UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

FACULTAD DE FILOSOFÍA Y LETRAS

LA DEFINICIÓN EN LAS CIENCIAS DEDUCTIVAS

(Tesis)

de

Aarón Spivak

BUENOS AIRES

1924

LA DEFINICIÓN EN LAS CIENCIAS DEDUCTIVAS

LA DEFINICIÓN NOMINAL

En todo lenguaje ó sistema de signos ideográficos se presentan á menudo complejas asociaciones de símbolos, fijas é inalterables, que representan ciertas invariantes del proceso mental. Si un grupo "a" de símbolos se repite con frecuencia, se hace en ocasiones indispensable, por razones de economía, sustituirle otro grupo "x" más breve y más sencillo; así por ejemplo nos encontramos en la Aritmética con ciertos

(I) "números enteros mayores que I que no son el producto de dos enteros mayores que I",

que poseen propiedades curiosas y de alto interés científico; entran en la formación de todos los números enteros, son la base de los criterios de divisibilidad, etc. Tiene suma importancia el estudio de las propiedades de estos números; pero dicho estudio sería pesado y engorroso si se debiera emplear la frase (I) cada vez que fuese menester mencionarlos; no solo presentaría dificultades la exteriorización del pensamiento, sino también el mismo proceso del pensamiento, pueto que el pensamiento es inseparable del simbolismo que lo expresa. Cuantas más palabras fueran necesarias para pensar un concepto, tanto más tiempo nos llevaría hacerlo, y tanto más penosos nos sería.

Se crean entonces un nuevo símbolo "x", y se conviene que en adelante el símbolo "x" de más fácil manejo que el símbolo conocido "a", ~~podría~~ podrá reemplazarlo en cualquier parte donde se encuentre, y viceversa. Si expresáramos esta convención, como Burali-Forti y Pieri, mediante el signo≡, podríamos escribir

(II) x.≡.a

lo cual se leería: "x es igual á "a" por definición", "x significa a", "x tiene el mismo significado que a"; así se pone

Número primo.≡.número entero mayor que I que no es el producto de dos enteros mayores que I,

de modo que, en adelante, en vez de la (I), larga y fastidiosa, emplearemos la expresión "número primo", aliviando á nuestra memoria de una carga inútil.

Toda frase de la forma(II), en la cual "x" sea un símbolo nuevo y "a" un símbolo conocido, recibe el nombre de definición nominal.

La elección del signo x es en teoría enteramente arbitraria. En la práctica se escoge un signo de fácil manejo que satisfaga ciertas condiciones subjetivas de elegancia y sencillez.

La definición nominal no es una igualdad lógica, cuyo primer miembro sería el símbolo definido y el segundo el definiente; ~~porque~~ los símbolos ligados por un signo de igualdad tienen significado independientemente de la relación que los une, y lo poseen antes de haberla establecido; mientras que en la definición el símbolo "no significante" que se define adquiere un sentido gracias á la misma definición. Una igualdad entre dos signos afirma que el sentido que posee el uno es igual al que posee el otro, y este aserto, cuando no se postula, ha de demostrarse; debe ser el resultado de un razonamiento, debe ser una verdad que se imponga á nosotros de una manera indiscutible, una vez admitidas las premisas que la fundamentan. En una definición, por un acto de nuestro albedrío, atribuimos arbitrariamente á un símbolo que nada significa el significado de un símbolo conocido. Toda nueva igualdad que establecemos enriquece la ciencia, aumenta el caudal de nuestra sabiduría; ~~mientras que~~ una nueva definición solo facilita su manejo y su almacenamiento.

Una definición nominal no es tampoco una proposición en el sentido lógico del término, aunque sí en el sentido gramatical; ya que no puede ser verdadera ni falsa (proposición categórica), ni probable (proposición condicional), sino conveniente ó inconveniente; y aun esto de una manera antojadiza, pues lo que conviene á Fulano desagrada á Mengano, una definición buena para unos es incómoda para otros.

El significado de todo nuevo símbolo "x" depende de nosotros, "x" significa "a" porque nosotros hemos convenido en ello; pero una vez hecha la convención, es su sentido independiente de nuestro arbitrio, "x" representa un ente determinado. La expresión "x significa a" es entonces una proposición que expresa una verdad, la de que "a" es el significado de "x".

La definición nominal no es una proposición puesto que no determina ninguna propiedad del ente que se define, pero una vez enunciada y admitida desempeña en el proceso del razonamiento el papel de una proposición; de una proposición especial, que se invoca para poder sustituir el símbolo definido por el definiente, y viceversa.

Hemos dicho
~~Hemos dicho~~ que

$x . \equiv . a$

no es una igualdad, pero de ella se deduce que

(III) $x=a$

En efecto, si definimos con Leibnitz la igualdad incondicionada poniendo.

(IV) $x=y.=.$Toda propiedad de x es propiedad de y;~~y si "x" tien~~e y si "x" tiene una propiedad k, en virtud de la (II) que nos autoriza á reemplazar "x" por "a" en cualquier parte donde "x" se encuentre, posee tambien "y" la misma propiedad.

La igualdad (III) no atribuye significado á x, puesto que x ya lo posee-si no lo poseyera, la (III) careceria de sentido, ella solo afirma que el significado que x tiene gracias á la definición (II) es igual al de a.

La introducción de nuevos símbolos en el lenguaje común ó en el científico no obedece á ninguna necesidad teórica; pero en la práctica los signos nuevos son imprescindibles, no solo alivian la expresión del pensamiento, que es indispensable para almacenarlo y transmitirlo, sino lo que es más aun, el propio movimiento de las ideas. Si todo concepto nuevo debiera expresarse mediante combinaciones lógicas de algunos pocos términos, el juicio más sencillo en que se ligaran dos conceptos complejos requeriría páginas enteras para ser escrito, y horas para ser pensado. En realidad no habría pensamiento filosófico, artístico ó científico posible. El caudal de nuestras ideas sería tan exiguo que viviríamos en la más completa miseria intelectual. Mas de esto no ha de deducirse ~~se deduce~~ que cuando se forma un nuevo concepto sea menester crear para él un símbolo nuevo, puesto que caeríamos entonces en el extremo opuesto, no alcanzaría la vida de un hombre para conocer todas las palabras y signos ideográficos empleados en una cierta rama de la ciencia. Un conjunto complejo de símbolos se reemplaza por otro más breve y sencillo cuando constituye una asociación fija y permanente, y se repite de tal modo en el curso del pensamiento, que amenaza trabar, con su mole, el libre desenvolvimiento de las ideas; ó cuando lo imponen razones de elegancia en la exposición ~~expresión~~.

Las palabras y símbolos desempeñan en el intercambio de las ideas el mismo papel que los cheques y billetes de banco en las transacciones mercantiles. Si los pagos se debieran hacer en conchillas, como entre ciertas tribus africanas, ó en monedas de cobre, niquel ú oro, habría que llevar consigo bolsas pesadas y repletas para abonar una suma importante, ó tal vez un trén de carros cargados de monedas cuyo recuento haría perder un tiempo precioso. A fin de facilitar el intercambio comercial se han inventado justamente los billetes de banco que reemplazan talegos de piezas metálicas; y como tambien los billetes ~~son~~ eran incómodos para efectuar pagos muy grandes, fueron creados en su reemplazo, los cheques que realizan el máximo de economía y exigen el mínimo de esfuerzo. Un análogo proceso de simplificación se cumple en el lenguaje mediante las definiciones nominales.

La historia de la Ciencia nos muestra la gran importancia que han tenido en el progreso de la misma el empleo de símbolos y denominaciones técnicas breves y oportunos. La gran potencia de las ciencias matemáticas, según Mach, estriba en que han logrado ahorrar todo esfuerzo inútil y llevar hasta el extremo la economía del trabajo intelectual mediante la creación de un adecuado simbolismo.

<u>HOMOGENEIDAD DE LAS DEFINICIONES</u>

Se dice que un símbolo es constante cuando representa un ente particular, y que es variable si está indeterminado el objeto que representa, si es posible elegirlo arbitrariamente en una clase dada que constituye su campo de variabilidad.

Una proposición es categórica si en ella solo entran símbolos constantes, ó variables cuyo sentido no influye sobre la verdad de la proposición; es condicional si su verdad ó falsedad depende del significado de todas ó de algunas de sus variables.

Así:

la tierra es un planeta; si x es un hombre, cualquiera que sea x, x es un mortal; Newton era un francés

son proposiciones categóricas; ciertas las dos primeras; falsa la última. La verdad de la segunda proposición no depende de x, porque x es una variable aparente, es decir, una variable cuyo campo de variabilidad no es una determinada clase particular, sino el universo del discurso.

X es un número primo. Y es un filósofo

son proposiciones condicionales cuya verdad está subordinada al significado que demos á las letras x é y. Si á x damos el valor 7, y á y el valor Kant, tendremos dos proposiciones ciertas, pero ya no condicionales. Variables ~~tiables~~ como x é y de cuyo sentido depende la verdad de una proposición reciben el nombre de variables reales.

Como lo observa Padoa (V. La Logique Deductive, Paris, Gauthier Villars, 1912-pag.43), la distinción que hacen los matemáticos entre ecuaciones é identidades corresponde á la diferencia lógica entre proposiciones condicionales y categóricas.

$20+4=24$, Si a y b son números reales, cualesquiera que ellos sean, es $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$,

son identidades ó proposiciones categóricas, compuesta la primera de constantes y la segunda de variables aparentes. (La segunda proposición, si careciera de hipótesis, sería una proposición condicional, puesto que $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ no es cierta para todo valor de a y b).

$$ax^2+bx+c=0$$

es, suponiendo admitidas las hipótesis que le conceden un significado en el álgebra, una ecuación ó condición, cuya variable real es x, que es verificada por los valores

$$x'=\frac{-b+\sqrt{a^2-4ab}}{2a} \qquad x''=\frac{-b-\sqrt{a^2-4ab}}{2a},$$

el campo de variabilidad de x es pues la clase (x',x'').

Ambos miembros de una definición deben contener las mismas variables reales; esta es la ley de homogeneidad que expresa la única condición formal á que están sujetas las definiciones.

SI definimos un ente función de x é y, como función de x,y,z, siendo z una variable real, al variar z cambiará el valor del definiente, de modo que el mismo símbolo tendrá diversos significados.

Así por ejemplo si definimos una operación (?) entre números enteros poniendo:

$x?y=xy+z$;

dando á x,y,z respectivamente los valores 4,5,3, tendremos que

$4?5=4.5+3=23$;

Pero si hacemos $z=2$, será

$4?5=4.5+2=22$,

de donde

$22=23$,

lo cual es un absurdo. (V. Peano. Aritmetica generale e algebra elementare, pag, 64, Paravia, Torino, 1912).

Así tambien si definimos una operación μ entre racionales del siguiente modo:

si a,b,c,d son números enteros, cualesquiera que sean a,b,c,d es

$\frac{a}{b} \mu \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$, tendremos que

$$\frac{1}{3}\,r\,\frac{2}{5}=\frac{3}{8},$$

$$\frac{3}{9}\,r\,\frac{2}{5}=\frac{5}{14};$$

pero como

$$\frac{1}{3}=\frac{3}{9},$$

será $\frac{3}{8}=\frac{5}{14}$

(V. Peano, ob, cit, pag, 65.-Couturat, Les Déf. Mathematiques en L'Enseignement Mat. t.VIII. pag, 35)

Se puede legitimar una definición no homogenea demostrando que las variables que figuran en un miembro y no en el otro son aparentes.

Así por ejemplo se define la suma de racionales poniendo:

si a.b.c.d son enteros, cualesquiera que sean a.b.c.d. es

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd};$$

el ente definido es función de $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, el definiente de a,b,c,d; este último no queda determinado por la definición, porque un número racional x se puede poner bajo infinitas formas $\frac{a}{b}$. Hay que demostrar pues la univocidad de la operación definida, es decir que si

$$\frac{a'}{b'}=\frac{a}{b}$$

será

$$\frac{a'd+b'c}{b'd}=\frac{ad+bc}{bd}$$

DEFINICIONES POSIBLES

Una definición rigurosa de un ente conocido debe ser tal que se pueda deducir de ella todas las propiedades del ente que se define, recurriendo solo á las definiciones previas y á las proposiciones anteriormente admitidas y demostradas.

Si ponemos

$$\text{(I)}\quad x \equiv a$$

y b,c,d... son expresiones equivalentes á "a", reemplzando "a" en la (I) por b,c,d..., podríamos igualmente obtener todas las propiedades de x; puesto que si de "a" siguen m,n p..., y $a=b$, tambien de b se deducen m,n,p...

Si es $x\equiv a$ ya hemos visto que se verifica $x=a$, y si $a=b=c=\ldots$ entonces

$$\text{(II)}\quad x=a;\ x=b;\ x=c;\ \ldots$$

Las igualdades del (II) se llaman definiciones posibles de x.

En general, si el primer miembro de una

En general si el primer miembro de una igualdad lógica es un nuevo símbolo z que no figura en el segundo miembro, ó que figura en él con diverso significado, y todos los símbolos que en este último entran son conocidos, puede considerarse dicha igualdad como definición posible de z.

Así sean las igualdades

Clase nula = elemento x tal que si a es una clase dedúcese, cualquiera que sea a, que x es un a.

Clase nula = el único elemento x tal que si a es una clase dedúcese, cualquiera que sea a, que x es igual á la interferencia de a con su negación,

podemos elegir cualquiera de las dos como definición nominal de clase nula, siempre que los símbolos que entran en los segundos miembros de ambas igualdades sean conocidos. El único criterio que nos puede guiar en la elección es el criterio de conveniencia. Mas no debe creerse que esta arbitrariedad produzca desconcierto; puesto que si bien cada cual es libre de conceder á un símbolo que carece de significado el significado que más le plazca, á un símbolo que ya lo tiene no se le puede dar un nuevo significado en la misma teoría, sino que se debe usarlo en el que ya posee. Una vez convenido en que una determinada igualdad sirva de definición de un dado símbolo, las restantes definiciones posibles del mismo signo han de deducirse de la definición nominal elegida. Esta última es cierta por definición, por que hemos convenido en ello; la verdad de las otras nos la impone en cambio el rigor del razonamiento. Dadas todas las definiciones posibles de un símbolo, si elegimos una para convertirla en definición nominal, todas las otras se transforman ipso facto en teoremas, ó más bien en tesis de teoremas. De ahí que la misma igualdad sea unas veces definición y otras teorema, según el órden, según el modo con que se exponga ó sistematize la ciencia.

Preguntas del tipo: "¿cuál es <u>la</u> definición de x?", ó "¿es x = a <u>la</u> definición de x?" no tienen sentido porque de un símbolo puede darse infinitas definiciones. Cuando se pide una definición nominal de un símbolo x debe indicarse el campo de nociones en el cual se quiere definirlo, ó sea el conjunto de los conceptos lógicos y científicos que se suponen conocidos antes de definir á x.

