] Se trata de una extensión o prosecución de la serie de los verdaderos números más allá del infinito; por atrevido que esto pueda parecer, estoy en condiciones de expresar no sólo la esperanza, sino la firme convicción de que con el tiempo esta extensión habrá de verse como algo totalmente simple, apropiado y natural. (Cantor 1883, trad. Ferreirós 2006: 85)

En el capítulo anterior se argumentó que la aritmética postula sus definiciones y axiomas sobre la base del comportamiento de las cantidades pequeñas de objetos discretos. De manera similar, como ya se ha adelantado, argumentaremos aquí que la teoría intuitiva de conjuntos postula sus axiomas y definiciones sobre la base del comportamiento de grupos pequeños de objetos concretos.

A modo de ejemplo, considérese la acción de contar con los dedos. Cuando se cuenta de este modo, a cada miembro de un agregado pequeño de objetos, se le hace corresponder un dedo diferente, bajo la suposición implícita de que de este modo la cantidad de dedos empleados será igual a la cantidad de miembros del agregado que se desea contar. Esta intuición se formaliza mediante el enunciado que afirma que dos conjuntos finitos tienen la misma cantidad de elementos si y sólo si existe entre ellos una correspondencia uno a uno. Observemos que si se toman como base la teoría de conjuntos (sea ZFC o NBG), más las convenciones asociadas a los números naturales, en particular el principio de inducción completa, entonces el enunciado puede ser demostrado como teorema. En efecto, el enunciado "Dos conjuntos finitos tienen la misma cantidad de elementos si y sólo si existe entre ellos una correspondencia uno a uno" es equivalente a:

> "Para todo número natural $n \geq 1$, si A y B son conjuntos finitos y A tiene n elementos, entonces B tiene n elementos si y sólo si entre A y B existe una correspondencia uno a uno[59]". [1]

El enunciado [1] puede escribirse más formalmente de la siguiente manera:

$$\forall n\, \forall m\, \big((\#(A) = n \in \mathbb{N}) \land (\#(B) = m \in \mathbb{N})\big) \rightarrow$$
$$(n = m \leftrightarrow (\exists f\colon A \rightarrow B \text{ biyectiva}))$$

Donde $\#(A)$ indica el cardinal de A. Llamemos $P(n)$ a la expresión:

$$\forall m\, \big((\#(A) = n \in \mathbb{N}) \land (\#(B) = m \in \mathbb{N})\big) \rightarrow \big(n = m \leftrightarrow (\exists f\colon A \rightarrow B \text{ biyectiva})\big)$$

Entonces el enunciado [1] puede escribirse como "$\forall n \geq 1, P(n)$". Expresado de este modo, tal como se indicó más arriba, [1] puede probarse "por inducción en n". Este

[59] A los efectos de este trabajo, las expresiones "correspondencia uno a uno" y "función biyectiva" serán entendidas como sinónimas.

método consiste en demostrar en primer lugar que el enunciado $P(1)$ es verdadero, y luego que el enunciado "$\forall n \geq 1\ (P(n) \to P(n+1))$" también es verdadero. Una vez completadas estas dos demostraciones, el principio de inducción completa garantiza que "$\forall n \geq 1, P(n)$" es verdadero.

En resumen, si se aceptan las convenciones asociadas a los números naturales, y el hecho de que estos números son los cardinales de los conjuntos finitos, entonces, el enunciado "Dos conjuntos finitos tienen la misma cantidad de elementos si y sólo si existe entre ellos una correspondencia uno a uno" puede probarse como teorema. Por otra parte, Cantor postuló que esta propiedad se extiende a los conjuntos infinitos, y, consecuentemente, propuso la definición de que dos conjuntos infinitos son coordinables (concepto que corresponde a la idea intuitiva de "tener la misma cantidad de elementos") si y sólo si existe entre ellos una correspondencia uno a uno. A partir de esta definición, por aplicación de la lógica clásica, y basándose en las convenciones que definen a los conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ (entre ellas, la completitud de los reales discutida en el capítulo anterior), Cantor deduce que $\mathbb{N}$ es coordinable con $\mathbb{Q}$, pero no con $\mathbb{R}$.

Como ya se indicó, en otro contexto, en el Capítulo 4, la teoría intuitiva de conjuntos, en la formulación original de Cantor, carecía de axiomas que estuvieran enunciados explícitamente, así como de un lenguaje formal. Se basaba solamente en definiciones expresadas en lenguaje natural a partir de las cuales, por aplicación de la lógica clásica, se deducían los diferentes teoremas. Ejemplo de estas definiciones son las siguientes:

> Por un 'agregado' (*Menge*) entendemos cualquier colección en un todo (*Zusammenfassung zu einem Ganzen*) M de objetos definidos y separados m de nuestra intuición o nuestro pensamiento. (Cantor 1895: 481)

> Llamaremos por el nombre de "potencia" o "número cardinal" de M al concepto general el cual, por medio de nuestra activa facultad de pensar, surge del agregado M cuando hacemos abstracción de la naturaleza de sus varios elementos m y del orden por el que están dados. (Cantor 1895: 482)

La primera contradicción en la teoría intuitiva de conjuntos fue descubierta por el mismo Cantor en 1895. Esta paradoja se relaciona con el llamado conjunto de partes de A (o conjunto potencia de A), que suele indicarse como $\wp(A)$; este conjunto tiene como elementos a cada uno de los subconjuntos de A. Por ejemplo, si $A = \{0,1\}$ entonces $\wp(A) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$. Nótese que A tiene dos elementos (su cardinal es 2), mientras que $\wp(A)$ tiene cuatro elementos (su cardinal es 4). En general, si un conjunto A tiene n elementos, el conjunto potencia $\wp(A)$ tiene 2^n elementos (de allí el nombre de “conjunto potencia”).

En 1895 Cantor demostró que cualquiera sea el conjunto A (finito o infinito), el conjunto $\wp(A)$ tiene un cardinal mayor que A, en consecuencia, para cada A existe un conjunto con un cardinal mayor que él. Intuitivamente, para todo conjunto infinito A existe un conjunto de un orden de infinitud superior. La paradoja de Cantor surge cuando se le aplica el teorema anterior al conjunto universal $\mathcal{U}$, que puede entenderse como el conjunto de todo lo que existe. En este caso, el teorema dice que $\wp(\mathcal{U})$ tiene un cardinal mayor que $\mathcal{U}$, por lo tanto, existe un conjunto cuyo cardinal es mayor que $\mathcal{U}$, un conjunto de un nivel de infinitud superior al del conjunto universal. Esta conclusión, por supuesto, es contradictoria y constituye la llamada paradoja de Cantor.

Una paradoja similar fue hallada en 1897 por Césare Burali-Forti al considerar el conjunto formado por todos los ordinales[60]. En efecto, Burali-Forti demostró que a ese conjunto le corresponde un ordinal, que él llamó Ω, que es mayor que todos los ordinales existentes. Pero $\Omega + 1$ es también un ordinal, y es mayor que Ω. Es decir, Ω es el mayor de todos los ordinales, pero al mismo tiempo existe un ordinal mayor que él, se llega así a una contradicción. (Conviene aclarar que hoy en día el símbolo Ω designa al primer ordinal no numerable, un concepto diferente del que hacía referencia Burali-Forti.)

Cantor intentó superar estas dificultades estableciendo una distinción entre “conjuntos disponibles” (o “consistentes”) y “conjuntos no disponibles” (o “inconsistentes”).

> Se entiende por conjunto disponible toda multiplicidad en la cual todos los elementos pueden ser pensados sin contradicción como coexistentes, y por tanto como una cosa en sí. (Cantor: carta a David Hilbert fechada en Halle, 10 de octubre de 1898. Traducción en Ferreirós 2006: 255)

En los conjuntos no disponibles, entonces, los elementos no pueden ser pensados como formando una totalidad, y por lo tanto no se les puede atribuir un cardinal, ni tampoco un ordinal. Ambas paradojas se resolverían, entonces, mediante el procedimiento de demostrar que tanto el conjunto universal, como el conjunto de todos los ordinales, son no disponibles. Entre 1897 y 1899 Cantor expuso estas ideas en su

[60] Véase van Heijenoort (1976: 110–111).

correspondencia con David Hilbert y con Richard Dedekind (véase Ferreirós 2006: 252-266); sin embargo, ninguno de ellos llegó a aceptar la idea de las “totalidades inconsistentes”, por lo que Cantor nunca publicó esta propuesta.

Como se indicó en el Capítulo 4, Gottlob Frege propuso una formalización rigurosa de la teoría de conjuntos, y también un modo de definir, a partir de la teoría de Cantor, todos los conceptos de la aritmética. El resultado de este trabajo fue su obra *Die Grundlagen der Arithmetik* (*Fundamentos de la Aritmética*), en dos volúmenes publicados en 1893 y 1903 respectivamente.

En el primer volumen de la obra, entre los axiomas de la teoría de conjuntos, Frege incluía el llamado axioma de comprensión, que dice esencialmente que si $P(x)$ es una fórmula bien formada con una variable libre x entonces el conjunto $A = \{x : P(x)\}$ existe. Nótese que el axioma afirma que $\forall x(x \in A \leftrightarrow P(x))$, en otras palabras, si $P(x)$ expresa una propiedad entonces existe el conjunto formado por todos los objetos para los cuales esa propiedad es verdadera.

Es importante observar que hacia fines del siglo XIX en la práctica matemática se usaba libremente del axioma de comprensión al trabajar con números, funciones, estructuras algebraicas o cualquier otro tipo de objeto matemático. No sucedía lo mismo con el conjunto universal o con el conjunto de todos los ordinales, objetos que eran ajenos al trabajo diario de la mayoría de los matemáticos. Por ese motivo, aunque las paradojas descubiertas por Cantor y Burali-Forti no provocaron una grave preocupación, solo se desató una crisis cuando en 1903 Bertrand Russell descubrió la paradoja que hoy lleva su nombre, la cual prueba que el axioma de comprensión es autocontradictorio.[61]

Como se indicó en el Capítulo 3, la paradoja de Russell surge al considerar el conjunto $R = \{x : x \notin x\}$, el cual, según el axioma de comprensión, existe, y además verifica que $\forall x(x \in R \leftrightarrow x \notin x)$. Puede formularse entonces la siguiente deducción:

1. $\forall x(x \in A \leftrightarrow P(x))$	(Axioma de comprensión)
2. $R = \{x : x \notin x\}$ existe.	(Consecuencia de 1)
3. $\forall x(x \in R \leftrightarrow x \notin x)$.	(Por definición del esquema $\{x : P(x)\}$)
4. $R \in R \leftrightarrow R \notin R$	(Consecuencia de 3, tomando $x = R$)

[61] Para un estudio histórico detallado de este tema véase Garciadiego (1992).

Pero la última afirmación es de la forma “$Q \leftrightarrow (\neg Q)$”, y por lo tanto es autocontradictoria. Se concluye así que del axioma de comprensión de Frege se deduce una contradicción, por lo que el axioma es en sí mismo contradictorio.

La crisis provocada por el descubrimiento de la paradoja de Russell se resolvió gracias a la formulación de diferentes teorías axiomáticas de conjuntos, las cuales, hasta donde se sabe, evitan la paradoja de Russell, así como las de Cantor y Burali-Forti. Las dos teorías axiomáticas más usadas en la actualidad, como ya señalamos, son ZFC, la teoría de Zermelo-Fraenkel con el axioma de elección, y la teoría NBG o teoría de von Neumann, Bernays y Gödel. Sin embargo, con la sola excepción de los especialistas en lógica y en teoría de conjuntos, la práctica matemática usual sigue empleando la teoría intuitiva de conjuntos de Cantor y no apela a ZFC, ni a NBG (ni a ninguna otra teoría axiomática). Esto se debe a que la mayoría de las ramas de la matemática nunca, o casi nunca, necesitan trabajar con conjuntos tan abarcadores como para generar el riesgo de una paradoja. En otras palabras, casi nunca requieren de los conjuntos que Cantor llamaba “inconsistentes”.[62]

A modo de ejemplo, consideremos el siguiente fragmento extraído del capítulo introductorio de un libro de texto de cálculo superior. En ese capítulo se explican los prerrequisitos que el lector necesita conocer sobre la teoría de conjuntos.

> Consideremos ahora los conjuntos. Imaginamos un conjunto como un agregado de objetos, sean estos números, símbolos arbitrarios, o entidades. Un conjunto es identificado en una de estas dos formas:
>
> - exhibiendo sus miembros;
> - listando todas las características distintivas que tienen los miembros y que los no-miembros no tienen.
>
> Una de las nociones más básicas es la igualdad de conjuntos. Los conjuntos A y B son iguales, se escribe $A = B$, cuando y sólo cuando contienen los mismos miembros. (Sprecher 1970: 4)

A continuación, el texto de Sprecher define la unión y la intersección de conjuntos, así como otras operaciones y conceptos de uso frecuente, siempre dentro del contexto de la teoría intuitiva. Incluso los libros de texto de topología, rama de la

[62] Para una historia detallada de la teoría de conjuntos véase Ferreirós (2007). Aquí nos hemos limitado a mencionar algunos episodios significativos.

matemática que contiene ejemplos relacionados con los ordinales transfinitos, ofrecen de manera intuitiva los elementos de teoría de conjuntos que necesitan.

La razón básica por la cual la teoría intuitiva de Cantor, aunque se ha probado que es inconsistente, sigue empleándose de manera generalizada es que parece contener muchas subteorías "útiles" que son consistentes. Por ejemplo, no se ha encontrado contradicción alguna en la teoría cantoriana de los conjuntos finitos ni en la de los conjuntos infinitos que tienen la cardinalidad del continuo. Tampoco en conjuntos infinitos más grandes que el continuo, aunque todavía suficientemente pequeños. De hecho, la matemática hace poco uso de conjuntos de cardinalidades grandes (en el sentido propiamente conjuntista del término). Los cardinales grandes se estudian por su interés intrínseco, pero no en razón de sus aplicaciones. Además, se puede caracterizar claramente cuáles son los conjuntos inconsistentes: son todos aquellos que resultan biyectables (es decir, admiten una biyección) con la clase universal o el conjunto de todos los conjuntos. Algunos ejemplos son el conjunto de todas las funciones y el conjunto de todos los pares ordenados, que los matemáticos nunca emplean en la demostración de teoremas. Respecto de los conjuntos que no son biyectables con la clase universal, hasta el momento no se han hallado contradicciones en la teoría. Puede decirse, entonces, que se puede aceptar, con cierto grado de certeza (aunque no se haya demostrado formalmente), que la subteoría consistente de la teoría de Cantor es aquella que se refiere a todos los conjuntos que no son biyectables con la clase universal. Esa subteoría incluye, de hecho, a la totalidad de los conjuntos a los que se refieren los matemáticos en su práctica cotidiana.

En conclusión, la práctica matemática hace uso fundamentalmente de la teoría intuitiva de conjuntos, y evita las paradojas mediante el procedimiento de eludir la referencia a los conjuntos biyectables con la clase universal (aquellas que Cantor llamaba "inconsistentes"). Esta conclusión es consistente con la postura convencionalista presentada en el capítulo anterior. En efecto, como ya se ha dicho, las convenciones de la teoría intuitiva se basan en las propiedades percibidas en los agregados pequeños de objetos concretos. Las teorías axiomáticas ZFC y NBG se basan esas mismas convenciones, a las cuales se les agregan convenciones técnicas destinadas a evitar las paradojas conocidas. En el caso de ZFC la convención consiste en restringir el modo en que se pueden definir los conjuntos, de tal modo que los conjuntos "inconsistentes" simplemente no puedan ser definidos. La solución que propone la teoría NBG, en cambio, consiste en formalizar rigurosamente la clasificación intuitiva de Cantor entre conjuntos "consistentes" e "inconsistentes", los primeros pasan a ser llamados "conjuntos" y los segundos, "clases propias". La diferencia entre unos y otros consiste en que los conjuntos pueden son elementos de otros conjuntos, mientras que las clases propias no lo son.[63] Pero la teoría intuitiva, así como NBG y ZFC, se basan en las mismas intuiciones básicas, por lo tanto, resultan equivalentes en cualquier situación en la que los tecnicismos que evitan las paradojas no sean estrictamente necesarios. En consecuencia, los matemáticos, por razones de conveniencia y simplicidad, adoptan (la mayor parte del tiempo) la convención de emplear la teoría intuitiva de conjuntos.

9.3. La convención conjuntista

¿Por qué la convención conjuntista, es decir, la elección de definir los objetos matemáticos a partir de los conceptos de la teoría de conjuntos, se ha impuesto de una manera casi universal? La respuesta a esta pregunta, entendemos, es que la teoría de conjuntos provee a la matemática de un lenguaje con la potencia y la adaptabilidad suficientes como para expresar todos los conceptos que emplea esa disciplina; al menos, todos los conceptos que la matemática ha usado hasta la actualidad. La convención conjuntista, además, no obliga a modificar la lógica clásica, subyacente a la práctica matemática; como sí sucedería si se adoptara la matemática intuicionista, y que fue uno de los motivos por los cuales el intuicionismo no logró imponer su visión de la matemática.

Estrictamente hablando, no hay forma de demostrar que una convención es mejor que cualquier otra en un sentido absoluto; sólo pueden proponerse diferentes criterios para preferir alguna convención por sobre la otra. Algunos criterios posibles son la facilidad de aplicación, la simplicidad y la unificación semántica, criterios que favorecen a la convención conjuntista. Más aún, conceptos como el de "grupo" o el de "anillo", que comenzaron a ser estudiados en la primera mitad del siglo XIX, es decir, antes del desarrollo del lenguaje conjuntista, son estipulados en la actualidad como conjuntos. La misma situación ocurre en el caso de los números y las funciones. (Por el contrario, conceptos como el de "espacio topológico" parecen depender completamente del lenguaje de la teoría de conjuntos para ser expresados.)

[63] Para una comparación sistemática entre las teorías ZFC y NBG véase Fraenkel, Bar-Hillel & Levy (1973). Se ha probado que la NBG es una extensión conservativa de ZFC. Otra teoría axiomática de conjuntos es la de Kelley-Morse (KM), que fue presentada por primera vez en Kelley (1955) y luego completada y sistematizada por Morse (1965). Esta teoría no es una extensión conservativa de ZFC ni de NBG. Se ha probado que si KM es consistente, entonces, ZFC y NBG también lo son, pero no a la inversa. La teoría KM ha sido poco utilizada por los matemáticos, por lo que no nos ocuparemos de ella aquí.

En resumen, el lenguaje conjuntista es elegido universalmente como el lenguaje de la matemática porque permite unificar semánticamente objetos tan disímiles como los números, las funciones, las estructuras algebraicas, las geometrías no euclidianas y el cálculo de probabilidades. Esta convención no es subjetiva, ni arbitraria, ni tampoco definitiva ni inamovible; por el contrario, es revisable a la luz de la experiencia, y del desarrollo ulterior de la práctica matemática. Por ejemplo, el eventual desarrollo de nuevas ramas de la matemática que no sean reductibles a la teoría de conjuntos podría obligar a adoptar, total o parcialmente, convenciones diferentes. Sin embargo, los científicos tienden a ser conservadores con las convenciones, por lo que es razonable conjeturar que solamente una necesidad muy imperiosa forzaría al abandono de la convención conjuntista.[64]

9.4. Algunas reducciones de los números a conjuntos

En la actualidad, como ya se ha observado, todos los objetos de la matemática se definen usando el lenguaje conjuntista; esto sucede, en particular, con los números naturales. Sin embargo, la reducción de los números naturales al lenguaje conjuntista puede adoptar diversas formas. En lo que sigue, se analizarán los costos y los beneficios de diversas reducciones, es decir, de las diferentes maneras convencionales de definir a los números naturales mediante el lenguaje conjuntista.

Históricamente, la primera definición de los números naturales mediante el lenguaje conjuntista fue propuesta en 1908 por Ernst Zermelo. En la reducción de Zermelo el número 0 se define como el conjunto vacío; es decir, $0 = \emptyset$. El número 1 se define como el conjunto cuyo único elemento es el 0, o sea, $1 = \{0\} = \{\emptyset\}$. El número 2 se define como el conjunto cuyo único elemento es el número 1, es decir, $2 = \{1\} = \{\{\emptyset\}\}$. Y así sucesivamente. En resumen, la reducción propuesta por Zermelo comienza con estas definiciones:

$$\begin{aligned}
&0 = \emptyset \\
&1 = \{\emptyset\} = \{0\} \\
&2 = \big\{\{\emptyset\}\big\} = \{1\} \\
&3 = \Big\{\big\{\{\emptyset\}\big\}\Big\} = \{2\}
\end{aligned}$$

[64] Acerca de la menra en que la matemática se deduce de la teoría de conjuntos véase, entre otras, la obra de Kunen (2009).

En 1923 John von Neumann propuso una reducción diferente. En ésta, como en el caso anterior, los números 0 y 1 se definen, respectivamente, como el conjunto vacío y el conjunto cuyo único elemento es el 0. El número 2, por el contrario, se define como el conjunto formado por el 0 y el 1; el número 3 es el conjunto formado por el 0, el 1 y el 2, y así sucesivamente. En resumen, la reducción propuesta por von Neumann comienza con:

$$
\begin{aligned}
&0 = \emptyset \\
&1 = \{\emptyset\} = \{0\} \\
&2 = \big\{\emptyset, \{\emptyset\}\big\} = \{0,1\} \\
&3 = \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}, \big\{\emptyset, \{\emptyset\}\big\}\Big\} = \{0,1,2\}
\end{aligned}
$$

En ambos casos la reducción sigue fundamentalmente el mismo tipo de esquema: se elige en primer lugar un "elemento inicial", es decir, un primer conjunto que representará al número 0 (en ambas reducciones este primer elemento es el conjunto vacío). A continuación, se define una "función sucesor" $S(x)$. Finalmente, se define $1 = S(0)$, $2 = S(1)$, y así sucesivamente. En la reducción de Zermelo la función sucesor es $S(n) = \{n\}$, mientras que en la de von Neumann es $S(n) = n \cup \{n\}$. Por ejemplo, para Zermelo $2 = S(1) = \{1\}$, mientras que para von Neumann, en cambio, es $2 = S(1) = 1 \cup \{1\} = \{0\} \cup \{1\} = \{0,1\}$. Esta observación sugiere una manera general de proponer otras reducciones de los números naturales a conjuntos: basta con definir un primer elemento y una función sucesor. Una opción consiste, por ejemplo, en definir $0 = \emptyset$ y $S(n) = \wp(n)$; a esta definición la llamaremos la "convención del conjunto potencia". En esta nueva reducción los primeros números están representados por los conjuntos que se muestran a continuación.

$$
\begin{aligned}
&0 = \emptyset \\
&1 = \wp(\emptyset) = \{\emptyset\} = \{0\} \\
&2 = \wp(1) = \wp(\{0\}) = \big\{0, \{0\}\big\} = \{0,1\} \\
&3 = \wp(2) = \wp(\{0,1\}) = \{0, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\} = \{0,1, \{1\}, 2\}
\end{aligned}
$$

Adviértase que tanto la elección del primer elemento de la secuencia de los naturales, como la definición del sucesor de un número natural son enteramente convencionales. Parece "natural", en algún sentido intuitivo del término, identificar al número cero con el conjunto vacío (como ocurre en los tres ejemplos de reducciones que se han presentado), pero esa es sólo es una convención posible entre otras. En principio, se lo podría identificar con cualquier conjunto, finito o infinito.