Por lo general en un determinado campo de nociones existen diversas definiciones posibles de un mismo signo que le pertenece, entre las cuales es necesario elegir, como en el ejemplo ya citado de la clase nula en el Cálculo de las Clases. Una misma idea es definible en un campo y en otro no: la función "superficie de" no puede definirse en la Geometría Métrica Sintética, y sí, en cambio, en la Geometría Analítica, recurriendo al Cálculo Integral. Muchas igualdades que son definiciones posibles de un ente en el campo de todas las nociones científicas dejan de serlo en un campo restringido, así en los elementos de la Trigonometría Rectilínea no puede ponerse

$$\operatorname{tang} x \equiv \int \frac{dx}{\cos^2 x}$$

Es por último digno de nota el hecho de que si en una determinada teoría ordenamos de dos modos distintos los conceptos habrá entes que serán definibles en un órden é indefinibles en el otro. El "segmento", por ejemplo, que se define en la Geometria Elementare de Enriques e Amaldi (V. parte prima, pag. 3, Bologna, Zanichelli, 1921), es indefinible en la de De Franchis (V. Geom. Elem. ad uso dei licei, Sandron, Palermo).

El estudio del método de las ciencias deductivas nos muestra la inanidad de muchos pseudo problemas filosóficos. La Filosofia, se dice, es la ciencia de las verdades primeras ó últimas, de las verdades irreductibles, de las condiciones sine quibus non de todo tipo de conocimiento. Bien pues, la crítica del conocimiento científico ha puesto en claro que no hay tales verdades en sí irreductibles ó primeras, una proposición cualquiera, cualquier concepto puede ó no ser irreductible según se nos antoje. Carece de todo valor, que no sea estético ó económico, la clasificación de los conocimientos en primarios y secundarios, en logicamente (y realmente si se admite la posibilidad de establecer una correspondencia biunívoca entre ser y pensar) anteriores y posteriores. Una proposición aislada no tiene significado ni valor en la ciencia. Una proposición solo adquiere sentido é importancia científica cuando entra á formar parte de un sistema. Es el sistema, es el concatenamiento lógico el que hace ciertas ó falsas á las proposiciones, es el rigor deductivo el que les confiere certeza y significado. Los buscadores de verdades primeras recuerdan sin quererlo á los cuadradores del circulo, trisectores del ángulo é inventores del movimiento continuo. Los primeros jamás encuentran las verdades que buscan, sencillamente porque no existen, como los otros nunca logran cuadrar el circulo,trisecar el ángulo ,ó fabricar una máquina que se mueva eternamente por la razon muy sencilla de que el circulo no es cuadrable,ni el ángulo puede trisecarse,ni hay tal movimiento sempiterno é ininterrumpido.

DEFINICIONES IMPLÍCITAS

En la Lógica unicamente se consideraban definiciones del tipo de "x≡a",en las cuales el definiendo se reduce á una sola palabra.Respon-

[illegible]

dian á las preguntas "¿qué es tal cosa?","¿qué significa tal término?". Cada palabra tenia un significado por si misma,con independencia de los demás términos del lenguaje ó de la frase en que estaba incluida.Los símbolos representaban cosas,entes;una palabra era el signo de algo, de algún substratum,de alguna realidad fisica ó mental.I así se trepaba sobre palos enjabonados esforzándose por definir la masa,el peso,la temperatura,la igualdad,el número,la negación,etc;se le buscaba un contenido á los términos que expresan relaciones,funciones y operaciones. Tan solo se definian conceptos,no las funciones "número de","negación de","peso de",la relación "igual á",sino los conceptos de número.~~neg~~ negación, peso é igualdad. I como todo concepto implica una clase, su extensión, y como una clase es una reunión de "cosas", de ahí que tuviéramos pesos, números temperaturas y otras "cosas" por el estilo. Hubo matemáticos y filósofos que, por ejemplo, se devanaron los sesos por saber lo que es "el número" en si mismo, y que despues de largo meditar escribieron unos galimatias incomprensibles que nos dejan en ayunas acerca de lo que el número en si mismo puede ser.

En el último siglo las ciencias positivas, en modo especial la Matemática y la Física, han superado esta lógica infantil y grotesca que materializaba los signos abstractos del lenguaje, buscando un "no se sabe que", una "esencia", un "contenido", un "algo correspondiente en la realidad" en el fondo de cada concepto.

La Metódología moderna ha ampliado el reducido concepto de definición de la Lógica clasica considerando tambien las definiciones implicitas ó de frases, que responden á la pregunta "¿qué significa tal frase ó proposición?". Como ejemplo de tales definiciones podemos citar la que hemos dado, en el capitulo segundo, de la suma de racionales, en que definimos la expresión $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$ como equivalen-

~~tes~~ te de $\frac{ad+bc}{bd}$ de significado conocido. Una frase requiere definición si contiene un nuevo término, ó un término conocido que se emplea en un significado diverso del que posee, ó términos conocidos dispuestos en un nuevo órden, y no debe contener más de un signo no definido, porque si, por ejemplo, en $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$ no solo se empleara el signo $+$ en un uso distinto del común (entre números enteros), sino que tambien $\frac{a}{b}$ careciera de significado, podríamos y deberíamos por razones de economía reemplazar el símbolo complejo $\frac{a}{b}+$ por otro más sencillo, ó suprimir uno dando al otro el significado que tienen ambos juntos.

Estas definiciones tambien se llaman condicionales porque nos dan el significado de un término, ó, más exactamente, de la frase en que este figura, sujeto á ciertas condiciones enunciadas por una hipotesis antepuesta á la definición. La misma frase en otras condiciones ó hipótesis puede tener distinto significado, ó no tener ninguno; un significado tiene la expresión $x+y$ cuando x é y son números enteros, otro cuando son racionales, y ninguno cuando son sensaciones; una cosa ~~—~~ significa "negación de a" cuando a es una clase, y otra cuando es una proposición. La hipótesis que se antepone á una definición condicional consiste, comunmente, en la determinación del campo de variabilidad de las variables que entran en la expresión definida. A veces la hipótesis puede dejar indeterminado el campo, y, entonces, tendríamos definiciones implícitas incondicionales.

De un mismo símbolo ó de una misma frase que contiene un nuevo símblo puede darse innumerables definiciones, puede atribuírsele, haciendo variar cada vez la hipótesis, incalculables significados; pero si un signo se ha definido una vez condicionalmente, ya no se puede dar del mismo una definición explícita, incondicional, y viceversa. Determinando el sentido de un símbolo para todos los casos, su significado en un caso particular surge inmediatamente de su definición y de las definiciones de los demás signos que entran en la frase. Una definición explícita de un término vuelve superfluas é innecesarias todas sus definiciones condicionales. Está en nuestro arbitrio no dar á un signo, supongamos el de =, un sentido absoluto, sino definirlo caso por caso, haciendo variar arbitrariamente su significado al variar arbitrario de la hipótesis. Así podemos definir la frase "a = b", en el supuesto de que a y b sean clases, como equivalente de "a está contenido en b, y b está contenido en a"; en el supuesto de que a y b sean segmentos, como equivalente de "a es congruente con b", etc. Tambien podemos, por el contrario, definir la igualdad de una sola sentada, diciendo, verbi gratia, que dos entes cualesquiera x é y son iguales respecto á n clases distintas (pudiendo n ser infinito), si toda propiedad que posee x por pertenecer y solo por pertenecer á una cualquiera de dichas n clases, tambien la posee y (de modo que la igualdad tal como la entiende Leibnitz no sería sino un caso particular de la igualdad que nosotros definimos, el caso en que n fuese el universo del discurso). Esta definición es un ejemplo de definición implícita (hemos definido "x = y") que no es condicional, x é y son susceptibles de tomar cualquier valor dentro de cualquier clase; se podría, es cierto, hacer la hipótesis de que x é y son elementos, pero esto equivaldría á decir que la libertad en la elección de x é y es incondicionada.

Una vez que se ha definido la igualdad en general no se puede volver á definirla para cada clase que se considere, para las clases, proposiciones, números enteros, números reales, vectores, masas, etc.; así como una vez definida la suma entre enteros, no se puede definir otra vez la suma, y no hay necesidad de hacerlo, para los números primos.

Contra las definiciones implícitas se han elevado ciertas objeciones que abonadas por el nombre de sus autores parecen quitarles todo su valor, cómo que vendrían á contradecir nada menos que al mismo principio de contradicción (entendemos por tal, como lo hace Couturat, al conjunto de los principios llamados de contradicción y de tertio excluso). G. Frege en una carta dirigida á Peano-nos ocupamos especialmente de las objeciones de Frege porque resumen y caracterizan el concepto clásico de la definición-dice entre otras cosas: "So entscheidet z.B. Ihre Definition I,4,2 ob a gleich b sei, nur für den Fall, dass a und b Klassen sind; sie gibt also dem Gleichheitszeichen nicht unhabhängig von a und b eine Bedeutung; d.h. sie giebt ihm überhaupt Keine eigne Bedeutung. Ausser den beiden Fällen

a ist gleich b

und a ist nicht gleich b

bleibt hier noch als dritter Fall die Unentschiedenheit übrig, während doch die Logik Keinen dritten Fall duldet" (V. Revue de Mathematiques, t.VII, pag.56). Ahora bien, dada una proposición, para poder juzgar acerca de ~~su~~ certeza, debe haberse determinado antes si tiene ó no tiene sentido; así por ejemplo en el caso de que a y b sean clases, ó proposiciones, ó números racionales, etc, es decir, si a y b pertenecen á una misma clase, la expresión

(I) a = b

tiene sentido, ha sido definida y por lo tanto podrá ó no ser cierta, pero si a supongamos es una clase y b un indivuduo, ó si a es un número y b una sensación, entonces la (I) carece de significado; no es que siendo así haya un tercer caso que contradiría el principio de contradicción fuera de los de igualdad y desigualdad de a y b. La (I), en las hipótesis recientemente hechas, no es más que un dibujo inexpresivo; y de un conjunto de rasgos arbitrarios, de rayas y curvas trazadas al azar no puede afirmarse que sea cierto ni falso. Si ~~xyx~~ a y b no pertenecen á una misma clase, la (I) no es una proposición; y entonces no solo no cabe una tercera coyuntura además de las que permite la norma del tertio excluso, sino que ni aun son posibles las dos que ella autoriza. El principio de contradicción sale pues ¡gracias á Dios! incólume de la tremenda prueba á que lo someten las definiciones implícitas.

Mas aun no acabaron, como tal vez podría creerse, las fallas que ha encontrado Frege en las definiciones condicionales. Así agrega Frege en la ya mencionada carta que las definiciones que da Peano de la igualdad en su Formulario presentan además del comentado inconveniente, y entre otros, los que siguen:

Io) cada una de ellas es incompleta.

Definamos por ejemplo la expresión

(II) x+y,

siendo x é y enteros; esta definición sería incompleta según Frege porque no nos diría lo que significa (II) para otros valores de x é y. Aplicando este absurdo criterio, que desde ya haría imposible la existencia de ciencia alguna, no podrían definirse relaciones entre particulares clases de entes, por ejemplo: la suma de números, la congruencia geométrica que en el espacio á tres dimensiones intercede entre figuras uni y bidimensionales, el parentesco consanguineo que tiene sentido únicamente entre seres animados, é infinitas otras semejantes. Hablar de la congruencia ó del parentesco entre números ó entre virtudes sería un contrasentido; puesto que los números y las virtudes no son figuras geométricas, ni son animales. A la relación de congruencia se le puede dar, en clases distintas, significados diversos; pero cada uno de ellos requiere una definición especial, es imposible que con una sola definición se atribuya á una misma palabra distintos significados, salvo que puedan reducirse á uno solo, es decir que sean interpretaciones concretas de un único significado genérico. Una definición condicionada de una frase cualquiera A que contenga un nuevo término x solo sería incompleta si el sentido de A no quedara determinado por la definición, y se necesitase explicaciones ulteriores ó nuevas definiciones.

2o. El conjunto de todas ellas es tambien incompleto.

Las diversas definiciones que se da por ejemplo de la expresión "x=y" según que x é y sean clases, proposiciones, etc., determinan el significado del signo = en casos particulares; para obtener el significado cabal de la igualdad nos haría falta según Frege considerar el conjunto de todos estos casos particulares; pero los tratadistas no consideran las infinitas hipótesis que pueden hacerse acerca de x é y, arreglados estaríamos si qui-de las definiciones condicionales de la igualdad que hace un determinado autor, supongamos Peano, ó aun todos los autores sea para Frege incompleta, puesto que ella deja de considerar muchos casos en los cuales no se sabe si la igualdad subsiste ó no. Sea x una clase é y una proposición ¿"x = y" será cierta ó falsa? Peano y los demás lógicos que emplean las definiciones condicionales nada nos dicen que nos permita resolver este problema, el cual es en verdad muy difícil de resolver, como que no es problema ni cosa que se le parezca. "x = y", si x é y no son elementos de una misma clase "a", ó si la = no ha sido definida para dicha clase no es cierta ni es falsa, sino que simplemente no significa nada.

Una impresión desconsoladora produce en el ánimo la lectura de los tratados de Lógica General ultimamente aparecidos. Es imperdonable que haya autores de libros de Lógica que desconozcan, muchas veces voluntariamente, todo lo que han hecho en el campo de la Metodología los estudiosos de la llamada Lógica Matemática. Da grima ver que aun en el siglo XX no logre libertarse la mayoría de los lógicos de la tiranía del verbalismo, de las enojosas interpretaciones gramaticales, de las clasificaciones inútiles y absurdas, del ergotismo pedantesco, y del bizantinismo infecund

Creen los lógicos que lo único que les corresponde es cuidar y conservar la preciada herencia del Estagirita; sacudirle el polvo y mantener el lustre á la imperfectible creación de Aristóteles; glosar y parafrasear el Organon, cubrirlo de adornos de mal gusto, de barroquerías que ocultan aá la vista sus lineas sencillas y severas. I no se dan cuenta los ~~beatos~~ beatos que los siglos pasan y no en vano. que lo qûe era apto para explicar la contextura formal del pensamiento científico hace veinticinco siglos es hoy en día totalmente inadecuado para una tarea semejante, que no es rumiando á Aristóteles como lograrán edificar el Organon moderno, que sus materiales de trabajo deben procurárselos estudiando la Ciencia y sobre su Historia, fecunda en luminosas enseñanzas para el filósofo. Si abrimos algún tratado de Lógica publicado en el último veintenio, en el capítulo ~~xx~~del ~~razonamiento~~ razonamiento nos encontraremos con una clasificación minuciosa de ~~a~~ los silogismos según modos y figuras; en el del concepto con nuestros viejos y ya achacosos conocidos los conceptos positivos y negativos, claros y obscuros; en el capítulo de la definición veremos largas disquiciones sobre la definición esencial y accidental, completa é| incompleta, nominal y real; pero ni una palabra, ni una alusión siquiera á la reforma de la Logica realizada por los logistas, á la crítica de Poincaré, al análisis psicológico de Enriques, etc. Persisten los lógicos en no considerar sino las definiciones de conceptos ó clases, ignorando ¿de dónde lo van á saber? que en las ciencias deductivas su uso se restringe á medida que la ciencia se perfecciona, siendo reemplazadas, muchas veces con ventaja, por las definiciones implícitas, que contienen como un caso particular á las usuales definiciones de conceptos; puesto que, en efecto, definir una clase "a" equivale á definir la frase "x es un a", como ya lo reconociera el mismo Aristóteles. Se puede definir "hombre" como un término que connota tales ó cuales atributos, ó bien como un vocablo que aplicado á una cosa significa la posesión por esta cosa de los atributos tales ó cuales (V. Stuart Mill, Systeme de Logique, Paris, Ladrange, 1866, Tomo I, pag, 150). A medida que una ciencia toma un caracter más deductivo se hace en ella cada vez más preponderante, repetimos, el empleo de las definiciones de frases en lugar de las de palabras aisladas. En la Física moderna, por ejemplo, muchos términos de su lenguaje técnico como temperatura, peso, masa, etc, carecen de significado propio, no son nombres puestos á determinadas clases de objetos ni de sensaciones, sino signos convencionales que incluidos en ciertas frases les hacen dar un significado consistente, por lo general, en una experiencia ú observación realizable directamente por los sentidos. En Física "peso" no es cosa ni es sensación, no es nada; incluida en cambio la palabra "peso" en la proposición "peso de a = peso de b", confiere á esta última el significado de "a y b se equilibran colocados en los platillos de una balanza á brazos iguales".

No constituye para la Física ni para la Matemática ningún desmérito, no es signo de impotencia ó incapacidad el hecho de que ellas no definan explícitamente los vocablos peso, temperatura, potencial eléctrico, área, longitud, etc. I no lo es por la muy sencilla razón de que no lo hacen porque no pueden, sino porque no quieren; puesto que si quisieran fácil les sería dar definiciones nominales de todos esos términos, como lo veremos luego al ocuparnos de la definición por abstracción. Las palabras masa, peso, etc. no representan para los hombres de laboratorio ninguna esencia, ellos solo las consideran convencionalismos cómodos para expresar determinadas experiencias físicas. No existe cosa alguna que se llame masa, pero se ha convenido en expresar con la frase "la masa de a es igual á la masa de b el hecho de que dos cuerpos a y b posean el mismo peso puestos en un mismo lugar de la tierra.

DEFINICIONES POR ABSTRACCIÓN

Un caso particular de las definiciones implicitas lo constituye la definición por abstracción cuyo uso remonta á Euclides. En vez de dar una definición nominal de la razón de magnitudes, Euclides en el libro V de sus elementos, definición V, define la igualdad de dos razones diciendo: "nos dic que dato quatuor magnitudine, ratione de primo ad secundo aequa ratione de tertio ad quarto, quando sumpto multiplices de secundo et de tertio juxta ~~alio~~ uno numero arbitrario, et sumpto multiplices de secundo et de quarto juxta alio numero arbitrario, si multiplice de secundo es majore, aut aequale, aur minore de multiplice de primo, tunc in correspondentia, multiplice de tertio resulta majore, aut aequale, aut minore de multiplice de quarto" (V. Peano, Definitione de numeros irrationale secundo Euclide, Bollettino della Mathesis, 1915, pag, 32), lo cual podríamos traducir con el lenguaje del álgebra moderna:

Si a, b, c, d son magnitudes y m, n son números enteros, entonces

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} . = . ma \gtreqless nb \text{ implica } mc \gtreqless nd$$

En especial si a,b,c,d son numeros,poniendo b y a en lugar de m y n tendríamos

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} . \equiv . bc = ad$$

Muchos autores hacen uso de esta última ~~definición~~ proposición, en vez de la definición euclidea, para definir la razón de números. (V. Peano, art. cit.).

Los matemáticos y físicos posteuclideanos emplearon con harta frecuencia el procedimiento de Euclides para definir implícitamente funciones de entes conocidos. Los lógicos profesionales como es natural ignoraron y siguen ignorando, aun cuando presenta un gran interés filosófico, la existencia de las definiciones por abstracción, cuyo análisis fué iniciado el siglo pasado por Mach, Peano y otros autores.

Las definiciones que Peano bautizó llamándolas "por abstracción", tales como comúnmente son empleadas por los matemáticos, se presentan bajo la forma

(I) Si h(x,y), entonces $\varphi(x) \alpha \varphi(y) . \equiv . xRy$

h(x,y) es la hipótesis que se enuncia acerca de x ó y, que consiste por lo general en indicar la clase á la cual pertenecen, ó á la cual nos interesa mostrar que pertenecen, puesto que x é y pueden tener comunes muchas clases; φ es un signo de función, simple ó complejo, es decir $\varphi(x)$ puede tener la forma $f(x)$, ó $f(\varphi(x))$, ó $f(\varphi(z(x)))$, etc., en el segundo supuesto todas las funciones simples que entran en φ menos una deben tener significado independientemente de la (I); "$\varphi(x) \propto \varphi(y)$" es la proposición que se define como equivalente de la "xRy", ambas condicionales en x é y; $\propto$ es una relación conocida, R es otra relación tambien conocida que puede ser idéntica á $\propto$ y que debe satisfacer ciertas condiciones.

Si x, y, z pertenecen á la clase K, y R es una relación que intercede entre los elementos de dicha clase, se dice que R es reflexiva cuando se verifica

xRx

es simétrica si

de xRy sigue yRx

y es transitiva si

xRy é yRz implican xRz

Si la $\propto$ de (I) posee algunas de estas propiedades, que llamaremos "egualiformes", la R debe tambien poseerlas. En efecto pongamos que α sea reflexiva

$$\varphi(x)\alpha\ \varphi(x),$$

R tambien lo es por definición de $\varphi(x)\alpha\ \varphi(x)$: si fuese simétrica, es decir si

de $\varphi(x)\alpha\ \varphi(y)$ siguiera $\varphi(y)\alpha\ \varphi(x)$.

aplicando igualmente la definición tendríamos que

xRy implicaría yRx;

y, por último, siendo transitiva α lo es R, pues decir que

de $\varphi(x)\alpha\ \varphi(y)$ y $\varphi(y)\alpha\ \varphi(z)$ se deduce $\varphi(x)\alpha\ \varphi(z)$

es lo mismo que afirmar que

de xRy é yRz se deduce xRz

(V. Padoa. Dell'Astrazione Matematica en Questioni filos. pag. 96. Formiggini, Bologna-Modena, 1908).

De modo que antes de dar una definición por abstracción es necesario dejar explicitamente por sentado que R posee las mismas propiedades egualiformes que α, ó alguna otra proposición de la cual esta última pueda deducirse. El teorema anterior nos suministra pues un criterio para elegir α conocido R. Si las proposiciones que preceden á una determinada definición por abstracción no permitiesen afirmar ni negar que α y R poseen las mismas propiedades egualiformes, habría que agregar un nuevo postulado á los ya admitidos, un postulado que nos asegurara que R satisface la tesis del teorema de Padoa.

En particular, para que α sea la relación de igualdad es indispensable que R tenga las propiedades simétrica y transitiva, puesto que α también las pose. Supongamos que un físico quiera definir en la Teoría del Calor la igualdad de estado térmico, para ello debe cerciorarse ante todo de que la correspondiente relación R posee las propiedades antedichas. R en este caso es la relación: "no alteran sus propiedades físicas puestos en contacto ó en una misma cavidad termostática". Como la simetría de esta relación se observa en su enunciado, quedaría solo por demostrar que si dos cuerpos A y B no alteran sus propiedades físicas puestos en contacto ó en una cavidad termostática, y los cuerpos B y C se comportan entre sí de igual modo, entonces A y C tampoco varían sus propiedades físicas, etc. Esta proposición a priori indemostrable, es confirmada por la experiencia. Generalizando los resultados de las experiencias efectuadas la convertimos en un postulado, y tenemos así la llamada tercera ley del estado térmico. Ahora, una vez establecida la transitividad de R por la precedente ley, puede darse una definición por abstracción del estado térmico, en la cual α sea la relación de =. (V. Batelli-Cardani, Trattato di Fisica Sperimentale, vol. III, pag. 5, Vallardi, Milano, 1916).

A nuestro entender Mach y Maxwell cometen un error cuando afirman el carácter experimental de los axiomas de la igualdad. (V. Enriques, Per la Storia della Logica, pag. 144-147, Zanichelli, Bologna, 1922). Lo único cierto es que en la Física nada puede definirse por abstracción sin haber comprobado antes experimentalmente que α y R poseen las mismas propiedades eguliformes. Empleando el lenguaje de la Lógica clásica podríamos decir que las propiedades simétrica y transitiva son propiedades esenciales de la igualdad, son propiedades que entran en su ámbito comprensivo; si alguna de ellas se niega, queda negada la relación de igualdad. La igualdad no transitiva es tan inconcebible como un triángulo de cuatro lados ó un cuadrúpedo de dos patas. No pretendemos negar ~~con esto~~ la existencia de relaciones intransitivas.

figuras de más de tres lados, y animales de solo dos miembros locomotores; pero ellos de nigún modo son cuadrúpedos, triángulos, ni igualdades. De ahi que si no fuese cierto que ~~existen~~ temperaturas iguales á una tercera son iguales entre sí, tampoco sería cierto que existen temperaturas iguales. La temperatura en este caso podría tal vez definirse por abstracción pero α no sería la $=$. Supongamos que un elemento x pertenezca á una clase K, x necesariamente debe poseer todas las propiedades de K; faltándole alguna deja de ser cierta nuestra hipótesis. La igualdad por su definición es simétrica y transitiva, á una relación no transitiva no se le puede dar pues el nombre de igualdad, sino alguno compatible con sus propiedades. Dice Mach en "I principii della Meccanica", pag. 219, Albrighi - Segati, Roma, 1909: "Due corpi B e C, che agendo separatamente su A, si comportano come avessero la stessa massa, si comporteranno ancora come avente egual massa in un azione reciproca? Non n' e di necessita <u>logica</u> che due masse eguali ad una stessa terza siano eguali fra loro, poiche qui trattasi non di un problema matematico, ma di una questione <u>fisica</u>". La pregunta de Mach es obvia, porque habiendo masas iguales, forzosamente dos masas iguales á una tercera seran iguales entre sí; si esto último no se verifica, tampoco se verifica lo primero. En cambio el hecho de que A y B, y B y C se comuniquen aceleraciones iguales y directamente opuestas, obrando el uno sobre el otro, no implica que A y C se comporten del mismo modo, no hay en ello ninguna necesidad lógica; solo la experiencia nos lo podría imponer como verdad experimental. De que A y C tambien se comuniquen aceleraciones iguales, etc., depende el que podamos establecer la igualdad de A y B respecto á un ente abstracto de nombre arbitrario. La experiencia es condición indispensable para <u>definir</u> la igualdad en Física, pero no para que dos cosas iguales á una tercera lo sean entre sí.

La definición por abstracción solo nos permite emplear el símbolo de función φ y la expresión $\varphi(x)$ en frases del tipo de $\varphi(x) \alpha \varphi(y)$, en las cuales x é y satisfagan la hipótesis h(x,y); ella nos dice cual es el significado de $\varphi(x) \alpha \varphi(y)$, pero no atribuye ningún sentido al signo φ aislado ó á $\varphi(x)$. Así, por ejemplo, un geómetra en el supuesto de que x é y sean polígonos y de que "es equivalente á" sea una relación reflexiva, simétrica, y transitiva entre los elementos de la clase "polígono", después de haber puesto

(II) área de x = área de y. ≡ .x es equivalente á y,

no puede hablar de "área" en general, ni de "área de x " en particular; lo único que le es permitido es emplear la igualdad "área de x = área de y", que ha sido definida por la (II).

La definición por abstracción ha sido objeto en los últimos años de una recia crítica de parte de Russell y de algunos discípulos de Peano, especialmente de Padoa, Burali Forti y Macaferri. Esta labor crítica la examinaremos en detalle por venir de quienes viene, por su trascendencia metodológica ~~metológica~~, y porque pretende invalidar por completo la definición de marras

La (I), dice Burali Forti (V. Logica Matematica, 2da ed., pag., 352, Hoepli, Milano, 1919), define la relación $\varphi(x) = \varphi(y)$ - Burali Forti como la mayor parte de los tratadistas solo considera el caso en que φ es la relación de identidad (=) - en un caso particular, lo cual no es licito; porque sea que se defina, según Leibnitz, la relación x = y en general, sea que no se la defina, por el significado de identidad de dos elementos se tendrá siempre

~~(III) x = y. ≡ .~~

(III) $x = y . \equiv .$ Si a es una clase y x es un a, entonces y es un a,

y poniendo arbitrariamente $\varphi x = \varphi y$ idéntico á xRy, no se sabe si la (III) es satisfecha, y no se puede saberlo porque de φ conocemos unicamente la propiedad (I) que se pone por definición.

La definición por abstracción es una definición de frase ó definición implícita, y en estas lo que se define, como ya lo hemos hecho notar, no es un determinado símbolo que figura en la proposición sino la frase ó proposición entera. Así en la (I), en el supuesto de que α sea el signo $=$, no se define este último sino toda la igualdad, cosa que ya señalara Peano (V. La definisioni per astrazione, en Bollettino dellla Mathesis, 1915, pag.. 109).

Cuando se define una frase no puede ella contener más de un signo nuevo, los demás deben ser todos símbolos conocidos que conserven en la frase definida el sentido que con anterioridad se les ha atribuido por definición. Si en (I) el signo $=$ careciese de significado y solo lo adquiriera por su intermedio entonces φ debería haber sido definida previamente; puesto que no se puede definir una frase con más de un signo desconocido, no se puede definir una~~x~~ nueva relación ~~nueva relación~~ (la de igualdad) entre dos cosas que nose conocen ($\varphi(x)$ y $\varphi(y)$) y cuyas relaciones por lo tanto se ignoran. El signo $=$ conserva en la convención (I) el sentido que le atribuye la definición leibnizeana, ó el que se le haya arbitrariamente concedido. I en cuanto á que de φ solo conocemos la propiedad (I), cabe observar que de φ no conocemos ninguna propiedad, porque la (I) no define φ, sino toda la proposición $\varphi(x)=\varphi(y)$

Hace notar tambien Burali Forti que φ no queda definida al enunciar la definción (I); puesto que se puede dar á φ infinitos significados que la satisfagan, así en (II) en vez de "área de" puede ponerse "mitad del área de", "enésima parte del área de", "n veces el área de ", etc., sin que la proposición "área de x = área de y" cambie de sentido. Se puede tambien identificar φx á la clase Rx, por ejemplo "área de" á "clase de polígonos equivalentes á x".