En la actualidad, los matemáticos se inclinan casi unánimemente por la definición de von Neumann.[65] Tal preferencia se debe seguramente a que esta convención conlleva más beneficios (o menos costos) que la de Zermelo o que otras convenciones posibles, como la del conjunto potencia. A continuación, se analizarán los costos y los beneficios de cada una de las tres convenciones mencionadas.

Un beneficio común a las tres convenciones consiste en que cada número natural está representado por un conjunto finito. Pero en el caso de la convención de von Neumann se da el beneficio adicional de que cada conjunto tiene el mismo cardinal que el número que representa. Esta última condición no se cumple en la convención de Zermelo (donde, con la sola excepción del conjunto vacío, todos los conjuntos tienen un elemento), ni tampoco en la convención del conjunto potencia (donde, una vez más con la sola excepción del conjunto vacío, todos los conjuntos tienen un cardinal que es potencia de 2).

Un beneficio que es común a la convención de von Neumann y a la de Zermelo es que en ambas los conjuntos que representan a los números naturales tienen como elementos números más pequeños. Por ejemplo, para Zermelo $3 = \{2\}$, y para von Neumann $3 = \{0,1,2\}$. En cambio, adoptar la convención del conjunto potencia implicaría el costo de admitir la posibilidad de que los elementos de un número no sean todos ellos números. Por ejemplo, para la convención del conjunto potencia $3 = \{0,1,2,\{1\}\}$ y entonces $\{1\} \in 3$, pero $\{1\}$, en esta convención, no representa ningún número.

Sin embargo, entendemos que el principal beneficio de la convención de von Neumann, beneficio del que carecen las otras convenciones mencionadas, es que puede ser extendida de manera muy simple a los ordinales infinitos. En efecto, nótese que el primer ordinal mayor que 0 es $\{0\}$, el primer ordinal mayor que 0 y 1 es $\{0,1\}$, y el primer ordinal mayor que 0, 1 y 2 es $\{0, 1, 2\}$. Por lo tanto, resulta simple, coherente y conveniente definir al primer ordinal infinito, ω, como el conjunto formado por todos los ordinales finitos, es decir, $\omega = \{x : x \text{ es un ordinal finito}\}$. De la misma forma, el primer ordinal no numerable se define como el conjunto formado por todos los ordinales numerables.

---

[65] Para una detallada defensa de la definición de von Neumann véase Steinhart (2002). Los argumentos de Steinhart, en nuestra opinión, no prueban que los números naturales sean los ordinales finitos de von Neumann, sino solo que es conveniente considerarlos de esa manera.

En la convención de Zermelo, en cambio, no existe una manera clara de pasar de los ordinales finitos a los infinitos. En efecto, dado que en este caso los ordinales finitos son $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}, \ldots$; si se quisiera mantener la regularidad, el primer ordinal infinito debería definirse como $\omega = \{\ldots\{\emptyset\}\ldots\}$, donde los pares de llaves "$\{\ldots\}$" aparecen una cantidad infinita numerable de veces. Sin embargo, tal expresión no pertenece al lenguaje de la teoría de conjuntos, ya que, en éste, cada símbolo sólo puede aparecer una cantidad finita de veces. En otras palabras, en la convención de Zermelo la definición del primer ordinal infinito implica necesariamente un quiebre con la definición de los ordinales finitos.

De forma similar, en el caso de la convención del conjunto potencia los ordinales finitos son $\emptyset, \wp(\emptyset), \wp(\wp(\emptyset)), \ldots$ Por lo tanto, el primer ordinal infinito debería definirse como $\wp(\wp(\ldots(\emptyset)\ldots))$, donde el símbolo "$\wp$" aparece una cantidad infinita numerable de veces. Se observa así que en esta convención al definir el primer ordinal infinito se produce necesariamente un quiebre con la definición de los ordinales finitos.

9.5. Condiciones de adecuación para una reducción de los números a conjuntos

Un beneficio común a las tres reducciones mencionadas consiste en que la definición formal de los conjuntos que aparecen en ellas, así como la demostración de sus propiedades básicas, requieren solamente de los axiomas más elementales de cualquiera de las teorías axiomáticas de conjuntos usuales. Axiomas que también son válidos en la teoría intuitiva. Por ejemplo, ninguna de esas reducciones requiere del axioma de elección, ni del axioma de regularidad (que dice, esencialmente, que ningún conjunto puede ser elemento de sí mismo).

De hecho, no sólo los conjuntos que aparecen en las definiciones conjuntistas de los números naturales, sino también en las definiciones conjuntistas de los números enteros, así como los racionales, reales y complejos, pueden ser definidos en el contexto de la teoría intuitiva de conjuntos. Este es la razón por el cual casi todas las ramas de la matemática pueden basarse en la teoría intuitiva (cuyas convenciones son más simples) y prescindir de las complejidades y restricciones lingüísticas de las teorías axiomáticas. Puede considerarse esta característica como una propiedad deseable de cualquier reducción de los números a conjuntos: que pueda ser formalizada en el contexto de la teoría intuitiva de conjuntos. ¿Qué otras condiciones debería cumplir una reducción de los números naturales a conjuntos?

Nótese en primer lugar que, para que la reducción sea adecuada, la "función sucesor" debería ser elegida de tal manera que cada conjunto generado sea diferente de todos los anteriores. Por ejemplo, se consideraría inadecuado definir $S(\emptyset) = \{\emptyset\}$ y $S(\{\emptyset\}) = \emptyset$. En efecto, esta definición conduciría a la convención que comienza así:

$$
\begin{aligned}
&0 = \emptyset \\
&1 = \{\emptyset\} \\
&2 = \emptyset \\
&3 = \{\emptyset\} \\
&4 = \emptyset
\end{aligned}
$$

La falta de adecuación se debe a que resultaría, por ejemplo, que $0 = 2$. Obsérvese que el hecho de que esta convención sea inadecuada demuestra, una vez más, que existe una idea intuitiva previa a la definición conjuntista de los números naturales. Una idea que nos dice que cada número natural es diferente de todos sus predecesores.

Por otra parte, en principio podría soslayarse la condición de que todos los conjuntos sean finitos. Por ejemplo, puede proponerse la siguiente convención, que llamaremos "convención del complemento". En ella, el primer elemento es $\mathbb{N}$, mientras que la función sucesor es $S(n) = n \setminus \{n\}$. Los primeros números naturales quedan definidos, entonces, de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
&0 = \mathbb{N} \\
&1 = \mathbb{N} \setminus \{0\} \\
&2 = \mathbb{N} \setminus \{0,1\} \\
&3 = \mathbb{N} \setminus \{0,1,2\}
\end{aligned}
$$

El costo de esta definición consiste en que es impredicativa, ya que la definición de cada número natural presupone la existencia del conjunto que los contiene a todos. Sin embargo, es posible modificar esta reducción de tal modo que no sea impredicativa.

En efecto, considérese en primer lugar el "axioma de infinitud", que es el mismo tanto para ZFC como para NBG. Este axioma dice que existe un conjunto A que contiene al conjunto vacío, y tal que si x pertenece a él entonces $x \cup \{x\}$ también pertenece a él. Usualmente este axioma se interpreta en el sentido de que el conjunto vacío es el número 0, que $x \cup \{x\}$ es el sucesor de x, y que A es $\mathbb{N}$. Pero puede eludirse esta interpretación y considerarse que $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \ldots\}$ sin atribuirle un significado ulterior. Nótese que resulta evidente que cualquier reducción no impredicativa de los números naturales, que esté basada en conjuntos infinitos, requiere de la definición previa de al menos un conjunto infinito.

Establecidas estas definiciones, puede proponerse la siguiente reducción, que se basa en conjuntos infinitos y que no es impredicativa.

$$
\begin{aligned}
&0 = A \\
&1 = A \setminus \{\emptyset\} \\
&2 = A \setminus \big\{\emptyset, \{\emptyset\}\big\} \\
&3 = A \setminus \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}
\end{aligned}
$$

Esta reducción permite, sin alterar la regularidad, definir el primer ordinal infinito como $\omega = \emptyset$, pero no sucede lo mismo con el ordinal $\omega + 1$, ni con los demás ordinales infinitos.

En resumen, las propiedades de adecuación deseables que debería satisfacer toda reducción de los números naturales a conjuntos son las siguientes:

i) La existencia y las propiedades de los diferentes conjuntos tienen que ser demostrables en el contexto de cualquier teoría axiomática de conjuntos (y, en consecuencia, en la teoría intuitiva).

ii) Todos los conjuntos tienen que ser finitos; o, en su defecto, las definiciones no deben ser impredicativas.

iii) La reducción tiene que ser extensible de manera no equívoca a la definición de los ordinales infinitos.

iv) La reducción tiene que ser biunívoca: cada conjunto empleado en la reducción tiene que corresponderse exactamente con un número natural diferente.

Finalmente, aunque estas condiciones limitan las convenciones posibles, no determinan una única convención. Por el contrario, son muchas las convenciones posibles que cumplen las cuatro condiciones de adecuación arriba indicadas. Por ejemplo, sea f es una función inyectiva cualquiera que a cada conjunto A le asigna un conjunto $f(A)$. Entonces puede definirse la convención-f de la siguiente manera: $0 = \emptyset$

y $S(n) = f(\{0,1,\dots,n-1\})$; para esta convención, el primer ordinal infinito es $\omega = f(\{0,1,\dots\})$. Nótese que la convención de von Neumann es el caso particular de la convención-f en el que $f(A) = A$.

9.6. Costos de las reducciones

Un costo de cualquier reducción de los números naturales a conjuntos es la existencia de enunciados referidos a los números naturales, bien formados en el lenguaje conjuntista, pero ajenos a la aritmética tradicional (así como a la idea intuitiva de número). Estos enunciados, por otra parte, serán verdaderos o falsos dependiendo de cuál sea la convención que se elija. A continuación, se muestran algunos ejemplos (donde n y m son números naturales):

a) Si $n < m$ entonces $n \in m$.
b) Si $n < m$ entonces $m \in n$.
c) Si $n < m$ entonces $n \subset m$.
d) Si $n < m$ entonces $m \subset n$.

También tiene sentido preguntarse por el resultado de operaciones que son ajenas a la aritmética tradicional, pero que son válidas entre conjuntos. Entre ellas, $n \cup m$, $n \cap m$ y $n \setminus m$.