Como ya lo dijimos, la definición por abstracción deja indefinida á φ, no le atribuye significado, ella solo se propone determinar el sentido de la proposición $\varphi(x)=\varphi(y)$. I en el supuesto de que á φ se le pudiese dar infinitos valores que satisficieran á la (I)-lo cual, luego lo veremos, no es cierto-, este hecho no invalidaría la definición que nos preocupa puesto que la frase definida significaria siempre lo mismo cualquiera que fuese el sentido que se le atribuyera á φ. La múltivocidad de φ no tendria influencia sobre la univocidad de $\varphi(x)\alpha\,\varphi(y)$, que es lo único que nos interesa. Los innumerables significados de φ no producirian ambigüedad, ya que la definición por abstracción en ningún caso nos autoriza á emplear el simbolo φ ó la expresión $\varphi(x)$ aislados, sino unicamente en la frase $\varphi(x)\alpha\,\varphi(y)$.

Supongamos que en la definición (II) pueda reemplazarse "área de" por "mitad del área de ", de modo que en identidad de hipótesis tendríamos

(II') mitad del área de x = mitad del área de y. $\equiv$. x es equivalente á y.

Ahora bien, "mitad del área de" tiene ó no un significado antes de enunciar la (II'). En el último caso, si es un operador simple, es decir si no es el producto funcional (Burali Forti), ó relativo (Russell) de varios operadores, la posibilidad de reemplazar "área de" por "mitad del área de", ó por otras expresiones semejantes, no es sino la posibilidad indiscutible de representar la misma idea mediante diferentes signos. "Área de" carece de significado, "mitad del área de" tampoco lo posee, al reemplazar la primera expresión por la segunda lo único que habremos hecho es representar la misma idea con un símbolo más complejo y más incómodo; esto es siempre factible, pero no ~~re~~presenta ningún interés, y además esto no quiere decir que "área de " pueda recibir innúmeros valores, sino todo lo contrario que el mismo significado se puede conceder á infinitos símbolos.

Si "mitad del área de" es el producto relativo de varios operadores aun no definidos, de "mitad de" por "área de", entonces la (II') no es una definición, porque el primer miembro contiene dos signos faltos de sentido.

Tampoco es la (II') una definición si "mitad del área de" ha sido definida antes de enunciarla, puesto que el definiendo no contiene ningún signo nuevo. Se sabe perfectamente lo que significa "mitad del área de" como asimismo el signo =, x é y pertenecen á una determinada clase según la hipótesis, siendo así ¿qué es lo que se definiría implícitamente con la (II')? ¿cómo puede definirse, es decir, determinarse el sentido de una proposición que de hecho ya lo tiene, que ya esta definida?

Nos queda todavía por examinar la hipótesis de que en "mitad del área de" "mitad de" posea un significado y "área de" no lo tenga. En este caso la (II') sería legítima, pero al enunciarla no habremos dado á "área de" un sentido diverso del que posee, puesto que no tiene ninguno, sino que habremos definido una proposición (II'), distinta de la (II) y de idéntico significado, que contiene también el símbolo inexpresivo "área de"; le habremos antepuesto á "área de" un signo conocido de función, cosa factible, ya que, como antes lo dijimos, en la definición por abstracción, φ puede ser simple ó compuesta; si es compuesta todos los operadores que la integran han de ser conocidos menos uno que es el que implícitamente se define por abstracción.

Toda la crítica de este procedimiento definitorio tiene como origen el haber confundido la definición

$$\varphi x = \varphi y . \equiv . xRy$$

que dejaría de ser definición si tuviese sentido propio, y en la cual φ por lo tanto no pueden recibir valores determinados, con la igualdad

$$\varphi x = \varphi y . = . xRy .$$

Es característico de las igualdades cuyos miembros son proposiciones condicionales, el que dada una de estas existan infinitas proposiciones de idéntico significado y de forma semejante, y tales que una pueda obtenerse de otra mediante la sustitución de uno solo de sus términos.

Los pretendidos defectos de la definición por abstracción si fueran ciertos y valederos, privarian ~~de~~ de su valor á todas las definiciones implícitas, y son ¡extraño contraste! los mismos que han reconocido á esta última su papel cada vez más preponderante en la ciencia deductiva, los que tratan de invalidarla con una crítica tenaz en que se hace muchas veces gala y derroche de sutilezas y bizantinismos.

Supongamos que se haya definido una proposición como equivalente de otra. La definición implica la igualdad de ambas proposiciones. Sea la igualdad en cuestión

$$\varphi(x,y) = f(x,y)$$

Esta no es la única igualdad condicional en x é y en que f(x,y) es el segundo miembro. Demos á $\varphi(x,y)$ el valor "x es hermano de y", y á f(x,y) el de "x es hijo del padre de y"; la última equivale tambien á "x es nieto del abuelo de y", "x es hijo de la mujer del padre de y", "x es tío paterno del hijo de y", etc.

~~Por lo general todas las funciones y relaciones se defin~~

Por lo general todas las funciones y relaciones se definen ~~n~~ implicitamente, así, por ejemplo, la igualdad, sea que se la defina caso por caso ó que se dé de ella una definición general. Supongámosla definida con Leibniz del siguiente modo.

x = y. ≡. Si K es una clase, y x pertenece á K, tambien y pertenece á K.

Las dos proposiciones son iguales, pero la segunda y por lo tanto tambien "x = y" es equivalente á "x es igual á un objeto igual á y", "x pertenece á la clase de los objetos iguales á y", "x no es igual á ningún objeto distinto de y", etc; cualquiera de estas proposiciones hubiéramos podido ponerlas en el primer miembro de la (III), siempre que todos los términos que entran en ellas fueran conocidos menos el término igual, y por lo tanto siempre que previamente á la (III) no tuviese sentido la expresión "es igual á un objeto igual á", ó "pertenece á la clase de los objetos iguales á", etc.

Dada la (III) está en nuestro arbitrio enunciar igualmente una

(III') x no es igual á ningún objeto distinto de y. ≡. Si A es una clase, y x pertenece á A, tambien y pertenece á A.

y así una (III''),(III'''),etc.;porque si bien una misma proposición no puede tener diversos significados,varias proposiciones pueden muy bien significar lo mismo.

Mediante la definición por abstracción,dada una relación R-reflexiva,ó simétrica,ó transitiva,ó reflexiva y simétrica,etc.-que intercede entre el par de elementos x é y arbitrariamente elegidos en una determinada clase K,podemos,anteponiendo á x é y un nuevo signo de función,reemplazar R por otra relación α -tambien reflexiva,ó simétrica, ó,transitiva,ó simétrica y transitiva,etc.-de más fácil manejo que la R.En particular si esta última posee todas las propiedades cáracterísticas de la igualdad,podemos reemplazarla por la identidad lógica;de modo que cualquier relación simétrica y transitiva,por ejemplo la congruencia,equivalencia,semejanza paralelismo,etc.,es reductible á la identidad;ó, lo que es lo mismo, cualquier identidad parcial ó relativa á la sola identidad absoluta.

Sea K una clase formada por los elementos x,y,z,...,estos elementos y solamente ellos pertenecen á dicha clase,pero todos ellos,por así decirlo,pertenecen á K de idéntico modo,en el mismo grado,todos poseen la misma "cantidad" de pertenencia á la clase K, x pertenece ~~á~~ á K tanto como y, ó z, ó u, ...; x, y, z, etc, son entre sí sustituibles en la relación

x pertenece á K;

todas las propiedades que cualquiera de ellos posee por pertenecer á k las poseen las restantes, es decir, de acuerdo con la definción que hemos dado de la igualdad, que x, y, z, u, ..., son iguales respecto á la clase K; mediante la definición por abstracción podemos transformar esta igualdad que es relativa, puesto que se trata de una igualdad respecto á, en una identidad total. Así por ejemplo, sea K la clase "hombre" constituida por Juan, Pedro, etc.; Juan y Pedro son iguales respecto ~~p~~ á la clase "hombre", el uno pertenece á ella tanto como el otro, Juan es tan hombre como Pedro, pero ellos pueden ser desiguales respecto al peso, altura, capacidad torácica, etc. La igualdad entre Juan y Pedro es parcial, son iguales respecto á algunas clases y desiguales respecto á otras. La definición por abstracción nos permite convertir esta igualdad respecto á una clase en una igualdad completa, respecto á todas las clases posibles, poniendo

$$\varphi x = \varphi y . \equiv . x \text{ é } y \text{ son hombres.}$$

(como en el lenguaje común habría que sustituir φ por alguna palabra ó expresión verbal, esta podría ser "hombría" ó "cualidad de hombre").

Algunos lógicos convencidos de que las definiciones por abstracción presentan inconvenientes insalvables estudiaron la posibilidad de prescindir de ellas sustituyendolas por definiciones explícitas, y se propusieron el siguiente problema: dada una clase K tal que entre sus pares de elementos x, y interceda una relación simétrica y transitiva R ¿existe y puede definirse una clase U cuyos elementos sean funciones de los elementos de K y tales que se verifique

(IV) $\varphi x = \varphi y . = . xRy$

Sea

(V) xRy

una relación entre los elementos genéricos x e y de la clase K;

llamemos á x antecedente y á y consecuente de R, y á la relación

(VI) $xR^{c}y$ ó yRx

la denominaremos conversa de R.

Si en la (V), dado x queda determinado y, es decir si á cada x corresponde un solo y, se dice que la relación R es unívoca; es biunívoca si es unívoca su conversa.

Russell ha demostrado que toda relación transitiva, simétrica y no nula equivale al producto relativo de una relacion unívoca por su conversa (V. Bertrand Russell, Sur la logique des relations, en Revue de Mathematiques, tome VII, 1901, pag. 121). De modo que si R es una relacion transitiva y simetrica se verifica que

(VII) $xRy . = . xSz . zS^{c}y$

ó tambien

(VIII) $xRy . = . xSz . ySz$

Sea R "es hermano de", entonces

(IX) x es hermano de.=.x es hijo de z.z es padre de y

(X) x es hermano de y.=.x es hijo de z.y es hijo de z

Ahora bien, si x y z estan ligados por la relacion S, es evidente que x pertenece á la clase de los que tienen con z dicha relación; de modo que

(XI) xRy.=.x e y pertenecen á la clase de los Sz;

en particular

(XII) x es hermano de y.=.x é y pertenecen á la clase de los hijos de z.

Es útil poner de relieve que la clase de los Sz es única; en efecto supongamos que exista otra relacion S_1 y otro element z_1 tales que

(XIII) xRy.=.x é y pertenecen á $S_1 z_1$

de las igualdades (XI) y (XIII) se deduce

(XIV) x é y pertenecen á $S_1 z_1$

lo cual solo es posible si

(XV) Sz.=.$S_1 z_1$

Hemos visto ~~pues~~ que una relacion simétrica y transitiva entre dos elementos x é y equivale á la pertenencia de dicho elemento á una clase K, y á su vez esta última relacion á la ~~elementos~~ de igualdad de x é y respecto á la clase citada. - Asi por ejemplo, siendo x é poligonos

(XVI) x es equivalante áy.=.x éy pertenecen ála clase de
los poligonos equivalentes al
poligono z.=.x éy son iguales
respecto ála clase de los po-
ligonos equivalentes áz.

Si pusiéramos ahora ~~ahra~~ arbitrariamente

(XVII) área ~~area~~ de z.=.clase de los poligonos equivalentes áz

y

(XVIII) U.=.clase, cuyos elementos son funciones "área ~~area~~ de"
delos elementos z de la clase polígono,

tendríamos simplificando,

(XIX) x éy son iguales respecto al área ~~area~~ de z

(por comodidad prescindiremos del elemento genérico ~~genrico~~ z como ha cen los geometras, quienes, considerando ~~al~~ el área un concepto abstracto, no citan el elemento z al enunciar la igualdad; de ahí que digan "x éy son iguales respecto al área" y asítambien respecto ála longitud, al ~~volúen~~ volúmen, etc.)

Si x éy son iguales respecto áuna clase K, si ambos pertenecen áella, es una evidente verdad de Perogrullo que la clase K áque pertenece el uno es igual ála clase K áque pertenece e otro; de modo que

(XX) área de x = ~~rea~~ área de y. =. x éy son iguales respecto al área. =. x es equivalente áy,

quedando asísatisfecha la condicion (IV)

Área de x vendría áser pues el nombre de la clase de los polígonos equivalentes áx, y ~~rea~~ área un operador que haría corresponder áun elemento de una cierta clase otra clase contenida en ella. Asítemperatura de x sería el conjunto de todos los cuerpos que estan en equilibrio ~~témico~~ térmico con x, longitud el de los segmentos engendrados por el libre movimiento de un segmento ~~rído~~ rígido en el espacio, etc. Esto no quiere decir que en realidad la temperatura de un cuerpo sea la clase de los cuerpos que están con él en equilibrio térmico; en realidad la temperatura no es nada, no es nada mas que un nombre, un rótulo que puede ponerse a cualquier objeto, a nosotros se nos ha ocurrido aquí, como podría no habersenos ocurrido, ~~llama~~ llamar temperatura a una determinada clase; el derecho que tuvimos para hacerlo nadie lo puede discutir. Ademas la temperatura tal como arriba la hemos definido, y la que comunmente se define por abstracción en los tratados de Física poseen el mismo algoritmo, de donde se ve que carece de todo valor lógico y científico, que carece de todo sentido el problema de la verdadera naturaleza de la temperatura, ~~si ella~~ ¿la temperatura es un conjunto de cuerpos ó una propiedad de los mismos? Para los fines que la ciencia persigue, le es por completo indiferente que el área, la temperatura, la masa, el peso, etc., sean considerados como conceptos abstmactos, ó como clases. Solo con propósitos didacticos ó estéticos puede distinguirse entre temperatura, grupo de objetos y temperatura ~~ficcion de un quid que les es com~~ ficción de un quid que les es común.

El procedimiento definitorio de Russell, el de las clases, choca evidentemente con el uso; nuestra mente debe violentarse para admitir que la virtud no sea más que el conjunto de las personas virtuosas, nuestra mente que está acostumbrada á considerar los objetos materiales, concretos, como síntesis de propiedades abstractas, de cualidades puras, de entes incorpóreos existentes per se, cuyo encuentro fortuito ó no da origen á los objetos de nuestra intuicion. La mente humana está naturalmente inclinada á emplear en sus razonamientos una Lógica comprensiva en que se manejen propiedades y no clases, en que los individuos, los elementos (simples) no integren conjuntos, sino que estén constituidos por propiedades. La Lógica comprensiva se acerca mucho á la Lógica natural, á la del razonamiento vulgar y de la especulacion metafísica, mientras que la Lógica extensiva es empleada en las más rigurosas especulaciones científicas, en las ciencias exactas, en las ciencias de tipo deductivo. Mas es necesario tener bien en cuenta que la una no contradice á la otra, que la una no puede existir sin la otra-es bien raro el razonamiento purista en que no, se apliquen las dos á la vez-,ambas son legítimas y posibles,ambas son equivalentes,la diferencia entre ellas es solo de forma,de lenguaje,de punto de vista;allí donde una dice:"Dante pertenece á la clase de los poetas",dice la otra:"la propiedad de ser poeta pertenece á Dante".Ambas lógicas estudian la misma realidad mental partiendo de diferentes puntos, y por lo tanto basándose en diferentes axiomas, ó si se quiere en los mismos axiomas enunciados con lenguajes distintos.Toda proposicion de la Lógica comprensiva tiene su equivalente en la extensiva,es traductible en el simbolismo de esta última,y viceversa.Si construimos una Lógica extensiva-en la cual el término "propiedad" no tiene sentido-los conceptos abstractos podran ser clases si así lo queremos-bien entendido que lo seran relativamente á dicha Lógica-,y los individuos serán en cambio reuniones de entes abstractos,inmateriales en una Lógica comprensiva-en la cual las clases no existen-y lo serán no en sentido absoluto,sino condicionalmente al último sistema de Lógica citado.

El método de las clases no es ~~le~~ el único que puede emplearse para definir los entes abstractos en el caso de que se prescinda de la definicion por abstraccion; Burali Forti, por ejemplo, los define como operadores que satisfacen determinadas condiciones, así pone

(XXI) dirección de A.=.el operador que aplicado á un punto X, arbitrario, produce la recta que pasa por X y es paralela á A.

(V. Burali Forti, Logica Matematica, II edizione, pag. 305, Milano, Hoepli, 1919).

Siendo rigurosa esta definicion, ha de deducirse de ella la igualdad

(XXII) dirección de A.=.clase de las rectas paralelas á A,

que la reemplaza en los sistemas de Russell y Padoa; y viceversa, si elegimos la (XXII) para definir la dirección, quedará de hecho convertida en teorema la proposicion (XXI), cuya certeza es inmediata; puesto que, en efecto, dado un punto X y la clase de las rectas paralelas á una recta A queda determinada la recta que pasa por dicho punto y pertenece á dicha clase, ó lo que es lo mismo queda determinada la recta sostén del haz de los planos que pasan por X y son paralelos á A.

EL PRINCIPIO DE PERMANENCIA DE LAS LEYES FORMALES

Hemos visto al ocuparnos de las definiciones implícitas que definida, en una determinada hipótesis, una expresión que contiene un nuevo signo, una frase que contiene un término nuevo, podemos en hipótesis distintas variar á nuestro arbitrio su significado, podemos concederle el sentido que más nos plazca. Después de haber definido por ejemplo la proposicion: "x es hijo de y"-en el supuesto de que x é y sean hombres-, estamos en completa libertad de darle el valor que nosotros queramos; ó de no darle ninguno, si los elementos x é y, ó x ó y no pertenecieran á la mencionada clase. Pero conviene ponerlo en relieve, este derecho es puramente teórico ó ideal, nunca sele pone en uso, lo impiden por una parte el instinto de economía que nos lleva á dar el mismo nombre á cosas parecidas, que nos lleva á conservar hasta donde sea posible el significado primitivo de los símbolos del lenguaje; y por la otra la inercia mental, madre del monismo según Papini, ~~que nos á identificar~~ cuyas consecuencias son la identificación de lo semejante, y el "descubrimiento" de caracteres comunes allí donde no los hay ~~donde no e-~~

"Si on fait une revue d'ensemble de la nomenclature en usage,on reconnaitra sans peine que ceux qui cultivent les sciences exactes ont en général montré une remarquable répugnance à introduire des termes nouveaux et une tendance très prononcé à utiliser les anciens dans des acceptions nouvelles" (V.Loria.Les Noms et les choses.L'Enseignement Mathematique,t.XX,pag.237-238).Sin dificultad se puede ampliar las ~~xx~~ observaciones de Loria respecto al simbolismo matematico á todo nuestro lenguaje,en todas las ciencias salta á la vista el mismo fenómeno.

Busquemos en un diccionario las diversas acepciones de la frase"x es hijo de",veremos que x en todas ellas es una cosa que procede,dimana ó deriva de y.Si y es un animal cualquiera,x es otro animal procreado por el primero;si y es una nacion,provincia ó ciudad,es decir si es un lugar geográfico,es x una persona natural de dicho pais ó lugar;si ~~xxx~~ x es una obra de ingenio,y es el hombre cuyo cerebro la dió á luz;etc.Para distinguir un significado de "x es hijo de y " de otro,es necesario conocer la hipótesis que condiciona á las dos variables.

Si decimos "Juan es hijo de Buenos Aires", y "Juan es hijo de Pedro" enunciamos dos ideas semejantes, pero no idénticas; es decir Juan no es hijo de Buenos Aires en el mismo sentido en que lo es de Pedro; parece pueril señalarlo ~~yx~~ ~~por~~ sin embargo son muchos los que lo olvidan ó ignoran y que, como luego lo veremos confunden la identidad formal de dos expresiones-de distintas hipótesis-con la igualdad material de sus significados. Este es ~~la~~ el origen de todos los sofismas del razonamiento vulgar y de muchos errores en el razonamiento científico.

El procedimiento de mantener en las sucesivas definiciones de un término lo fundamental de su significado primitivo se aplica constante y sistemáticamente en la Matématica, sobre todo en el Análisis, en el cual se ha querido sómeter á normas fijas la ampliacion del significado de los conceptos. Se ha transformado así una regla de método, un simple consejo, en una ley lógica gracias á la cual se sostuvo absurdos y se legitimó cosas sin sentido.

En 1845 enunció G.Peacock por primera vez en forma restringida el llamado principio de permanencia de lasleyes formales, que fué ampliado y generalizado por Hankel veintidos años más tarde. (V. Encyclopédie des Sciences Mathématiques, tome I, vol. I, pag. 25), dicho principio Schubert lo formula de este modo en la edición alemana de la misma enciclopedia, t. I, pag. II:

Prinzip der Permanenz in viererlei besteht: erstens darin, jeder Zeichen-Verknipfung, die keine der bis dahin defnierten Zahlen darstellt, einen solchen Sinn zu erteilen, dass die Verknipfung nach denselben Reglen behandelt werden darf, abstellte sie eine des bis dahin definierten Zahlen dar; zweitens darin, eine solche Verknipfung als Zahl im erweiterten Sinne des Wortes zu definieren und dadurch deb Begriff der Zahl zu erweitern; drittens darin, zu beweisen dass ~~fxx~~ für die Zahlen im erweiterten Sinne dieselben Sätze gelten, wie für die Zahlen im noch nicht erweiterten Sinne; viertens darin, zu definieren was im erweiterten Zahlengebiet gleich, grösser und minor heisst.

La operacion a:b, por ejemplo, carece de sentido cuando a no es múltiplo de b. es inejecutable, puesto que no hay ningún número (entero) que multiplicado por b nos reproduzca a. Pues bien en virtud del principio arriba transcripto daremos un significado a $\frac{a}{b}$, lo definiremos como el número (entero?) cuyo producto por b es a, y en esta forma será posible la operación imposible a:b; no creo que esto requiera muchos comentarios, ya que el absurdo surge ~~par~~ en cuanto se quiere llevar el principio á la práctica. $\frac{a}{b}$ es un ente contradictorio si en su definición llamamos número á los enteros; hemos afirmado, en primer lugar, que no exist ningún entero equivalente á $\frac{a}{b}$ -nos vimos obligados á hacerlo porque esa es una propiedad de la división- y luego le conferimos arbitrariamente existencia á fin de que sea realizable lo que á pesar de nuestra voluntad no puede realizarse. Si bien el sentido de un término cualquiera depende enteramente de nuestro albedrío, no sucede lo mismo con la existencia de los~~x~~ entes que definimos. Podemos crear un símbolo, pero ~~pero~~ no podemos crear su significado. Supongamos que en la definición de $\frac{a}{b}$ la palabra número indique una cosa distinta de lo que ~~con~~ con ella se suele indicar. habremos definido entonces un ente que no conocemos, $\frac{a}{b}$, mediante otro ente que tampoco conocemos, el número;

habremos definido lo desconocido por lo desconocido. Cualquiera podría ahora preguntarse ¿porqué se crea un ente cuando no es posible la división, y no se hace otro tanto en los demás casos de imposibilidad? "Non esiste il massimo numero primo; per le generalitá dell'aritmetica, fabbrichiamo un numero primo ideale maggiore di tutti i numeri primi, ecc. Ecquis risum teneat?-dice Gauss, a proposito di questa introduzione degli imaginari-hoc esset verbis ludere, seu potius abuti." (V. Peano. Sui fondamenti dell'Analisi. Bollettino della Mathesis, 1910).

El principio de permanencia despojado de ciertas condiciones que lo anulan, como la tercera acerca de la cual dice Peano: "Si omne regula et omne theorema super numero in senso non lato, subsiste per numero in senso lato, necesse est ut numero in senso lato es identico ad numero in senso non lato" (V. Peano. Principio de Permanentia. Revue de Mathémathiques, t. VIII. N. 3, pag. 85.), y privado de su pomposo título de principio puede ser y es de fecundas aplicaciones en la Matématica. "Non sub forma de principio absoluto, sed sub forma de consilio, lice quod nos dice: Quum nos introduce novo calculo es multo utile quod nos sume nomenclatura et notationa ita ut novo calculo fie quam maxime simile ad calculo antiquo". (V. Peano, art. cit. p. 86).

Un tiempo no se conocia más números que los que hoy se llaman números enteros con los cuales hay ciertas operaciones que no pueden realizarse en todos los casos, entre ellos por ejemplo la division; más tarde se vió la posibilidad de someter las expresiones $\frac{a}{b}$ consideradas como razones de números á un cierto calculo muy semejante, pero no idéntico, al de los números (enteros), y esta semejanza de algoritmo indujo á llamar tambien números á las razones, agregandoles el apelativo de fraccionarios para distinguirlos de los otros que se llamaron enteros; pero al hacer esto no se amplió la clase de los números como no se amplia la clase de los hijos-de animales-llamando hijos-de una tierra-á los nativos de ella ó hijos-de la fantasía-á los productos de dicha facultad del espíritu. Se objetará tal vez que la clase de los hijos de la fantasía~~, mientras que un número entero~~ no contiene á la de los hijos de hombre. Un hijo de hombre no es un hijo de la fantasía, mientras que un número entero x es un número racional $\frac{nx}{n}$.

Insistimos sin embargo en lo nuestro, puesto que la última aseveracion, como lo demostrara Russell es del todo falsa.
~~como lo demostrara Russell es del todo falsa.~~ Los números enteros no

son una clase particular de racionales, un número no es una razón de números, sino que pueden ponerse en correspondencia biunívoca con una determinada clase de racionales. Creemos que está al alcance de ~~todas~~ cualquier inteligencia que no es lo mismo que un objeto sea igual á otro, sea el otro, ó que solo le corresponda en una relacion. dada. La ampliación del concepto de número, ó del ámbito númerico de que tanto se habla en los tratados de Análisis Algebraico empieza por no ser tal ampliación; puesto que si bien el concepto de número irracional es más amplio, más extenso que el de número racional-la clase del primero es de potencia mayor que la del segundo-no por eso es una ampliacion del último concepto; ya que la clase de los irracionales no contiene-es de distinta naturaleza lógica-á la de los racionales. Á ciertas cortaduras les corresponden determinados números enteros ó fraccionarios, á todo número entero ó fraccionario le corresponde una determinada cortadura, pero ningún número es una cortadura.

Para Peano el principio de permanencia no es sino una de las tantas formas que asume el principio general de economía de que hablara Mach. ~~Verdaderamente digno de nota es el h~~

ra Mach. Verdaderamente digno de nota es el hecho de que las razones económicas vayan casi siempre aliadas con motivos estéticos. ¿No es acaso por razones puramente arquitectónicas podríamos decirlo que los algebristas han dado un sentido á expresiones como a^0, a^{-x}, etc.? La definición de potencia no confiere significado ninguno al símbolo a^0, pero á fin de que la nomenclatura algebraica no presente excepciones se ha aplicado el principio de permanencia, que Schubert llamó una vez "principle of no exception" (V. Vailati, Scritti, pag. 24, Seeber, 1911) y se convino en que a^0 sea igual á 1. Los matemáticos al exponer y sistematizar su ciencia procuran darle la máxima elegancia y generalidad, lo cual consiguen unificando la nomenclatura y suprimiendo las excepciones. En este sentido les es de inestimable ayuda el principio de permanencia. Tanto llega la preocupación por la simetría y la belleza arquitectónicas entre los cultores de las diversas disciplinas matemáticas, que no faltan analistas que lamenten ver afeada la Aritmética por la falla de la división por cero, única excepción que queda en el Analisis Algebraico, y que ha resistido todos los esfuerzos hechos por anularla. Es en cambio, para muchos geómetras motivo de orgullo y deleite la perfección estética de su ciencia, á que han llegado suprimiendo las lagunas que se presentaban ~~en~~ en sus diferentes capítulos; así gracias al principio de permanencia que permitió llamar punto á la ~~dirrección~~ dirección y á la orientación plano lograron las proposiciones referentes á planos y puntos la más completa generalidad.

Dijo cierta vez Poincaré en uno de sus sabrosos artículos sobre Filosofía de las Ciencias que la Matemática es el "arte de dar el mismo nombre á cosas diferentes". Hay en esta frase mucha verdad como asimismo mucha exageración. Poincaré no se propuso definir con ella la Matemática sino hacer resaltar, exagerándola, una de sus características. La Matemática no se reduce por cierto á ese arte porque su función no es solamente-como no lo es de ninguna otra ciencia-el de pegar etiquetas; ni siquiera es esa una función suya, no es un fin que ella persiga, sino tan solo un útilísimo procedimiento para distribuir y clasificar los conceptos.

El que la Matemática sea el arte de dar el mismo nombre á cosas distintas no hay que entenderlo en el sentido literal de la frase, no se trata de llamar mesa á una silla, ú hombre á un gato y reducir así el estudio de los gatos al de los hombres, el de las sillas al de las mesas. Cuando se presnta la necesidad de introducir un nuevo concepto, se procura ante todo averiguar si no es una ampliación de algún concepto conocido, de tal modo que este último sea un caso particular del primero, ó por lo menos corresponda unívocamente á uno de sus casos particulares. En la Teoría de los números racionales se presenta por ejemplo la necesidad de definir una nueva operación que designaremos provisoriamente con el símbolo (?), esta operación es uniforme, posee las propiedades conmutativa, transitiva y distributiva-que son propias también de la multiplicación de enteros-y es tal que si los racionales entre los cuales tiene lugar, supongamos a y b, corresponden de un modo unívoco a dos numeros enteros a' y b', su resultado c corresponde unívocamente al entero c' que se obtiene de multiplicar a' por b'; el principio de permanencia nos permite en este caso llamar multiplicación a (?), y extender al producto de numeros racionales, hasta donde sea posible, las regla de cálculo del producto de enteros, a fin de que se mantenga completa ~~que se mantenga completa~~

la correspondencia entre ambas operaciones.