En cuanto al valor de verdad de los enunciados, tanto si adopta la reducción de von Neumann, como la del conjunto potencia, los enunciados a) y c) se transforman en verdaderos, mientras que b) y d) resultan ser falsos. Es decir, en ambos casos, si $n < m$, entonces, $n \in m$ y $n \subset m$. Por otra parte, para la reducción de von Neumann, $n \cup m = m$ y $n \cap m = n$, $n \setminus m = 0$ y $m \setminus n = \{n+1,\dots,m\}$, por lo tanto, la diferencia conjuntista entre dos números no siempre es un número.

En cuanto a la reducción de Zermelo, $n \in m$ si y sólo si $m = S(n)$, y si $n < m$ entonces $n \not\subset m$. Por otra parte, siempre para $n < m$, vale que $n \cap m = 0$, si $n > 0$ entonces $n \cup m = \{n-1, m-1\}$, que no es un número. Por otra parte, $n \setminus m = n$ y $m \setminus n = m$. De este modo, los enunciados; $3 \in 5$; $3 \subset 5$; $3 \cup 5 = 5$ y $3 \cap 5 = 3$ son verdaderos según la definición de número natural de von Neumann y falsos según la de Zermelo. Por su parte, $3 \notin 5$; $3 \not\subset 5$; $3 \cup 5 = \{2, 3\}$ y $3 \cap 5 = 0$ son verdaderos según la de Zermelo y falsos según la de von Neumann. Otros enunciados son verdaderos en las dos: $3 \in 4$; $3 \cup 3 = 3$; $3 \cap 3 = 3$.

A continuación, se presentan de manera sistemática las cuatro reducciones de los números naturales a conjuntos analizadas en este capítulo, y se enuncian de forma generalizada las propiedades de cada una de ellas respecto de las relaciones y operaciones entre conjuntos. De esta manera, podrán advertirse claramente las semejanzas y diferencias entre cada una de ellas.

A) Reducción de Zermelo

Primer elemento: $\varnothing$
Sucesor: $S(x) = \{x\}$

Números naturales:
$0 = \varnothing$
$1 = \{\varnothing\}$
$2 = \{\{\varnothing\}\}$
$3 = \{\{\{\varnothing\}\}\}$

Propiedades:
1) $\forall x\ \forall y\ \Big((x \in y) \leftrightarrow \big(y\ =\ S(x)\big)\Big)$
2) $\forall x\ \forall y\ (\neg(x \subset y) \wedge \neg(y \subset x))$
3) $\forall x\ \forall y\ (x \cap y = 0)$
4) $\forall x\ \forall y\ \forall z(x \cup y = z\ \wedge\ z \notin \mathbb{N})$
5) $\forall x\ \forall y\ (x \setminus y = x) \wedge (y \setminus x\ =\ y)$

B) Reducción de von Neumann

Primer elemento: $\varnothing$
Sucesor: $S(x) = x \cup \{x\}$

Números naturales:
$0 = \varnothing$
$1 = \{\varnothing\}$
$2 = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$
$3 = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$

Propiedades:

1) $\forall x\ \forall y\ ((x \in y) \leftrightarrow (x < y))$
2) $\forall x\ \forall y\ ((x \subset y) \leftrightarrow (x < y))$
3) $\forall x\ \forall y\ ((x \cap y = x) \leftrightarrow (x < y))$
4) $\forall x\ \forall y\ ((x \cup y = y) \leftrightarrow (x < y))$
5) $\forall x\ \forall y\ ((x \setminus y = 0) \leftrightarrow (x < y))$
6) $\forall x\ \forall y\ \forall z\ ((x > y) \rightarrow (x \setminus y = z\ \wedge\ z \notin \mathbb{N}))$

C) Reducción del conjunto potencia

Primer elemento: $\varnothing$
Sucesor: $S(x) = \wp(x)$

Números naturales:
$0 = \varnothing$
$1 = \{\varnothing\}$
$2 = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$
$3 = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$

Propiedades:
1) $\forall x\ \forall y\ ((x \in y) \leftrightarrow (x < y))$
2) $\forall x\ \forall y\ ((x \subset y) \leftrightarrow (x < y))$
3) $\forall x\ \forall y\ ((x \cap y = x) \leftrightarrow (x < y))$
4) $\forall x\ \forall y\ ((x \cup y = y) \leftrightarrow (x < y))$
5) $\forall x\ \forall y\ ((x \setminus y = 0) \leftrightarrow (x < y))$
6) $\forall x\ \forall y\ \forall z\ ((x > y) \rightarrow (x \setminus y = z\ \wedge\ z \notin \mathbb{N}))$

D) Reducción impredicativa

Primer elemento: $\mathbb{N}$
Sucesor: $S(x) = \mathbb{N} \setminus x$

Números naturales:
$0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$
$1 = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$
$2 = \{2, 3, 4, 5, \ldots\}$
$3 = \{3, 4, 5, 6, \ldots\}$

Propiedades:

1) $\forall x\ \forall y\ ((x \in y) \leftrightarrow (x > y)) \wedge ((y \in x) \leftrightarrow (x < y))$
2) $\forall x\ \forall y\ ((x \subset y) \leftrightarrow (x > y)) \wedge ((y \subset x) \leftrightarrow (x < y))$
3) $\forall x\ \forall y\ ((x \cap y = y) \leftrightarrow (x < y))$
4) $\forall x\ \forall y\ ((x \cup y = x) \leftrightarrow (x < y))$
5) $\forall x\ \forall y\ ((x > y) \rightarrow (x \setminus y = \varnothing\ \wedge\ \varnothing \notin \mathbb{N}))$
6) $\forall x\ \forall y\ \forall z\ ((x < y) \rightarrow (x \setminus y = z\ \wedge z \notin \mathbb{N}))$

Adviértase que tanto la reducción de Zermelo como la de von Neumann tienen un costo en común: en cada una de ellas existen operaciones entre números naturales cuyo resultado no es un número natural. Según la convención de Zermelo, la unión entre dos números naturales nunca es un número natural, mientras que según la convención de von Neumann, el complemento relativo entre dos números naturales no siempre es un número natural. Más aún, el resultado de esas dos operaciones es un conjunto que no puede identificarse con ningún número en absoluto (ya que es posible probar que tampoco es un número entero, racional, real o complejo, al menos, según las convenciones usuales). En la aritmética tradicional, en cambio, esa situación no se presenta porque toda operación numérica es cerrada en el conjunto de los números complejos.

Por otra parte, puede verse que la reducción que llamamos "del conjunto potencia" tiene las mismas propiedades que la de von Neumann, por lo que no implica ninguna ventaja respecto de esta, pero tiene las dificultades que se han señalado antes. Por último, la reducción del complemento, que también hemos llamado impredicativa, tiene la consecuencia de que hay operaciones entre números naturales cuyo resultado no es un número natural. En esta reducción, el conjunto vacío no es un número natural y el complemento relativo entre dos números naturales cualesquiera nunca es un número natural (puesto que o bien es vacío, o bien es un conjunto finito).

Por último, si consideramos las cuatro condiciones de adecuación que hemos presentado, advertimos que todas las reducciones son biunívocas y pueden definirse en cualquier teoría axiomática de conjuntos. La definición impredicativa tiene la dificultad de que cada número natural se identifica con un conjunto infinito, cuando parece más natural identificarlo con un conjunto finito, como ocurre en las otras tres definiciones. Por otra parte, la definición de Von Neumann es la única de las cuatro que hemos considerado que resulta extensible de manera no equívoca a todos los ordinales infinitos. Así pues, es la única que cumple todas las condiciones de adecuación, por lo que resulta preferible cuando se la compara con las demás. Como ya señalamos, no se sigue de allí que sea la mejor convención posible en un sentido absoluto. Los desarrollos futuros de la matemática podrían implicar que esa definición no es apropiada para ciertos fines y debería reemplazarse por otra más adecuada. Pero hasta el momento, esta situación no se ha presentado.

9.7. El dilema de Benacerraf

En el Capítulo 5 se ha analizado el dilema de Benacerraf. Expresado brevemente, este dilema plantea la pregunta de qué es el número 2. ¿El número 2 es $\{\{\emptyset\}\}$? ¿O el número 2 es $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$? ¿O bien otro conjunto?

Desde el punto de vista de la solución convencionalista que se ha propuesto en el capítulo anterior, la respuesta a la pregunta de qué es el número 2 es la siguiente: el "número 2" es la formalización en el lenguaje matemático de una idea intuitiva basada en nuestras percepciones de las "cantidades pequeñas". De hecho, el número 2 es una idea asociada a la intuición que podemos describir como "la cantidad de piedras que tendré en la mano si tomo una piedra y a continuación agrego otra" o "la cantidad de progenitores de un ser humano". Como se ha visto en este capítulo, esa formalización puede adoptar diversas formas, por ejemplo, el 2 puede definirse como $\{\{\emptyset\}\}$, o como $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, o de muchas otras maneras. La elección de la formalización es solamente convencional.

En consecuencia, a la pregunta original de Benacerraf, "¿El número 2 es igual a $\{\{\emptyset\}\}$, o es igual a $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$?", la respuesta que corresponde dar es: "depende de la convención que se adopte". Pero, además, Benacerraf se preguntaba por qué el número 2 no puede ser "Julio César". La respuesta es que el número 2 podría ser "Julio César". En efecto, se podría adoptar una convención en la que los números naturales fuesen nombrados por personajes históricos, o por frases del idioma castellano (o cualquier otro). Una convención así sería legítima, pero, como dice Jorge Luis Borges en la cita siguiente, implicaría muchos más costos que beneficios.

> Me dijo que hacia 1886 había discurrido un sistema original de numeración y que en muy pocos días había rebasado el veinticuatro mil. No lo había escrito, porque lo pensado una sola vez ya no podía borrársele. Su primer estímulo, creo, fue el desagrado de que los treinta y tres orientales requirieran dos signos y tres palabras, en lugar de una sola palabra y un solo signo. Aplicó luego ese disparatado principio a los otros

> números. En lugar de siete mil trece, decía (por ejemplo) *Máximo Pérez*; en lugar de siete mil catorce, *El Ferrocarril*; otros números eran *Luis Melián Lafinur, Olimar, azufre, los bastos, la ballena, gas, la caldera, Napoleón, Agustín de Vedia*. En lugar de quinientos, decía *nueve*. Cada palabra tenía un signo particular, una especie marca; las últimas muy complicadas... Yo traté de explicarle que esa rapsodia de voces inconexas era precisamente lo contrario de un sistema numeración. Le dije que decir 365 era decir tres centenas, seis decenas, cinco unidades; análisis no existe en los "números" *El Negro Timoteo* o *manta de carne*. Funes no me entendió o no quiso entenderme. (Borges 1944: 116)

La convención propuesta por Funes no es incorrecta, así como no sería incorrecta una convención que identificara a la "cantidad 2" con el nombre "Julio César". Sin embargo, convenciones como estas implicarían un costo aún más alto que el de representar a la "cantidad 3" con tres piedras, o a la "cantidad 12" con ||||||||||||. Es decir, como se dijo en la introducción a este capítulo, haría sumamente dificultosa la definición de los números negativos, así como la de los racionales, reales y complejos; y haría casi imposible asimismo la definición de las estructuras algebraicas.