IDEAS PRIMITIVAS

Definir un término x que no tiene significado es atribuirle -como ya lo hemos visto-por convención el significado de un complejo de signos conocidos, cada uno de los cuales a su vez, adquiere un sentido gracias a su definición correspondiente. Prosiguiendo así el análisis de las ideas de una determinada teoría científica hemos de llegar~~o~~ no a un término; forzosamente el análisis ha de dejarnos o no un residuo imposible de analizar. En el primer caso el último concepto que obtengamos, entrando en la definición de todos los demas conceptos de la teoría, no podrá ser definido mediante ninguno de ellos, será indefinible en dicha teoría respecto al orden descendente de complejidad que se halla establecido entre sus conceptos, será, como se usa decirlo, una idea primitiva respecto al orden y a la teoría arriba mencionados. En el segundo caso el análisis del significado de un término cualquiera trascendería las facultades humanas; puesto que requeriría un tiempo infinito, y por lo tanto una vida de duración infinita. En toda teoría científica es posible llegar mediante un número limitado de pruebas, de definiciones sucesivas y escalonadas, a un grupo de ideas que se introducen sin definir, no porque sean en si y por su esencia indefinibles mientras que las restantes no lo son, si no porque es imposible definirlas todas, porque la expresión "definirlas todas" carece de sentido. Dijimos al ocuparnos de las definiciones posibles que una misma idea en una misma teoría puede ó no ser definible según el orden en que la teoría se exponga. Por lo general se eligen las ideas primitivas entre los datos más elementales de la intuición. entre los que son el patrimonio de todo hombre normal, se trata siempre al exponer la ciencia que el grado de complejidad de los conceptos sea correlativo del grado de complicación de los correspondientes datos de la experiencia; pero en exposiciones no destinadas á principiantes. los autores guiados muchas veces por un interes estético ó económico-el anhelo de la simetría, el deseo de obtener el máximo resultado con el mínimo de medios posiblex, etc.-alteran el orden intuitivo y asumen como ideas primitivas conceptos sumamente complejos.

Ahora bien. á esas ideas que no se definen, deberemos atribuirles su significado intuitvo, subjetivo y variable, ó habrá algún medio para determinar indirectamente su significado, ó su uso en la ciencia mediante un procedimiento distinto de la definición? La solución de este problema es inseparable del que preocupara á Leibnitz ¿puede la ciencia construirse unicamente con definiciones? La Lógica moderna responde que no. Las proposiciones que constituyen una teoría son susceptibles de un proceso de reducción semejante al que hemos aplicado á las ideas, la casi totalidad de las cuales se obtiene de un pequeño grupo de conceptos mediante un número finito de operaciones lógicas; así tambien cada proposición se construye con otras (se deduce) aplicando operaciones lógicas semejantes á las arriba mencionadas. Pero no todas las proposiciones pueden demostrarse, puesto que si así fuera caeríamos en un círculo vicioso ó en un regreso al infinito. Á base de toda ciencia estan -además de las ideas primitivas- un cierto número de proposiciones tambien primitivas que se puden elegir con una cierta arbitrariedad, y cuyo carácter de indemostrables es relativo al órden que en la ciencia se dé á las proposiciones. El significado de las ideas primitivas queda hasta cierto punto determinado por los postulados que enuncian relaciones elementales entre dichas ideas relaciones elementales de las que han de deducirse todas las restantes. Los postulados impiden que se conceda valores cualesquiera á las nociones primeras, á las que debe darse un significado tal que les permita satisfacer las condiciones impuestas por las proposiciones primitivas. Á propósito dice Hilbert: "Lorsqu' il s'agit de poser les principes fondamentaux d'une science, l'on doit etablir un systeme d'axiomes renfermant une description complete et exacte des relations entre les concepts élémentaires de cette science. Ces axiomes sont en meme temps les definitions de ces concepts élémentaires; aucune affirmation relative a la science dont nous examinons les principes fondamentaux ne sera admise comme exacte a moins qu'on ne puisse la tirer des axiomes au moyen d'un nombre fini de deductions" (V/Padoa. Le problème N 2 de M. David Hilbert. L'Enseignement Mathematique, 1903, pag. 86)

Los postulados de una ciencia no son nunca ~~del todo~~ enteramente arbitrarios, en primer lugar porque las ideas acerca de las cuales se postulan ciertas relaciones no pueden ser sino primitivas. Como lo observa Couturat (V/Les Definitions Mathématique. L'Enseignement Mathématique, 1905, pag. 31), en toda teoría rigurosamente constituida cualquier proposición que contiene un término definido-perteneciente á la teoría-debe poder demostrarse substituyendo el definiendo por el definiente. Si los postulados no se refiriesen á las ideas primitivas, estas no podrían figurar en ningnna proposición derivada. Las proposiciones se reducen reemplazando en ellas los términos que contienen por sus definientes, de modo que las proposiciones más elementales se refieren á las ideas más sencillas, y á las nociones complejas corresponden nociones tambien complejas. La elección de los axiomas depende pues de la de las nociones primitivas; pero no está completamente determinada por estas últimas, porque para las mismas nociones primitivas puede construirse diversos sistemas de axiomas. Un conjunto de postulados debe ser tambien completo, debe ser suficiente para el desrrollo de la teoría, es decir, tal que todas las proposiciones que la constituyen puedan demostrarse con el solo auxilio de los postulados en cuestión, fuera de los de la Lógica y los de las otras teorías que se supongan construidas previamante. La misma exigencia ha de hacerse á los sistemas de nociones primitivas, los que deben ser suficientes para definir todas las restantes nociones. Los sistemas de postulados y de ideas son instrumentos de trabajo y por lo tanto provisorios y adecuados al fin á que se destinan: una nueva verdad científica impuesta por repetidas experiencias, y que no encaje en el sistema de axiomas ~~x~~en uso, pude obligarnos á cambiarlo por otro sistema más amplio, más completo, que permita transforma r la verdad experimental en verdad racional, que haga posible el empleo de la primera en el análisis deductivo-siempre fecundo-de la realidad. Tambien puede ocasionar el cambio de axiomas el hecho de que todos ellos ó algunos de ellos contradigan ciertas proposiciones de un dominio científico cercano. Así por ejemplo "la theorie moderne des quanta et la connaissance progressive de la structure interne des athomes ont conduit a des lois qui contredisent directement l'électrodynamique édifiée jusqu'a present sur les equations de Maxwell. C'est poutquoi a l'heure actuelle ~~L8élec~~ L'elec-trodynamique ~~trodynamique~~, ainsi que ~~chaque~~ chacun le reconnait, a imperieusement besoin d'une nouvelle base et d'une radicale transformation" (V/Hilbert. Pensée Axiomatique. L'Enseignement Mathématique, 1918, pag. 130). Prevemos desde ya una objeción ¿entre dos teorías físicas que se contradicen cúal es la verdadera? ¿cúal es el ~~carácter~~ criterio de verdad en la Física? Pues bien en la Física no hay tal criterio de verdad, no hay teorías verdaderas ni falsas sino solo teorías cómodas ó incómodas, aptas ó inaptas para el fin á que se destinan. Cada teoria se propone explicar determinados fenómenos ó conjuntos de fenómenos naturales, pero explicar en las ciencias de la naturaleza significa dar un modo de prever. Habremos explicado la lluvia cuando podamos predecirla. Supongamos que una teoria A permite prever el grupo f de fenómenos naturales, y que una teoria B explique los fenómenos g de los cuales f son un caso particular; la segunda teoria es evidentemente más económica que la primera, pues gracias á ella podemos explicar no solo f -el dominio de A no va más allá de f-, sino tambien todos los g que no son f. Es probable que haya alguna contradicción entre las dos teorias, pero la contradicción no residirá nunca en los hechos, en los datos de la sensibilidad, sino solo en la manera de explicarlos; porque si bien f entra en g como caso particular, no por eso es B una generalización de A. La Mecánica de Einstein no es más verdad que la de Newton sino más cómoda, explica todos los fenómenos explicados por la Mecánica newtoniana y algunos más que para la última constituian un verdadero misterio, como por ejemplo el adelanto del perihelio de Mercurio. Hay contradicción entre ambas mecánicas consideradas como modelos de la realidad, bien; pero no la hay entre los hechos que explican. Entre dos teorías se elige siempre la más útil, y la más útil es ~~más útiles~~ la que permite explicar mayor cantidad de hechos, "en postulant l'absence d'un effet de rayonnement tant qu'un électron se maintient sur un orbite donnée, Bohr va directement a l'encontre de la theorie classique. C'est la un des cas ou "la fin justifie les moyens", car, si l'on accorde le postulat, on peut obtenir un certain nombre de re sultats notables, comme Bohr l'a montré" (V. Lewis. La Structure Atomique et la Quantisation. Scientia, 1924, pag. 41 del Supplément). Hoy en día vuelve a estar en boga la Teoría Atómica; más, entendámonos bien, nadie afirma que efectivamente existen átomos, sino que la hipótesis átomica nos permite explicar ciertos fenómenos hasta ahora incomprensibles; hoy nos es más comódo suponer que la materia está dividida en particulas irreductibles, manana quizá debamos cambiar de hipótesis, quizá debamos elegir una contradiga á la que nos es tan útil en estos momentos, á fin de volver explicables y previsibles ciertos hechos que ahora desconocemos." Rutherford suppose que les électrons tournent autour du noyau sur des orbites circulaires ou elliptiques. Ce qui le conduisit a representer l'atome come formant ~~comme formant~~ un systeme planétaire, c'est son desir d'expliquer la dispersion des particules α et β par les atomes de matiere" (V.Lewis,art.cit.pag.40-41).Rutherford no dice que los atómos son en realidad sistemas planetarios,pero le conviene admitirlo para explicar así la dispersión de los rayos α y β.I en resumidas cuentas¿los atómos son ó no son sistemas planetarios? No son ni no lo son.Podemos afirmar a priori la posibilidad de crear ó fabricar,si se quiere,otros modelos de atómo gracias á los cuales ~~en que~~,como en el caso del modelo astronómico,quede explicada la dispersión de los citados rayos.

Fuera de las condiciones ya enunciadas ,los postulados y nociones primitivas deben satisfacer tambien la de ser compatibles,es decir tales que no haya dos postulados ó nociones que se contradigan.Es una cerdad muy vieja y ~~muy~~ ya bien sabida que la ciencia como toda forma de conocimiento busca lo idéntico en lo diferente,lo uno en lo múltiple, la ciencia continuamente abstrae y generaliza,el pensamiento ~~más~~ científico más perfecto-el del matemático-es el más abstracto y más general;la ciencia sigue un proceso ascendente que va de lo concreto,del individuo á la fórmula matemática que en su breve y escueto lenguaje explica una multitud de fenómenos.La ciencia existe gracias á que objetos diversos en determinadas circunstancias se comportan del mismo modo, á que hecho al parecer sin ninguna relación se explican mediante teorías formalmente coincidentes; es decir mediante teorías tales que, vaciándolas de su contenido intuitivo, concreto, resultan ser una misma teoría genérica. Así por ejemplo son idénticos los procedimientos que se emplean para determinar la tangente á una curva, la velocidad en un punto, los coeficientes de dilatación, la ofelimidad elemental, etc. que se reducen al sencillo cálculo de una derivada. El Análisis diferencial resume pues variadas teorías geométricas, mecánicas, físicas, económicas, etc. Aquí se nos aparece bajo una nueva luz la ya comentada frase de Poincaré de que la Matemática es el arte de dar el mismo nombre á cosas diferentes; en efecto cosas tan distintas como una tangente y una velocidad se identifican en el concepto de derivada; la teoría de las ecuaciones del Algebra, la de las congruencias respecto á un módulo primo de la Teoría de los Números, y la de las congruencias respecto á un ideal primo de la Teoría de los Números Algebraicos que son exteriormente consideradas tres teorías independientes, resultan ser simples casos particulares de una teoría más general cuando se introduce en la Matemática el concepto de campo numérico (V. Scorza. Il valore educativo della matematica. Esercitazione Matematiche, 1923, pag. 266). La ciencia que nos preocupa, deductiva por excelencia, es al mismo tiempo la que más generaliza, demostrando de este modo cuan absurdo es el concepto clásico de la deducción, procedimiento que consistiría en ir de lo general á lo particular; en la matemática justamente se realiza un proceso inverso, como lo demostrara Goblot en el capítulo de su Traité de Logique dedicado al razonamiento matemático. Para evitar equivocos creemos conveniente poner de relieve que si una ciencia más ó menos concreta, por ejemplo la Geometría considerada como ciencia del espacio físico, se transforma en ~~ciencia de la~~ teoría formal, en sistema hipotético-deductivo, lo hace siempre á expensas de su propia personalidad. La Geometría abstracta no es más la Geometría común, sus rectas no son rectas, ni sus puntos puntos; es una ciencia más general que la Geometría clásica, que comprende en sí á esta última como una de sus posibles determinaciones, como una de las tantas interpretaciones de que es susceptible. Si en la proposición "Juan ama á Pedro" les quitamos á sus términos su significado concreto, si las vaciamos de significado obtenemos ~~al~~ la proposición condicional "aRb" que no es de ningún modo igual á la primera;a no es Juan,b no es Pedro y R no es "ama a"."aRb" no solo no tiene el mismo significado que "Juan ama á Pedro", sino que carece por completo de sentido,unicamente podría adquirirlo si se diese á sus términos determinados valores.Pues bien, así como la proposición condicional "aRb" no es la proposición categórica "Juan ama á Pedro", así tampoco la Geometría abstracta es la Geometría común.En el caracter formal de toda proposición científica, cada vez más acentuado á medida que la ciencia se perfecciona,en el ~~empeo~~ empleo de variables cuyo campo de variación es más ó menos restringido reside la posibilidad de demostrar ó más bien comprobar la compatibilidad de un sistema de axiomas.Si encontramos para el conjunto de las ideas primitivas que entran en los postulados por lo menos un sistema de valores,un sistema de significados tal que todos los axiomas sean satisfechos,diremos que estos últimos son compatibles.

Supongamos que un geometra quiera comprobar la no contradicción de los principios fundamentales de su ciencia;gracias al caracter abstracto que revisten,le será posible construir diversas interpretaciones de los entes geométricos por él admitidos como irreductibles que satisfagan á todos los postulados.El geómetra podrá escoger una interpretación intuitiva,concreta, en cuyo caso le será necesario admitir la posibilidad de real y la invariancia de los datos de la intuición.Para conseguir su objeto habrá distribuido todos los entes en dos clases,y habrá tomado un elemento de una de estas clases para que le sirva como interpretación empírica de su geometría,¿más bien le asegura á nuestro matematico que su clasificación es predicativa, es decir invariable?.En vista de los graves inconvenientes y de las dificultades irremisibles que presentan las comprobaciones empíricas de la compatibilidad de los axiomas, el geómetra que nos ocupa buscará-y fácil le será encontrarla-una interpretación racional de los mismos.Habrá á disposi-

ción suya interpretaciones en dominios geometricos restringidos, así ~~x~~
los matemáticos italianos mostraron que estaban exentas dee contadic-
ción las geometrías de Lobatchevsky y de Riemann, interpretandolas co-
mo capítulos de la geometría euclidea ó en dominios científicos diver-
sos, por ejemplo en la Lógica(Frege y Russell), en la Aritmética (Hilbert)
etc. Supongamos que el geómetra elija una interpretación aritmética, pues
bien-se le dirá- ¿cómo está Vd. seguro de la compatibilidad de los axio-
mas de la Aritmética? Le será necesario entonces repetir para esta lo
ya hecho para la Geometría, luego á su vez comprobar la consistencia de
la interpretación escogida, y así sucesivamente; pero por las mismas ra-
zones que impiden definirlo y demostrarlo todo es imposible comprobar
la no contradicción de todas las teorías científicas. De una á lo menos
debe postularse su compatibilidad. ¿De cual? Estamos completamente libres
de elegir á placer nuestro la teoría(que podríamos llamar) primitiva.
El orden de las ciencias no se ha fijado de antemano, son nuestras con-
veniencias personales las que lo determinan.