9.8. La Hipótesis del Continuo

¿Qué dice la solución convencionalista sobre de la Hipótesis del Continuo? Los axiomas y las definiciones de cualquier teoría axiomática de conjuntos son convencionales, sin embargo, tal como sucede con las reducciones de los números naturales a conjuntos, estos axiomas y definiciones deben cumplir ciertas condiciones de adecuación, una de ellas consiste en que la teoría tiene que ser lógicamente consistente, condición que no puede ser demostrada de manera absoluta, pero sí puede ser refutada por el hallazgo de alguna paradoja. En consecuencia, el estatus de las teorías axiomáticas de conjuntos es similar al de las teorías físicas, en el sentido de que nunca podrán ser verificadas en forma absoluta, aunque pueden llegar a ser refutadas.

Una segunda condición de adecuación que deben cumplir las teorías axiomáticas de conjuntos es que las propiedades que éstas demuestran (o postulan) para los conjuntos finitos "pequeños" deben ser coherentes con nuestras percepciones de las agrupaciones pequeñas de cantidades de objetos.

Considérese ahora la teoría, que llamaremos $ZFC \cup \{HC\}$, que se obtiene al agregar, a modo de nuevo axioma, la Hipótesis del Continuo a los axiomas de Zermelo-

Fraenkel (con el axioma de elección). Análogamente, sea ZFC $\cup$ {$\neg$HC} la teoría que se obtiene al agregar a ZFC la negación de la Hipótesis del Continuo. Suele llamarse "teoría cantoriana de conjuntos" a la primera teoría, y "teoría no cantoriana de conjuntos", a la segunda. Es decir, la Hipótesis del Continuo (tanto en su forma simple, como en su forma generalizada, es decir, la igualdad $2^{\aleph_n} = \aleph_{n+1}$) no es demostrable en ninguna teoría de conjuntos conocida, por lo que puede postularse mediante un axioma. Esto en sí mismo no es más sorprendente que el hecho de que la existencia del conjunto vacío o la existencia de conjuntos infinitos tengan que postularse mediante axiomas de contenido existencial.

Hasta donde se sabe, tanto ZFC $\cup$ {HC} como ZFC $\cup$ {$\neg$HC} son consistentes, de hecho, una es consistente si y sólo si lo es la otra. Además, en lo que respecta a los conjuntos finitos, ambas demuestran exactamente los mismos teoremas (y que son consistentes con nuestras percepciones sobre los agregados pequeños). Dado que ambas cumplen las dos condiciones de adecuación indicadas más arriba, ZFC $\cup$ {HC} y ZFC $\cup$ {$\neg$HC} resultan igualmente válidas desde el punto de vista de la solución convencionalista. A la pregunta de si la Hipótesis del Continuo es verdadera o falsa, esta solución responde, entonces, que "depende de las convenciones que se elijan". Nuestra posición es que ambas son teorías matemáticamente aceptables y que la elección de una o de otra depende del uso que se le quiera dar y de la conveniencia de emplearla.

La igualdad "$2 + 2 = 4$" será siempre una igualdad verdadera en cualquier teoría axiomática de la aritmética, sin importar las convenciones que se adopten, si estas cumplan condiciones de adecuación razonables (porque la igualdad "$2 + 2 = 4$" está asociada a percepciones inmediatas). La igualdad "$102 + 398 = 500$" también será invariablemente verdadera (porque se deduce, por aplicación de la lógica clásica, de esas mismas percepciones). Por el contrario, la Hipótesis del Continuo (es decir, la igualdad $2^{\aleph_0} = \aleph_1$) no está asociada a ninguna percepción inmediata, ni se deduce lógicamente de ellas, por lo que puede conjeturarse razonablemente que siempre será indecidible, principalmente porque en la práctica matemática la Hipótesis del Continuo, a diferencia del axioma de elección, no interviene en la demostración de muchos teoremas fundamentales. Por esa razón, los matemáticos no la consideran particularmente significativa.

Conviene cerrar esta sección mencionando otras condiciones de adecuación que debe cumplir una teoría axiomática de conjuntos, además de las dos mencionadas más arriba. Una de ellas consiste en que el lenguaje de la teoría debe tener la suficiente generalidad como para unificar semánticamente a la matemática actual. Es decir, todos los objetos de la matemática actual tienen que poder ser reducidos a conjuntos existentes en esa teoría. Otra condición deseable es que el lenguaje de la teoría sea simple. La simplicidad es en sí misma una propiedad imposible de definir con precisión, pero la idea general es que las reglas de formación, así como de interpretación, de los enunciados de la teoría sean sencillas y naturales. Cualquier teoría de conjuntos que cumpla estas condiciones de adecuación (consistencia lógica, coherencia con los agregados finitos pequeños, generalidad y simplicidad de lenguaje) será considerada válida desde el punto de vista de la solución convencionalista.

9.9. Balance

Nuestra respuesta al dilema de Benacerraf es que la identificación del número 2 con un determinado conjunto es una cuestión enteramente convencional. Es análogo a la pregunta de si el 0 pertenece o no al conjunto de los números naturales, o a la pregunta de si el número 30 tiene dos cifras. La única respuesta razonable, en nuestra opinión, es que todo ello depende de la convención que se adopte. De hecho, la reducción de los números naturales a conjuntos es también convencional, tanto como la reducción de toda la matemática. No hay hechos que pudieran decidir si los números son conjuntos o son otra clase de entidad, se trata de una pura decisión. Lo mismo vale para la propia teoría de conjuntos, no hay hechos que nos permitan comprobar si los conjuntos existen o no, ni mucho menos, cuáles conjuntos existen, todo ello debe postularse. En principio, sería posible elaborar una teoría de conjuntos en la cual no exista el conjunto vacío ni los conjuntos infinitos. Dicha teoría, sin embargo, no sería muy útil para la matemática y no permitiría deducir ni siquiera la aritmética de los números naturales tal como la conocemos (con todo, sería una teoría utilizable para la aritmética de la vida cotidiana, por ejemplo, para contar objetos en cantidades pequeñas). Tampoco hay hechos que pudieran permitirnos decidir cuál es la teoría de conjuntos verdadera, o “correcta”, en algún sentido del término, cualquier teoría de conjuntos que satisfaga las condiciones de adecuación que hemos enunciado es matemáticamente aceptable.

La condición de la consistencia implica que no pueden emplearse simultáneamente dos convenciones genuinamente diferentes (es decir, que sean incompatibles). Por otra parte, una vez adoptada una convención específica, es necesario aceptar todas sus consecuencias, que usualmente incluyen tanto costos como beneficios. La elección de una convención específica está determinada también por razones de parsimonia y de prudencia, así, por ejemplo, si una teoría de conjuntos resulta suficiente para unificar toda la matemática conocida, *ceteris paribus*, debería preferirse respecto de otras teorías más potentes. Este criterio favorece, por ejemplo, a ZFC sobre NBG o KM, como la mayoría de los matemáticos reconoce. No obstante, no puede descartarse la posibilidad de que la matemática del futuro requiera una teoría de conjuntos más poderosa. La elección de cualquier convención es revisable a la luz de la experiencia y de los resultados (deseados o indeseados) que produzca su empleo.

10. Conclusión

Ventajas y desventajas de la posición convencionalista

El objetivo principal de esta tesis ha sido proponer una solución original al problema filosófico de la existencia de los objetos matemáticos. En ese sentido, se ha intentado defender la postura de que la práctica matemática es convencionalista, es decir, que los axiomas y definiciones en los cuales se basa el trabajo de los matemáticos son elegidos convencionalmente y son establecidos por el uso de la comunidad matemática. Como apoyo a esta posición, se ha argumentado asimismo que las posturas alternativas más defendidas en la actualidad por los filósofos de la matemática, el platonismo matemático (en sus diferentes versiones), y el ficcionalismo matemático, no son concepciones sostenibles. En los capítulos 2 al 7 se ha hecho un estudio crítico de esas posturas, en el cual no se ha intentado analizar con detalle, ni tampoco refutar, los argumentos clásicos en torno de estas posturas, sino que se ha adoptado un criterio que no suele aparecer en las discusiones sobre el tema. Este criterio sostiene que una postura en filosofía de la matemática, para ser defendible, debe ser consistente con la práctica y con la historia de la matemática.

¿Cómo puede justificarse la adopción de este criterio? El objeto de estudio de la filosofía de la matemática es la ciencia matemática, considerada en todos sus aspectos. En otras palabras, la filosofía de la matemática estudia, entre otras cuestiones, cuál es la ontología de los objetos matemáticos, cómo podemos los seres humanos llegar a conocerlos, y mediante qué métodos es posible verificar las afirmaciones que se hacen acerca de ellos. (Esta tesis se ha ocupado solo del primer problema, pero las conexiones con los otros dos son muy estrechas, por lo que se los ha mencionado cuando esto se consideró necesario, aunque sin estudiarlos con detalle.) Una dificultad inherente a este análisis es que, a diferencia de lo que sucede con los objetos físicos de tamaño medio, el estatus ontológico de los objetos matemáticos no es para nada evidente y está, en consecuencia, constantemente sujeto a debate. Más aún, la propia definición de lo que es la matemática puede ser asimismo motivo de discusión. Si la naturaleza misma de los objetos matemáticos está en cuestión entonces ¿cuál puede ser un punto de partida válido para una filosofía de la matemática? ¿Cuál es el baremo por el cual nos inclinaríamos a favor de una postura específica en lugar de otra? La única manifestación concreta, y de existencia incuestionable, de la ciencia matemática son los artículos científicos, los libros de texto, las ponencias en congresos y otros registros similares. Este conjunto de textos es el producto final de lo que hemos dado en llamar “la práctica matemática”, y es precisamente en esos textos donde queda plasmada asimismo su evolución histórica. Debido a que este producto final es la única manifestación tangible asociada a la ciencia matemática, y si se desea que la filosofía de la matemática se refiera a la matemática en sí, resulta consistente proponer el criterio de que cualquier postura dentro de la filosofía de la matemática, para ser considerada sostenible, debe ser coherente con su contenido.

Se ha argumentado, en consecuencia, que ni el platonismo ni el ficcionalismo resultan compatibles con la práctica concreta de la matemática. A continuación, se recapitularán brevemente los principales argumentos críticos contra el platonismo y el ficcionalismo.

Un argumento clásico en contra del platonismo matemático, y que afecta a todas sus variantes, es la llamada “objeción epistemológica”. Tal como se analizó en el Capítulo 3, esta objeción parte del hecho de que, para el platonismo matemático, los entes que estudia la matemática son objetos abstractos que existen en un universo no espaciotemporal. En particular, como se demostró en el Capítulo 2, de la definición del concepto de objeto abstracto se deduce que estos serían causalmente inertes, es decir, no podrían ser causa de ningún fenómeno dentro del espaciotiempo, en particular, no podrían afectar nuestra percepción, ni nuestra memoria. Por lo tanto, si el platonismo matemático fuese verdadero, no habría ninguna manera de que los objetos matemáticos pudieran ser conocidos.