Los que hayan leído á Poincaré y crean en su infalibilidad como l
católicos en el dogma de la pureza de María alegarán á todo esto: "muy

bien,admitamos que A sea una teoría primitiva cuyos postulados serán supongamos a,b,c,d ye.Al sistema(a,b,...e)debemos agregarle el postulado f que afirma a priori su compatibilidad;más luego será necesario postular á su vez lo mismo del sistema (a,b,...e,f).Tanto valdría decir que el principio del silogismo debe entar como premisa en todo silogismo,de donde tendríamos silogismos con tres premisas,lo que implondría un principio del silogismo nuevo para hacer posible dicho silogismo de tres premisas,y así ad aeternum.Es verdaderamente extraño que un matemático de la talla de Poincaré use y hasta abuse en sus escritos epistemológicos del regreso al infinito y otros sofismas por el estilo;esto nos muestra como muchas veces el afán polémico anula las más grandes inteligencias.La inanidad de la objeción de Henri Poincaré salta á la vista.f es independiente del sistema cuya compatibilidad afirma-y por lo tanto es compatible con él,porque en f no figura ninguna de las ideas primitivas de A.

Los matemáticos se empeñaron durante largo tiempo em demostrar el postulado euclideo de las paralelas, en transformarlo en un teorema demostrable mediante los cuatro primeros postulados de los Elementos. Los repetidos fracasos de sus tentativas les indujeron á resolver el problema inverso: demostrar que el postulado llamado por antonomasia de Euclides es independiente de los postulados anteriores; pero esto últámo equivale á demostrar que la proposición contradictoria del postulado de las paralelas es compatible con los postulados arriba citados, para lo cual se busca una interpretación de las ideas primitivas de la geometría tal que sea satisfecha el sistema (postuldo I, 2, 3, 4, negación del postulado de Euclides).

Los postulados de un sistema se dice que són absolutamente independientes si ninguno de ellos puede deducirse de los demás, cualquiera que sea el orden en que estos se dispongan; son, en cambio, ordenadamente independientes si siendo por ejemplo a, b, c, d, ... los postulados del sistema, b no se deduce de a; c de a y b; d de a, b, yc; etc. Dado un sistema (a, b, c, d, ...) en independencia ordenada puede transformarse según ha observado Beppo Levi (V. Enriques. Per la Storia della Logica, pag. 2I2. Bologna, Zanichelli, I922) en otro absolutamente independiente reemplazando "b" por "b es cierto para los entes que satisfacen á la condición a", "c" por "c es cierto para los entes que satisfacen las condiciones a y b",etc.

Correlativamente se plantea el problema de la independecia de los conceptos primitivos de una teoría respecto al sistema de postulados que los caracteriza. Si A,B,C,D,...son las ideas primitivas, se comprobará que C por ejemplo no puede definirse mediante A y B,ó mediante A,B y D si se busca la independencia absoluta,hallando dos interpretaciones del sistema de nociones primas,(A,B,C)en el primer caso,ó (A,B,C,D)en el segundo,que satisfagan á los postulados,y que difieran unicamente por el significado conferido á C.

Hacemos notar con Padoa que "les contradictions ou les dépendences des propositions ne peuvent etre demontrée que par des raisonnements déductifs,tandis que les no-contradictions ou les independences des propositions ne peuvent etre demontrée que par des constatations(on constate que des interpretations convenablement choisies des symboles vérifient ou ne vérifient pas les propositions en question).(V.Padoa, art,cit,pag.90).

~~Hacemos notar con Padoa que les contradictions ou les dépendances des propositions peuvent se... tandis que les non-contradictions ou les indépendances des propositions ne peuvent être démontrés que par des constatations~~

Una vez demostrado que los elementos irreductibles de una teoría científica A son independientes puede construirse una ó varias teorías A', A'',..., que comprendan á la primera como caso particular, para lo cual se prescinde de algunos de los postulados de A, conservando todas sus ideas primitivas, y con los restantes se elabora un nuevo sistema deductivo. Este sistema no será de ningún modo una construcción arbitraria de nuestra mente, un simple juego de razonamientos, sino un cuerpo orgánico de proposiciones ciertas para todos aquellos entes para los cuales es cierta la teoría básica A. Entre A y A', A''... interceden las mismas relaciones que entre un concepto y sus conceptos subordinados, toda propiedad de aquel es propiedad de estos, pero no toda propiedad de estos es propiedad del primero. Un género tiene siempre bajo sí varias especies coordenadas, del mismo modo una teoría genérica A' admite como casos particulares varias teorías coordinadas A_1, A_2,..., que se obtienen substituyendo algunos ó todos los postulados propios y característicos de A -que no figuran en A'- por los postulados contrarios ó contradictorios. Como ejemplo ilustrativo podemos citar las Geometrías Métrica y Proyectiva. Los axiomas de la Métrica según Hilbert se pueden reunir en cinco grupos, los de ordenación, enlace, congruencia, paralelismo y continuidad (V. Rey Pastor. Introducción á la Matemática Superior, pag. 57, Madrid, Biblioteca Corona, 1916, ó tambien Killing-Hovestadt. Handbuch des Mathematischen Unterrichts, erster Band, pag. 5, Leipzig, Teubner, 1910). Si dejamos á un lado los grupos tercero y cuarto, podremos edificar á base de los otros tres la Geometría Proyectiva, más general que la Métrica, que se obtiene de la primera agregándole ciertas determinaciones. La Proyectiva comprende en sí como casos particulares á todas las Métricas posibles; no solo á la Euclidea, sino tambien á la Riemanniana y á la Lobatchevskyana. Los postulados de la Geometría Proyectiva los volvemos á encontrar en las tres Métricas; así que toda proposición proyectiva vale para la Métrica cualquiera que sea el enunciado del postulado de las paralelas, el cual en todas sus formas es independiente de los axiomas restantes.

Dados dos sistemas correlativos de ideas y de proposiciones primitivas que cumplen la condición de ser independientes, cabe investigar si con distintos postulados y reemplazando por otros los conceptos básicos no podría reducirse el número de proposiciones indemostradas. ~~Probablemente~~ Problema es este que sobre todo en sus aplicaciones á la Matemática ha preocupado á la escuela de Peano, habiendo llegado algunos de sus discípulos, Pieri y Padoa, á reducir al mínimo imaginable el número de elementos primordiales de la Aritmética y la Geometría. Estas reducciones son didacticamente inaceptables, puesto que alargan la exposición de la ciencia, exigiendo un mayor número de definiciones y demostraciones, y son además de utilidad nula para el desrrollo ulterior de las investigaciones; de ahí la crítica de Enriques (V. Enriques, ob. cit. pag. 203-204), quien ve en ellas una tentativa de restringir la arbitrariedad lógica mediante criterios extralógicos. ~~ya que~~ En efecto no les guía á los Peanistas otro interés que el puramente estético de construir la ciencia con el mínimo de recursos que pueda darse; así como ciertos ajedrecistas buscan dar el mate con la menor cantidad de jugadas, ó ciertos dibujantes se esfuerzan por dar vida á un personaje sobre el cartón con el mínimo de trazos; formas diversas todas estas de un mismo anhelo artístico. No puede negarse que, aun cuando solo secundariamente, les ha impulsado tambien el afán crítico de definir y demostrar conceptos y proposiciones tenidos siempre por irreductibles, anulando así las tentativas de conceder un valor lógico á ciertas condiciones psicológicas de evidencia intuitiva.

Elegido un sistema de postulados (a, b, c, d, ...), puede suceder que uno de ellos por ejemplo d equivalga á la afirmación simúltanea de dos ó más proposiciones d', d'', ..., tales que d' pueda demostrarse mediante a, b y c. Persiguiendo en la exposición de la ciencia la absoluta perfección estética, se hace por lo tanto necesario elegir como postulados proposiciones simples, indescomponibles, ó

~~proposiciones complejas tales que los elementos que las compongan~~

proposiciones complejas tales que los elementos que las compongan sean independientes respecto de los demás postulados. Las proposiciones simples son desde el punto de vista comprensivo las que afirman de un ente su pertenencia á la clase más amplia, las que predican de él la propiedad más general;desde el punto de vista extensivo serian las que le incluyen en la clase mínima. En el primer caso es la más simple la proposición"a es distinto de b", ó "a pertenece á la clase de los objetos distintos de b" como lo indica Padoa(V.Enriques,ob,cit,pag.2I3-2I4);en el segundo caso lo es la proposición idéntica "a pertenece á la clase formada por el solo elemento a",ó "a es idéntica á a".De una proposición como esta última no puede obtenerse ninguna otra proposición,á no ser ella misma.Si todos los postulados fueran del tipo de"a=a", la ciencia no sería más que una inmensa tautología;para que pueda deducirse algo de los postulados es necesario que estos expresen relaciones entre objetos distintos,ó lo que es lo mismo,su igualdad parcial;pues,como ya lo hemos visto,una relación entre dos entes cualesquiera equivale á la pertenencia de ambos á una misma clase, y esto último á su igualdad respecto á dicha clase.Si bien en la Matemática figuran como postulados ciertas identidades,estas no son nunca de la forma "a=a",sino "a=b";son igualdades que afirman la identidad extensiva de dos conceptos comprensivamente distin-

ellas
tos,afirman que un mismo concepto puede obtenerse mediante diversas operaciones lógicas ó matemáticas.Asimismo tampoco pueden admitirse postulados de la forma "a es distinto de b", porque para reemplazar por ejemplo el postulado "Número es una clase" que figura en la Aritmética de Peano(V.Peano,Aritmetica generale e algebra elementare, pag.8,Paravia,Torino,1902) deberíamos recurrir á las infinitas proposiciones que afirman que número es distinto de todos los elementos que pueden pensarse fuera de la clase "clase".Nos quedaría todavía por elegir proposiciones complejas tales que los elementos ~~x~~ que las compongan sean independientes,pero nadie nos asegura que alguno de estos no equivalga á la interferencia de varias proposiciones, una de las cuales sea demostrable mediante los demás postulados.Vemos pues que es por completo irrealizable el ideal de los que aspiran á construir la ciencia á base de postulados no convencionalmente, sino realmente simples.

Hay quienes creen que los conceptos primitivos son imprecisos y vagos en comparación de los demás conceptos de una teoría científica,por lo mismo que los últimos se definen y los primeros no;y no reflexionan que si fuera incierto el significado de las ideas primitivas, con mayor razón lo sería el de las ideas derivadas, puesto que estas ~~últimas~~ en última instancia se definen mediante aquellas. Las nociones primitivas no tienen nada de misterioso ni de obscuro; es cierto que no se definen (es imposible y absurdo definirlo todo) pero su alcance queda claramente determinado por los postulados que dan las condiciones necesarias y suficientes á fin de que pueda establecerse sín equívocos si tal concepto primitivo, supongamos el de recta, es aplicable ó no á tal dato de la intuición, supongamos el de recta física.

DEFINICIONES DE CLASES

Una clase ó conjunto puede determinarse enunciando los elementos que la integran, ó eligiendo entre las propiedades que poseen todos sus elementos algunas tales que de ellas puedan deducirse todas las restantes; en el primer caso diremos que el conjunto está definido por extensión, en el segundo por comprensión (V. Rey Pastor. Elementos de Análisis Algebraico, segunda edición, pag. I9-20, Madrid, I922).

El primer método es facilmente aplicable tratándose de clases poco numerosas, como, por ejemplo, la de los planetas de nuestro sistema solar; se torna engorroso si los elementos del conjunto pasan de las decenas; y se hace imposible si la clase es infinita. El enunciado de infinitos elementos implica un proceso mental trascendente, la realización de infinitos actos ~~por nuestro~~ por nuestro pensamiento: la clase X es la clase cuyos elementos son a, b, c, d, ... y así innumerables veces; como todo acto mental exige un cierto tiempo, haría menester para definir dicha clase un tiempo y una vida ilimitadas.

Para las clases infinitas y muy extensas es necesario, por lo tanto, recurrir á las definiciones comprensivas; cabe notar que no pueden emplearse á la vez ambos tipos de definición, porque definida una clase por sus propiedades y otra por sus elementos no hay manera de establecer relación ninguna entre esta y aquella. Si sabemos que los elementos de la clase A cumplen las condiciones a, b, c, y los de la clase A' las condiciones a', b', c', para determinar las relaciones existentes entre A y A' investigaremos si en virtud de las proposiciones anteriormente demostradas ó admitidas intercede alguna relación entre a, b, c, y a', b', c'; pero si A' ha sido definida extensivavamente cómo determinaremos las propiedades comunes-que por lo demás no existen-de A y A'?

En virtud de las mismas razones expuestas arriba no es dable emplear en la definición de una clase un número infinito de propiedades ó condiciones. Toda clase puede obtenerse mediante distintas operaciones lógicas, así una clase A puede resultar de la interferencia de otras varias clases B, C, D. La clase A es entonces la mayor clase contenida en B, C, D, es el conjunto de sus elementos comunes. Toda clase es interferencia de otras, pues dada una clase existe siempre alguna que contiene á la primera, aun cuando dadas varias clases no siempre es posible interferirlas, así por ejemplo las clases caballo y vaca no tienen elementos comunes, no hay ningún ser que sea á la vez vaca y caballo. La interferencia de varios conjuntos arbitrarios puede no definir una clase, pero toda clase es definible como producto lógico de otras. De una clase puede darse innumerables definiciones por producto lógico, todas ellas equivalentes; entre el número infinito de definiciones posibles se elige una en virtud de razones de conveniencia y etimología. Consideremos por un momento conceptos en vez de clases, y supongamos que el ~~conjunto~~ concepto a se define mediante b y c; si b y c entran en la definición de a, no es porque ellas sean las propiedadse esnciales de a, mientras que son accidentales las propiedades restantes que se deducen de la definición, sino solo porque nos es más cómodo ó porque la costumbre nos lo impone definir a mediante b y c: tan esenciales como estas últimas son las demás propiedades d, e, f, g, ...que pertenecen á a y que pueden tambien figurar, si así se quiere, en la definición del concepto a. Esto nos explica como puede haber conceptos de distinto significado cuya extensión sea la misma-mas advertimos que por significado entendemos la connotación en el sentido que Stuart Mill da á este término y no la comprensión-; conceptos de extensión idéntica pueden tener un sentido, una connotación distinta, pero no diversa comprensión. El hecho de que si un objeto no posee la propiedad b tampoco posee la a no implica que b sea más esencial, más propia de la verdadera naturaleza de a que d ó f que no entran en su definición, pero que tambien son propiedades suyas, puesto que el mismo objeto si no poyese el carácter d ó f tampoco sería un a.