Con una sola posible excepción, cualquier versión del platonismo matemático quedará refutada por la objeción epistemológica. La posible excepción es la variante propuesta por Mark Balaguer, conocida como platonismo pleno. Esta postura afirma que cualquier teoría matemática lógicamente consistente describe verazmente una parte del reino abstracto de las matemáticas. En consecuencia, para el platonismo pleno, cualquier objeto cuya existencia pueda ser demostrada en el contexto de una teoría matemática consistente, efectivamente existe. De este modo, según Balaguer, para demostrar la existencia o las propiedades de un objeto matemático no sería necesario tener ningún tipo de contacto directo con él, sino que bastaría con estudiar alguna teoría consistente que lo describa. La falta de necesidad de contacto directo con los objetos matemáticos evitaría los problemas provocados por la objeción epistemológica.

La primera crítica que puede formularse a esta postura proviene del criterio de coherencia con la práctica matemática. De acuerdo con la visión del platonismo pleno, el trabajo del matemático consistiría en proponer y estudiar teorías formales que sean lógicamente consistentes. El origen de esas teorías es irrelevante, más aún, en palabras de Balaguer, el matemático podría haberlas "soñado". Es la consistencia lógica la que garantiza que las teorías describan correctamente objetos matemáticos. Por otra parte, las teorías son estudiadas aisladamente, hasta el punto de que los enunciados de una de ellas pueden ser contradictorios con los enunciados de otra, sin que esto conlleve un problema (en ese caso, cada teoría describiría una parte diferente del universo matemático). Sin embargo, tal visión no es consistente con los hechos conocidos de la práctica matemática. En particular, se contradice con la existencia de teoremas que son formulados en el contexto de una teoría, pero demostrados a partir de los axiomas de una teoría diferente, y también con la existencia de teoremas que son demostrados estableciendo una relación entre dos teorías diferentes (éste último, por ejemplo, es el caso del Teorema de Fermat).

Por otra parte, el platonismo pleno afirma que, una vez que se ha establecido que una teoría es consistente, ésta permite estudiar una parte del universo matemático. Pero del Segundo Teorema de Incompletitud de Gödel se deduce que no es posible demostrar de modo absoluto, usando los recursos de la propia teoría, la consistencia de una teoría matemática capaz de representar a la aritmética elemental. Justamente por eso, en la práctica matemática suele aceptarse que un sistema axiomático es consistente *después* de que se comprueba que describe correctamente algún modelo. El matemático no sueña un sistema de axiomas, luego determina si es consistente y entonces acepta que describe el mundo matemático, sino que postula las propiedades básicas de algún objeto matemático y luego formaliza esos postulados expresándolos como axiomas. En la práctica matemática el objeto matemático suele preceder al sistema axiomático que lo define.

Otra objeción que se ha estudiado expresa que, dado que las teorías formales son en sí mismas objetos matemáticos, entonces es posible formular una paradoja que, entendemos, permitiría demostrar que el platonismo pleno es autocontradictorio. Para formular la paradoja considérese la teoría formal que tiene como único axioma el enunciado $\exists x(C(x) \wedge \neg K(x))$. Estipulemos que la variable x recorre el universo de las teorías formales de primer orden, e interpretemos a $C(x)$ como "x es consistente" y a $K(x)$ como "x admite un modelo matemático". Dado que la teoría es sintácticamente consistente, el platonismo pleno permite concluir que el modelo que surge de la interpretación indicada más arriba describe correctamente una parte del universo abstracto de las matemáticas. Pero ese modelo está formado por teorías consistentes que no tienen un modelo, es decir, que no se refieren a ningún objeto matemático. Por lo tanto, de los postulados del platonismo pleno se deduce que existen teorías matemáticas que no se refieren a ningún objeto abstracto, conclusión que contradice esos mismos postulados y, por ende, el platonismo pleno es autocontradictorio.

Una respuesta a la paradoja consistiría en afirmar que el modelo que hemos propuesto para la teoría es autocontradictorio ya que, en lógica matemática, el teorema de Löwenheim–Skolem establece que toda teoría de primer orden consistente tiene al menos un modelo (cuyo universo es a lo sumo numerable). Pero esta objeción, que refutaría la paradoja, refuta asimismo la visión del platonismo pleno, ya que demuestra que las teorías matemáticas no existen aisladamente, no son independientes unas de otras.

Finalmente, en cuanto a la motivación inicial de Balaguer, en la bibliografía que es crítica del platonismo pleno no suele cuestionarse la afirmación de que esta postura, si fuese correcta, superaría el problema de la objeción epistemológica. Sin embargo, en el Capítulo 4 de la tesis se han planteado algunos cuestionamientos al respecto. Resumidamente explicado, uno de ellos expresa que, históricamente, cuando en 1902 se demostró que teoría intuitiva de conjuntos era inconsistente, esto no significó que los conjuntos fueran declarados inexistentes, sino que el concepto de conjunto se conservó y se formularon teorías axiomáticas de conjuntos en las que se introdujeron modificaciones lingüísticas o técnicas para evitar las paradojas conocidas

En el mismo sentido, supongamos, a modo de hipótesis, que la teoría de los números racionales fuese consistente, pero que, al agregar el axioma de completitud de los números reales, que permite demostrar la existencia de los irracionales, la teoría resultante resultase inconsistente. ¿Implicaría esto la inexistencia de los números irracionales? ¿O solamente implicaría la inexistencia de algunos de ellos? Y si este último fuera el caso ¿cuáles son los números irracionales que deberían conservarse? Estas observaciones indican que el criterio de existencia de los objetos matemáticos que propone el platonismo pleno, y que es la base de su intento de refutar la objeción epistemológica, contradice la práctica y la historia de la matemática.

Por otra parte, se ha señalado que no existe una relación unívoca entre la consistencia o inconsistencia de las teorías matemáticas, por un lado, y la existencia de los objetos postulados por estas teorías, por el otro. En primer lugar, la consistencia de una teoría no determina cuáles sean los objetos a los que dicha teoría se refiera; este hecho se muestra claramente en la existencia de modelos no estándar. Por ejemplo, si la aritmética de Peano de primer orden fuera consistente, no se seguiría de ello que solo los números naturales existan, ya que la teoría también tendrá modelos en otros dominios de objetos (de mayor cardinalidad que el conjunto de los números naturales). Podría decirse que, si una teoría es consistente, entonces, existen todos los objetos que constituyen los dominios de todos los modelos de dicha teoría, pero eso dejaría indeterminada la cuestión de cuáles son esos objetos. Por otra parte, del hecho de que una teoría sea inconsistente, tampoco se sigue que no exista ninguno de los objetos a los que se refiere la teoría. Como ya se indicó, la inconsistencia de la teoría de conjuntos de Cantor no implica que no exista ninguno de los conjuntos que pueden construirse según esa teoría, al contrario, parece evidente que los conjuntos finitos o numerables no son inconsistentes. En general, toda teoría inconsistente tendrá subteorías consistentes, por lo que los objetos a los que se refieren esas subteorías, según el platonismo pleno. deberán existir. En principio, no será obvio cuáles sean los objetos matemáticos cuya existencia es imposible según una teoría inconsistente y, en ocasiones no será posible determinarlo.

Aunque también queda refutada por la objeción epistemológica, resulta interesante detenerse brevemente en la variante del platonismo matemático conocida como estructuralismo *ante rem*, que es, junto con el platonismo pleno, la variante del platonismo matemático más defendida en la actualidad.

El estructuralismo *ante rem*, elaborado por Stewart Shapiro y Michael Resnik, sostiene que todos los objetos que estudia la matemática son posiciones en alguna estructura, y que todas sus propiedades relevantes provienen de sus relaciones con las demás posiciones en esa estructura. En otras palabras, para el estructuralismo *ante rem*, los objetos matemáticos no tienen propiedades intrínsecas, sino que todas sus propiedades son relacionales.

En el Capítulo 5 se ha intentado demostrar que la visión que propone el estructuralismo *ante rem* tampoco es consistente con la práctica matemática. Un problema que presenta esta postura, y que es muy discutida en la literatura sobre el tema, es el de la multiplicidad de los objetos matemáticos. En efecto, como la estructura de los números enteros es diferente de la estructura de los números reales, entonces, para el estructuralismo *ante rem*, el número 4 pensado como número entero sería un objeto matemático diferente del número 4 pensado como número real (o como número racional, o como número complejo), contrariamente a lo que se entiende en la práctica matemática.

También se presenta el problema de la multiplicidad de las estructuras. Por ejemplo, como se ha mostrado en el Capítulo 5, si se adoptaran los criterios del estructuralismo *ante rem*, entonces, la estructura de los números naturales escritos en binario sería diferente de la estructura de los números naturales escritos en base 10, por lo que el número 4 escrito en binario sería un objeto diferente del número 4 escrito en base 10. (Para justificar brevemente esta afirmación, considérese la relación "ser un prefijo de". En la escritura en binario, el número "cuatro" es un prefijo de "nueve", porque 100, la escritura en binario de "cuatro", es un prefijo, o sea, aparece al principio, de 1001, que es la escritura binaria de "nueve". Pero no sucede lo mismo en base 10, porque 4 no es un prefijo de 9. Como las propiedades relacionales son diferentes, las estructuras son asimismo diferentes.)

Por otra parte, también se ha mostrado en el Capítulo 5 que, si se aceptara la tesis del estructuralismo *ante rem*, entonces no sería posible definir coherentemente la operación de composición de funciones. Por lo tanto, si se apela al criterio de la coherencia con la práctica matemática, el estructuralismo *ante rem* no sería una postura sostenible.

El platonismo pleno y el estructuralismo *ante rem* son, en la filosofía de la matemática, las dos posturas realistas más defendidas en la actualidad. En cuanto a las posturas antirrealistas, la más defendida es la propuesta de Hartry Field conocida como ficcionalismo matemático. La tesis fundamental del ficcionalismo es que los objetos matemáticos no existen en absoluto y, por consiguiente, todos los enunciados universales de la matemática serían vacuamente verdaderos, mientras que todos los enunciados existenciales serían falsos. Sin embargo, esta postura no es consistente con la lógica clásica (que es, según se ha argumentado en esta tesis, la lógica subyacente a la práctica matemática). Por ejemplo, como se ha mostrado en el Capítulo 7, el enunciado "3 es primo" es equivalente a un enunciado universal, por lo que sería verdadero, pero también es equivalente a un enunciado existencial, por lo que sería, al mismo tiempo, falso. Es decir, si el ficcionalismo matemático fuese verdadero entonces "3 es primo" sería un enunciado simultáneamente verdadero y falso.

Asimismo, Hartry Field afirma que un enunciado atómico como "$2 + 2 = 4$" es verdadero fundamentalmente por la misma razón por la cual la afirmación "Oliver Twist vivía en Londres" es verdadera (en una suerte de verdad en la ficción, o verdad en una historia ficticia). Es decir, "$2 + 2 = 4$" es verdadero porque es parte de una historia muy conocida que así lo afirma: la historia de la matemática. Este criterio, sin embargo, desconoce el hecho de que no existe una única historia de la matemática, sino que la matemática fue desarrollada independientemente por diferentes civilizaciones (egipcia, sumeria, china, maya, griega, entre otras), y que, en todas esas historias, indefectiblemente se ha tomado como verdadero que dos más dos es igual a cuatro. Por lo tanto, no parece razonable sostener que se trata de una afirmación puramente ficcional, sino que "$2 + 2 = 4$" tiene que referirse a alguna realidad común a todas las civilizaciones humanas.

El análisis de los productos de la práctica matemática nos muestra que esta práctica es ontológicamente neutral, es decir, en sus artículos y textos los matemáticos evitan cualquier afirmación a favor o en contra de la existencia independiente de los objetos matemáticos. Sin embargo, como se argumenta en el análisis del ficcionalismo, la lógica de la práctica matemática, así como su historia, son inconsistentes con la tesis de que los objetos matemáticos no existen en absoluto. Y si aceptamos que los argumentos resumidos más arriba refutan el platonismo matemático, entonces, la lógica y la historia de la práctica matemática tampoco son consistentes con la afirmación de que los objetos matemáticos son entes abstractos. Resulta necesario, en consecuencia, proponer una solución alternativa que sostenga que los objetos matemáticos existen, pero que no son entes abstractos.

La solución que se propone, que puede considerarse como una forma de convencionalismo moderado, sostiene que la existencia de los objetos matemáticos, así como sus propiedades básicas, son postuladas (como ocurre con los conjuntos infinitos, por ejemplo) porque estos objetos resultan útiles, necesarios o convenientes para desarrollar la matemática. En muchos casos no hay hechos (concretos o abstractos) que determinen el modo de postularlos, y que puedan ser conocidos, ya sea por percepción sensible o intuición intelectual. Por ejemplo, no hay hechos que permitan determinar si existen o no conjuntos que sean infinitos en acto, la existencia de tales conjuntos es el resultado de una convención, que se acepta por su conveniencia para alcanzar ciertos fines.

En otros casos, sin embargo, (por ejemplo, en el caso de las operaciones entre números naturales) las convenciones, aunque siempre determinadas sobre la base de la utilidad, la conveniencia o la necesidad, están asociadas a ciertos hechos concretos. Es decir, el enunciado "$2 + 2 = 4$" se deduce de definiciones y axiomas convencionales que reflejan hechos asociados con la manipulación de cantidades pequeñas de objetos discretos.

La posición convencionalista permite dar una respuesta simple al famoso problema planteado por Paul Benacerraf respecto de la identificación de los números naturales con conjuntos. Se ha argumentado que, así como no hay ningún hecho que permita decidir si existen o no conjuntos infinitos, tampoco existe hecho alguno que permita determinar si el número 2 es el conjunto de Zermelo {{Ø}} o el conjunto de von Neumann {Ø, {Ø}}, o bien algún otro conjunto. La pregunta carece de contenido fáctico y es semejante a preguntar si existe o no la temperatura negativa. La respuesta a esta última pregunta, como es obvio, es puramente convencional, ya que depende de la escala de medición que se adopte. Igualmente, el problema de Benacerraf, como muchos otros de la matemática (por ejemplo, si el cero es o no un número natural) depende de una convención. Más en general, no hay ningún hecho acerca de si los números, las funciones o los demás objetos matemáticos son, o no son, determinados conjuntos, y en principio, podrían identificarse con cualquier otra clase de objetos. La propia adopción de la teoría de conjuntos como fundamento de la matemática es también el producto de una convención, basada fundamentalmente en la unificación del conocimiento matemático que resulta de ella.

Según la solución propuesta, los objetos matemáticos existen independientemente de las mentes individuales, pero no son entidades abstractas en un mundo platónico. Dependen de la especie humana para su existencia. En un sentido literal, tienen el mismo estatus que las creaciones culturales que son el producto de convenciones, como el dinero, el matrimonio o las personas jurídicas, es decir, las instituciones en general. Sin embargo, tampoco puede decirse que sean ficciones, sino que son objetos que existen en el espaciotiempo. Por otra parte, como toda creación cultural, los objetos matemáticos requieren algún soporte material, ya sea la tinta y el papel, la memoria de una computadora, o el cerebro humano. Por cierto, tales objetos dejarían de existir si no hubiera soporte material alguno que los conserve, y en particular, si dejaran de existir los cerebros humanos.

En conclusión, en esta tesis se ha sostenido que ni el platonismo, ni el ficcionalismo, son posiciones viables en la filosofía de la matemática. Ambas posiciones, además de presentar dificultades internas (ontológicas, epistemológicas o semánticas), resultan incompatibles con hechos fundamentales de la práctica matemática. Como alternativa a estas dos filosofías dominantes se ha intentado formular una posición convencionalista. Esta postura toma como punto de partida la tesis de que no hay hechos independientes que permitan determinar si los objetos matemáticos existen independientemente de los sujetos humanos, ni, mucho menos, que permitan determinar cuáles objetos matemáticos existen y cuáles no. La existencia de los objetos matemáticos es el resultado de convenciones adoptadas por los matemáticos, quienes postulan los objetos matemáticos que consideran necesarios, o convenientes, para desarrollar el conocimiento matemático. Tales convenciones, aunque siempre tienen alternativas posibles, no son arbitrarias, sino que, como todas las convenciones científicas, están guiadas tanto por hechos acerca de nuestra experiencia y nuestras prácticas cognoscitivas, como por criterios epistémicos no factuales, generalmente de carácter pragmático, tales como la simplicidad, la generalidad, la unificación del conocimiento, la facilidad de aplicación, la fertilidad, y otros de esa naturaleza.

Una ventaja de esta postura consiste en que evita todas las críticas que se han formulado tanto al platonismo como al ficcionalismo, en particular, es consistente con los hechos conocidos de la práctica y la historia de la matemática. Entre otras cosas, hace innecesario abandonar la lógica clásica y da cuenta de la diversidad de convenciones y usos que pueden constatarse en el desarrollo de esta ciencia. Por último, una crítica posible a esta posición podría relacionarse con la afirmación de que algunas convenciones están asociadas a hechos concretos, mientras que otras se basan exclusivamente en la necesidad, la utilidad o la conveniencia. Esta afirmación podría conducir a algunos cuestionamientos, tales como: ¿Existe algún criterio que permita decidir entre unas y otras? ¿Este origen no uniforme de las convenciones podría llevar a contradicciones? Futuras investigaciones permitirán analizar estas y otras preguntas similares.

Bibliografía

Apostol, T. (1999), *Calculus*. (Barcelona: Reverté).

Arquímedes (Trad. 1986), *El Método* (Madrid: Alianza Editorial).

Azzouni, J. (2004), *Deflating Existential Consequence: A Case for Nominalism* (Nueva York: Oxford University Press).

Azzouni, J. (2010), *Talking about Nothing: Numbers, Hallucinations, and Fictions* (Nueva York: Oxford University Press).

Baker, A. (1966), «Linear Forms in the Logarithms of Algebraic Numbers. I.» *Mathematika*, 13: 204–216.

Balaguer, M. (1998), *Platonism and Anti–Platonism in Mathematics* (Nueva York: Oxford University Press).

Balaguer, M. (2009a), «Realism and Anti–realism in Mathematics», en Irvine (2009: 35–101).

Balaguer, M. (2009b), «Fictionalism, Theft, and the Story of Mathematics». *Philosophia Mathematica*, III 17: 131–162.

Barrow, J. (1997), *¿Por qué el mundo es matemático?* (Barcelona: Grijalbo Mondadori).

Benacerraf, P. (1965), «What Numbers Could Not Be», *Philosophical Review*, 74 (1): 47–73.

Benacerraf, P. (1973), «Mathematical truth», *Journal of Philosophy*, 70: 661–80.

Benacerraf, P. & Putnam, H. (1983) (Comps.), *Philosophy of Mathematics: Selected Readings* (Cambridge: Cambridge University Press).

Bell, E. (1995), *Historia de las Matemáticas* (México: Fondo de Cultura Económica).

Bernays, P. (1935), «Sur le platonisme dans les mathématiques», *L'Enseignement mathématique*, 34 : 52–69. [Traducción inglesa en Benacerraf & Putnam (1983)].

Bostock, D. (2009), *Philosophy of Mathematics: An Introduction* (Chichester: Wiley–Blackwell).

Brand, W. & Deutchbein, M. (1930), *Introducción a la Filosofía Matemática* (Madrid: Revista de Occidente).

Borges, J.L. (1944), *Ficciones* (Buenos Aires: Emecé)

Brown, H. (1987), *Observation and Objectivity* (Nueva York: Oxford University Press).

Bueno, O. (2009), «Mathematical Fictionalism», en Bueno & Linnebo (2009: 59–79).

Bueno, O. & Linnebo, Ø. (2009) (Comps.), *Nueva Waves in Philosophy of Mathematics* (Basingstoke: Palgrave Macmillan).

Burgess, J. & Rosen G. (1997), *A Subject with No Object: Strategies for Nominalistic Interpretation of Mathematics* (Nueva York: Oxford University Press).

Caicedo, A. (2007), «Goodstein's function», *Revista Colombiana de Matemáticas*, 41 (2): 381–391.

Cantor, G. (1878), «Ein Beitrag zur Mannichfaltigkeitslehere», *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 84: 242–265.

Cantor, G. (1883), *Grundlagen einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre* (Leipzig: Teubner). [Traducción española en Ferreirós 2006].

Cantor, G. (1895), «Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre», *Mathematische Annalen*, Vol. XLIV: 481–512.

Chaitin, G. (2015), *El Número Omega (Límites y enigmas de las matemáticas)* (Buenos Aires: Tusquets)

Cohen, P. (1963–1964), «The Independence of the Continuum Hypothesis», *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 50: 1143–1148; 51: 105–110.

Cohen, P. (1966), *Set Theory and the Continuum Hypothesis* (Nueva York: Benjamin).

Colyvan, M. (2001), *The Indispensability of Mathematics* (Nueva York: Oxford University Press).

Colyvan, M. (2012), *An Introduction to the Philosophy of Mathematics* (Cambridge: Cambridge University Press).

Colyvan, M. & Zalta, E. (1999), «Review of Mark Balaguer's Platonism and Anti-Platonism in Mathematics», *Philosophia Mathematica* 7 (3): 336–349.

Davis, M. (1982), *Computability and Unsolvability* (Nueva York: Dover Publications).

Dehaene, S. (2011), *The Number Sense* (Oxford University Press, Nueva York). [Traducción al castellano: (2016) *El Cerebro Matemático* (Buenos Aires: Siglo XXI Editores)].

Dehaene, S. (2015), *La conciencia en el cerebro* (Buenos Aires: Siglo XXI Editores).

Descartes, R. (Trad. 1983), *Discurso del Método / Reglas para la Dirección de la Mente* (Buenos Aires: Ediciones Orbis).

Drake, F. & Singh, D. (1996), *Intermediate Set Theory* (Nueva York: Wiley).

Duhem, P. (1906), *La théorie physique. Son object, sa structure* (París: Chevalire et Rivière).

Dummett, M. (1978), *Truth and Other Enigmas* (Cambridge, MA: Harvard University Press).

Dummett, M. (1991), *The Logical Basis of Metaphysics* (Cambridge, MA: Harvard University Press).

Dummett, M. (2006), *Thought and Reality* (Oxford: Clarendon Press).

Enderton, H. (1977), *Elements of Set Theory* (Nueva York: Academic Press).

Ewald, W. (1996), *From Kant to Hilbert: A Source Book in the Foundations of Mathematics*, 2 Vols. (Nueva York: Oxford University Press).

Feferman, S. (1986) (Ed.), *Kurt Gödel. Collected Works. Vol I.* (Nueva York: Oxford University Press).

Feferman, S. (1990) (Ed.), *Kurt Gödel. Collected Works. Vol II.* (Nueva York: Oxford University Press).

Feferman, S. (1995) (Ed.), *Kurt Gödel. Collected Works. Vol III.* (Nueva York: Oxford University Press).

Ferreirós, J. (2006) (Comp.), *Cantor: Fundamentos para una Teoría General de Conjuntos* (Barcelona: Crítica).

Ferreirós, J. (2007), *Labyrinth of Thought: A History of Set Theory and its Role in Modern Mathematics* (Basel: Birkhäuser).

Ferreirós, J. (2015), *Mathematical Knowledge and the Interplay of Practices* (Princeton: Princeton University Press).

Field, H. (1980), *Science Without Numbers: A Defense of Nominalism* (Princeton: Princeton University Press).

Field, H. (1989), *Realism, mathematics and modality* (Nueva York: Basil Blackwell).

Field, H. (2001), *Truth and the Absence of Fact* (Nueva York: Oxford University Press).

Fraenkel, A. & Bar–Hillel, J. & Levy, A. (1973), *Foundations of Set Theory* (Amsterdam: North–Holland).

Galilei, G. (Trad. 1984), *El Ensayador* (Madrid: Sarpe).

García–Carpintero, M. (2016), *Relatar lo ocurrido como invención. Una introducción a la filosofía de la ficción contemporánea* (Madrid: Cátedra).

Garciadiego, A. (1992), *Bertrand Russell y los orígenes de las paradojas de la teoría de conjuntos* (Madrid: Alianza).

Gödel, K. (1931), «Über formal unentscheidbare Sätze der *Principia Mathematica* und verwandter Systeme I», *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 38: 175–178.

Gödel, K. (1938), «The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum–Hypothesis», *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 24: 556–557.

Gödel, K. (1939), «Consistency–Proof of the Generalized Continuum Hypothesis», *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 25: 220–224.

Gödel, K. (1940), *The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum Hypothesis with the Axioms of Set Theory* (Princeton: Princeton University Press).

Gödel, K. (1964), «What is Cantor's Continuum Problem», en Benacerraf & Putnam (1983: 470–485). [Versión corregida y aumentada de un artículo del mismo título publicado en 1947 en *The American Mathematical Monthly*, 54: 515–525].

Gray, J. (2000), *El reto de Hilbert (Los 23 problemas que desafiaron a la matemática)*, (Barcelona: Crítica).

Hellman, G. (1989), *Mathematics Without Numbers: Towards a Modal–Structural Interpretation* (Oxford: Oxford University Press).

Hellman, G. (1996), «Mathematics Without Structures», *Philosophia Mathematica*, 4: 100–123.

Hellman, G. (2001), «Three Varieties of Mathematical Structuralism», *Philosophia Mathematica*, 9: 184–212

Hellman, G. (2005), «Structuralism», en Shapiro (2005: 536–562).

Hersh, R. (1998), «Some Proposals for Reviving the Philosophy of Mathematics», en Tymoczko (1998: 9–28).

Hilbert, D. (1922), «Neubegründung der Mathematik», *Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität*, I: 157–177.

Hilbert, D. (1923), «Die logischen Grundlagen der Mathematik», *Mathematische Annalen*, 88: 151–165.

Hilbert, D. (1926), «Über das Unendliche», *Mathematische Annalen*, 95: 161–190. [Traducción inglesa «On the Infinite», en Benacerraf & Putnam (1983: 183–201)].

Hilbert, D. (1899), *Grundlagen der Geometrie* (Stutgart: Teubner). [Traducción inglesa en (1999) *Foundations of Geometry* (Illinois: Open Court Publishing)].

Irvine, A. (2009) (Comp.), *Handbook of the Philosophy of Science. Philosophy of Mathematics* (Ámsterdam: Elsevier B.V.).

Jacquette, D. (1996), *Meinongian Logic: The Semantics of Existence and Nonexistence* (Berlín: Walter De Gruyter).

Jacquette, D. (2007) (Ed.), *Philosophy of Logic* (Ámsterdam: North Holland).

Kalderon, M. (2005) (Comp.), *Fictionalism in Metaphysics* (Oxford: Clarendon Press).

Kelley, J. L. (1955), *General Topology* (Nueva York: Van Nostrand).

Keränen, J. (2001), «The Identity Problem for Realist Structuralism», *Philosophia Mathematica*, 9: 308–330.

Keränen, J. (2006), «The Identity Problem for Realist Structuralism II: A Reply to Shapiro», en Mac Bride (2006: 146-163).

Kirby, L. & Paris, J. (1982), «Accessible Independence Results for Peano Arithmetic», *Bulletin of the London Mathematical Society*, 14 (4): 285–293.

Kline, M. (1985), *Matemáticas, la pérdida de la certidumbre* (Madrid: Siglo XXI Editores).

Körner, S. (1974), *Introducción a la filosofía de la matemática* (México: Siglo XXI Editores).

Kunen, K. (2009), *The Foundations of Mathematics* (Londres: College Publications).

Lakatos, I. (1994), *Pruebas y refutaciones (la lógica del descubrimiento matemático)* (Madrid: Alianza Editorial).

Leng, M. (2010), *Mathematics and Reality* (Oxford: Oxford University Press).

Linnebo, Ø. (2017), *Philosophy of Mathematics* (Princeton: Princeton University Press).

Linsky, B. & Zalta, E. (1995), «Naturalized platonism versus platonized naturalism», *Journal of Philosophy* 92 (10): 525–555.

Linsky, B. & Zalta, E. (2006), «What is Neo-Logicism?», *Bulletin of Symbolic Logic*, 12: 60–99.

Lizcano E. (1993), *Imaginario colectivo y creación matemática* (Madrid: Gedisa).

MacBride, F. (2005), «Structuralism Reconsidered», en Shapiro (2005: 563–589).

MacBride, F. (2006) (Comp.), *Identity and Modality* (Oxford: Oxford University Press).

Maddy, P. (1980), «Perception and Mathematical Intuition», *Philosophical Review*, 89: 163–196.

Maddy, P. (1990), *Realism in Mathematics* (Oxford: Oxford University Press).

Maddy, P. (1999), *Naturalism in Mathematics* (Oxford: Clarendon Press).

Maddy, P. (2011), *Defending the Axioms: On the Philosophical Foundations of Set Theory* (Oxford: Clarendon Press).

Mancosu, P. (1998), *From Brouwer to Hilbert: The Debate on the Foundations of Mathematics in the 1920's* (Nueva York: Oxford University Press).

Mancosu, P. (2008) (Ed.), *The Philosophy of Mathematical Practice* (Oxford: Oxford University Press).

Martínez, G. & Piñeiro, G. (2009), *Gödel (Para Todos)* (Buenos Aires: Seix Barral).

Matera, G. (2012), *Análisis matemático* (Gral. Sarmiento: Universidad Nacional de General Sarmiento).

Mendelson E. (1997), *Introduction to Mathematical Logic* (Londres: Chapman & Hall).

Moore, G. (2013), *Zermelo's Axiom of Choice: Its Origins, Development & Influence* (Nueva York: Dover).

Morse, A. (1965), *A Theory of Sets* (Nueva York: Academic Press).

Mosterín, J. (2006) (Comp.), *Gödel: Obras completas* (Madrid: Alianza Editorial).

Newton, I. (Trad. 1987), *Principios Matemáticos de la Filosofía Natural* (Barcelona: Ediciones Altaya).

Niiniluoto, I. (1999), *Critical Scientific Realism* (Oxford: Oxford University Press).

Nolt, J. (2006), «Free Logics», en Jaquette (2007: 1023–1060).

Noriega, R. (2003), *Cálculo Diferencial e Integral* (Buenos Aires: Docencia).

Parsons, C. (1990), «The Structuralist View of Mathematical Objects», *Synthese*, 9: 303–346.

Parsons, C. (2008), *Mathematical Thought and Its Objects* (Cambridge: Cambridge University Press).

Poincaré, H. (1902), *Science and Hypothesis in The Foundations of Science* (Nueva York: The Science Press).

Quine, W.V.O. (1951), «Two Dogmas of Empiricism», *Philosophical Review*, 60: 20–43.

Quine, W.V.O. (1969), *Ontological Relativity and Other Essays* (Nueva York: Columbia University Press).

Reck, E. & Price, M. (2000), «Structures and Structuralism in Contemporary Philosophy of Mathematics», *Synthese*, 125: 341–383.

Resnik, M. (1981), «Mathematics as a Science of Patterns: Ontology and Reference», *Nous*, 15: 529–550.

Resnik, M. (1982), «Mathematics as a Science of Patterns: Epistemology», *Nous*, 16: 95–105.

Resnik, M. (1997), *Mathematics as a Science of Patterns* (Oxford: Oxford University Press).

Resnik, M. (2005), «Quine and the Web of Belief», en Shapiro (2005: 412–436).

Restall G. (2003), «Just What Is Full-Blooded Platonism?», *Philosophia Mathematica*, 11 (1): 82–91.

Rodríguez Consuegra, F. (1994), *Kurt Gödel: Ensayos Inéditos* (Barcelona: Modadori).

Rosen, G. (1990), «Modal Fictionalism», *Mind*, 99: 327–354.

Russell, B. (1976), «Letter to Frege», en Van Heijenoort (1976: 124–125).

Sainsbury, R. (2010), *Fiction and Fictionalism* (London: Routledge).

Searle, J. (1995), *The Construction of Social Reality* (Nueva York: The Free Press).

Shapiro, S. (1983), «Mathematics and Reality», *Philosophy of Science*, 50: 523–548.

Shapiro, S. (1997), *Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology* (Nueva York: Oxford University Press).

Shapiro, S. (2000), *Thinking about Mathematics: The Philosophy of Mathematics* (Nueva York: Oxford University Press).

Shapiro, S. (2005) (Ed.), *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic* (Nueva York: Oxford University Press).

Shapiro, S. (2006), «Structure and Identity», en MacBride (2006: 109–145).

Smullyan, R. & Fitting, M. (2010), *Set Theory and the Continuum Problem* (Nueva York: Dover Publications).

Sprecher, D. (1970), *Elements of Real Analysis* (Nueva York: Dover Publications).

Stark, H. (1967), «A Complete Determination of the Complex Quadratic Fields of Class Number One», *Michigan Mathematical Journal*, 14, 1–27.

Steiner, M. (2005), «Mathematics–Application and Applicability», en Shapiro (2005: 625–650).

Steinhart, E. (2002), «Numbers Are Sets», *Synthese*, 133: 343–361.

Tymoczko, T. (1998), (Comp.), *New Directions in the Philosophy of Mathematics* (Princeton: Princeton University Press).

van Heijenoort, J. (1976), (Comp.), *From Frege to Gödel (A Source Book in Mathematical Logic, 1879–1931)*. (Harvard: Harvard University Press).

von Neumann, J. (1923), «Carta a Ernst Zermelo del 15 de agosto de 1923», en Ferreirós (2006: 288–291).

Wigner, E. (1960), «The Unreasonable Effectiveness of Mathematics to Natural Sciences», *Communications in Pure and Applied Mathematics*, 13: 1–14.

Woods, J. (2006), «Fictions and Their Logic», en Jacquette (2007: 1061–1126).

Yablo, S. (2002), «Go Figure: A Path Through Fictionalism», *Midwest Studies in Philosophy*, 25: 72–102.

Yablo, S. (2005), «The Myth of the Seven», en Kalderon (2005: 88–115).