Algunos conjuntos pueden igualmente obtenerse por reunión. Se dice que un conjunto A es reunión ó suma lógica de otros varios B, C, D..., si es el menor conjunto que los contiene á todos ellos. Siempre es posible reunir dos clases, la suma lógica de varios conjuntos arbitrarios define una clase; pero no todo conjunto es reunión de clases, no todo conjunto es definible mediante dicha operación lógica, por ejemplo las clases singulares y nulas.

En virtud de las propiedades conmutativa y asociativa de la interferencia y reunión de clases demostradas ó postuladas en la Lógica de las formas elementales, es posible alterar el orden en que se interfieren ó reunen las clases en el definiente, así decir que

x.≡.interferencia de a, b, c.

equivaldría á decir que

x.≡.interferencia de c, a, b.

ó

x.≡.interferencia de b, c, a.

y por la propiedad asociativa sies

x.≡.interferencia de a con la interferencia de b y c.

hubiérase podido poner tambien

x.≡.interferencia de a con la interferencia de b y c.

En la Lógica Algorítmica se demuestra ~~que~~ (ó se postula) que dada una clase a existe otra no-a, llamada contradicción ó clase contradictoria de la primera, tal que la interferencia de ambas es una clase nula y su reunión agota el universo del discurso; se demuestra tambien que si a es una clase y no-a su negación, la negación de no-a equivale á a; de modo que cualquier clase se puede definir como negación de su contradictoria, suponiendo esta última conocida. Si un conjunto a se define como reunión ó interferencia de dos conjuntos b y c, puede tambien definirse como reunión ó interferencia de b con la negación de no-c. Una definición en cuyo definiente entran una ó varias negaciones explícitas de clases-es decir, en que se emplee el término no ó algún otro símbolo semejante-se llama definición negativa.

Así si ponemos por ejemplo

clase finita.≡.clase no-infinita

se dirá que hemos dado una definición negativa de la clase finita. Hay quienes descontentos de este tipo de definición pierden el tiempo en buscar de toda clase una definición positiva, ignorando que el ser positivam ó negativa no es una propiedad de la clase sino de su símbolo, de la forma como lo representamos; puesto que si clase finita es la negación de clase infinita, esta á su vez es la negación de la primera. El conceptom de clase finita no sería más claro, ni el de clase infinita más obscuro si diésemos de la primera lo que se llama una definición directa:

clase finita.≡.clase cuyos elementos cumplen las condiciones positivas a, b, c,

que equivale á

clase finita.≡.clase cuyos elementos cumplen las condiciones negativas no-a', no-b', no-c'. (suponiendo conodas a', b', c', y siendo a'= no-a, b'= no-b, etc.)

y pusiéramos luego

clase infinita.≡.clase no finita.

En la Logica clasica no se admitían las definiciones negativas, así como se consideraban defectuosas las demostraciones por reducción al absurdo; se creía que una clase es positiva ó negativa "en sí", que una argumentación es " en sí " directa ó indirecta;de ahí que se buscaran siempre procedimientos "directos" de demostración y definición. En la Lógica moderna no hay cosas en sí,puesto que: "Ogni verita logica(definizione o teorema)vale solamente in unione (o relazione) d'altre verita logiche"(V.Nagy.Principii di Logica esposti secondo le dottrine moderne,pag,I77.Torino,Loescher,I892).Este es el principio de relatividad de la Lógica cuya importancia y verdadero significado han sido puestos en claro por los estudiosos de la Lógica Matemática.

Los entes que cumplen una ó varias condiciones p forman una clase,la clase de los entes que satisfacen la ó las condiciones p;toda proposición condicional determina pues una clase que no es sino el campo de variabilidad de sus variables reales.Si reemplazando el símbolo indeterminado que figura en la proposición condicional p por cualquiera de los entes x_1, x_2,....x_n,y solamente por alguno de ellos se obtiene una proposición categórica cierta,entonces los elementos x_1, x_2... x_n constituyen una clase X que puede definirse

X.≡.clase formada por los x tales que p es cierta.

Establecida una correspondencia entre dos clases a y b tal que á cada elemento de b corresponda un único elemento de a (pudiendo estos últimos ser elementos simples, elementos no-clases, ó compuestos, clases) es posible definir un elemento cualquiera de a como el que corresponde á un determinado elemento de b en la relación dada. Enriques (V. I problemi della Logica en la Enciclopedia delle Scienze Filosofiche de A. Rüge, pag, 214, Palermo, Sandron, 1914) aduce á propósito el ejemplo de las definiciones tan empleadas en las Ciencias Naturales en que se determina b como causa ó efecto de c, en el supuesto de que la causa ó el efecto del fenómeno considerado sea único.

En resumen, toda operación lógica da origen á un determinado tipo de definición, y como á las operaciones entre clases corresponden operaciones análogas entre proposiciones y relaciones, de ahí que valgan para estas últimas todo lo que hemos dicho respecto á las definiciones de clases por interferencia, suma lógica, negación, etc.

EL GÉNERO Y LA DIFERENCIA

Un caso particular, poco importante, de las definiciones por interferencia es la llamada definición por el género próximo y la diferencia específica, que constituía para la Lógica de viejo cuño el único tipo posible de definición. Su importancia es pequeña en un estudio sistemático, actual, de la teoría de las definiciones; pero si hechamos una ojeada retrospectiva en la historia de la Lógica la veremos ocupar durante dos milenios un lugar relevante como único y exclusivo género definitorio, respondiendo á la preocupación metafísica de distribuir la totalidad de los objetos "reales" en clases interdependientes, en géneros y especies super y subordenados. Solo en razón del uso y abuso que se sigue haciendo de ella en los tratados, y del exagerado valor que se le atribuye es que nos ocupamos de la definición por el género y la diferencia, cuyo estudio hemos agotado al hablar de las definiciones de clases por medio del producto lógico.

"Una serie de conceptos que se pueden deducir los unos de los otros con la abstracción y con la determinación se puede llamar una escala lógica" (V. Lindner. Compendio di Logica Formale, pag, 20-21, Zara, Woditzka, 1882). En una escala lógica los conceptos vienen á quedar dispuestos en un órden comtiano de complejidad creciente y generalidad decreciente que va desde un cierto concepto-el Ser, lo Absoluto, la Substancia etc.-sin comprensión y absolutamente extenso hasta otro inextenso y multicomprensivo."UN sistema de escalas lógicas, que partiendo de diferentes conceptos individuales van á terminar en un solo concepto general, dícese una pirámide lógica. Todos los conceptos tomados en su conjunto se nos presentan, como una tal pirámide, cuyo vértice está formado por el concepto más universal de todo "ente". Después de este concepto vienen las categorias". (V. Lindner, ob, cit, pag. 21).

¿Qué es entonces definir un concepto?-"Determinar el puesto ocupado por el mismo en la totalidad de nuestros conceptos" (V. Lindner, ob, cit, pag. 112)/fijar su posición en la pirámide. De esto se deduce que todo concepto ocupa una posición fija en la pirámide conceptual, que si a y c son conceptos contiguos, lo son por esencia, lo son para siempre; nunca dejará de estar comprendida b entre a/y c ¿Porqué debe ser así? -porque la pirámide lógica de los conceptos corresponde unívocamente á la pirámide metafísica de las clases reales predicativas, y la realidad es inmutable; si entre dos clases intercede una relación es porque esta relación es una propiedad de ambas clases; la relación no la establecemos nosotros sino que la realidad nos la da. Sería irnos muy lejos de nuestro tema ponernos á discutir la exactitud de las precedentes afirmaciones. Nos basta con saber que para la Lógica de hoy en día es por completo arbitraría la distinción entre conceptos primitivos y derivados, positivos y negativos ~~derivados~~, etc. Dos conceptos cercanos en una determinada clasificación pueden estar alejadísimos el uno del otro en una clasificación distinta. Si bien es determinable el lugar que un concepto ocupa en una distribución arbitraria de la totalidad de los conceptos, no lo es el que ocupa en la distribución "real" de los mismos, y no lo es sencillamente porque la Lógica actual ignora ~~y no le interesa saberlo, ni puede nunca saberlo~~ si existe una semejante distribución, porque "distribución real" no tiene para ella significado

Dados los conceptos a, b, c, d, ... dispuestos en órden creciente de generalidad en una escala lógica, diremos que los conceptos más complejos están subordinados á los más generales y estos á su vez superordenados á los primeros. Un concepto es un género respecto á todas sus nociones subordinadas, una especie respecto á las nociones que le están sobreordenadas. Si entre dos conceptos como el b y c no hay ningún concepto intermedio, se llama género próximo al concepto sobreordenado y especie inmediata al subordinado, y respectivamente género y especie mediatos ~~x~~ si, como sucede entre a y c, no son consecutivos. Suponiendo conocidas las nociones más generales, la posición de un concepto x en una escala lógica se determina indicando su género proximo; pero como todo género tiene varias especies inmediatas, para fijar la posición de x se indican además las cualidades ó propiedades que lo distinguen de las restantes especies coordenadas, ó sea la diferencia específica. En lo que acabamos de exponer se dá tacitamente por admitido -aparte de lo que comentamos arriba- que los elementos de una escala lógica son bien ordenables, que á cada elemento se puede hacer seguir uno tal que no haya otro que siga al primero y preceda al segundo. Consideremos una escala a, b, c, d, ... en la cual no entren conceptos idénticos como por ejemplo triángulo equilátero y triángulo equiángulo; si la extensión de b es finita existe una especie inmediatamente subordinada á b, y un género inmediatamente sobreordenado, pero estos conceptos tienen poca aplicación práctica, la ciencia considera sobre todo clases infinitas, conceptos de extensión infinita. Dados dos conceptos tales, verbi gratia los de hombre y animal que pertenecen á una misma escala y cuya extensión es de la misma potencia, hay algún modo de bien ordenar el conjunto de todos los conceptos intermedios?ó lo que es lo mismo ¿puede determinarse el género próximo de hombre ó la especie inmediata de animal?.Este es un problema que en la Lógica clásica al tratar de las definiciones por el género y la diferenvia se da por resuelto sin haberlo planteado siquiera.Como en la práctica es imposible determinar el género próximo-que por lo general no existe-se recurre á un género lejano que exprese la propiedad "esncial" del concepto,lo que lo caracteriza,lo que hace que el concepto sea tal concepto y no cualquier otro.No insistiremos en la crítica que ya hemos antes esbozado de las definiciones esnciales.En las ciencias naturales ó en las históricas se puede distinguir efectivamente entre propiedades ó condiciones esenciales y accidentales;pero en las ciencias deductivas que son las que nos ocupan toda propiedad de una clase es esencial,es indispensable para poder atribuir á la clase el nombre que lleva.Tampoco nos detendremos en las ridículas é inútiles recetas que con tono doctoral suelen dar los lógicos acerca de la mejor manera de elegir el género "próximo",acerca de que la diferencia debe serlo del mismo género próximo y no de alguna especie intermedia,y otras tantas por el estilo, cuyo propio y absurdo enunciado las condena.

Para la Lógica clásica que desgraciadamente aun impera en las escuelas y en los tratados-véase por ejemplo el Traité de Logique de Goblot, Colin, Paris, 1920-solo existía la definición por el género y la diferencia; el objeto de la definición era determinar el contenido de un concepto; no el significado arbitrario de un término al cual no siempre corresponde una clase de objetos, sino las propiedades reales de un concepto dado, las propiedades necesarias y suficientes para determinarlo; de ahí que la definición fuese el coronamiento de la ciencia, el objetivo final de las investigaciones; la definición se confundía con el conocimiento acabado de un objeto real, existente. Para la Lógica Moderna, en cambio, la definición por el género próximo es uno de los tantos tipos definitorios que pueden emplearse, tipo de definición que no tiene ninguna ~~exps~~ importancia especial, que apenas si merece ser distinguido con un nombre propio y una casilla aparte en la clasificación de las definiciones. No faltan por cierto los clasicistas á todo trance que pretenden poder reducir todas las definiciones á la del género y la diferencia; razonan así, por ejemplo: en

2. ≡. suma de I con I

"suma" es el género, y "de I con I" es la diferencia específica; puesto que en efecto 2 se distingue de 3 en que es suma "de I con I", mientras que 3 lo es "de 2 con I"; en

"número compuesto. ≡. producto de dos números mayores que la unidad"

es análogamente "producto" el género, y la diferencia es "de dos números mayores que la unidad". Afirmar lo que queda dicho solo lo puede una persona que ignora el significado que los términos suma y producto tienen en la Aritmética; fuera de que no son clases sino funciones (V. Peano, Le definizione in Matematica, Periodico di Matematiche, I92I, pag. I8I) y de que "de I con I" y " de dos números mayores que la unidad" tampoco son clases -así que no pueden ser diferencias específicas-, está el hecho de que "suma" y "producto" se definen implícitamente, es decir de que no tienen un único significado; aun siendo clases no podrían servir de géneros próximos, puesto que sus significados tomados aisladamente son ambiguos. Suma de dos enteros no es lo mismo que suma de dos vectores.

ELEMENTOS SIMPLES

Los lógicos han negado siempre la posibilidad de definir un ente simple, un individuo; si lo definimos mediante clases será una clase y no un individuo, puesto que el resultado de operaciones lógocas realizadas sobre clases es tambien una clase; sin embargo en la Aritmética se definen los números de la serie natural poniendo por ejemplo

4.$\equiv$.x tal que x es sucesivo de 3

4 y 3 son entes simples, y " sucesivo de" es un operador, es decir el símbolo de una función que ~~á~~ un elemento arbitrario de la clase de los números enteros le hace corresponder un único y determinado elemento de la misma, en este caso hace corresponder el número 4 al número 3; 4 puede pues definirse como el número que corresponde al 3 en la correspondencia unívoca establecida por el operador "sucesivo de". Podríamos tambien considerar á "sucesivo de 3" como una clase, habría que demos~~trrr~~trar entonces que es una clase ~~particular~~ singular, ó sea que posee un solo elemento, y luego se podría poner

4.$\equiv$.el único elemento de la clase "sucesivo de 3"

Hemos dicho que en la Aritmética los números naturales son entes simples, y dijimos mal: 4 es un elemento no-clase en una determinada Aritmética, en la de Peano verbi gratia; pero puede no serlo en otra Aritmética, ó más bien en otro sistema aritmético; para Russell 4 es una clase. Mas téngase bien en cuenta que las Aritméticas de Peano y Russell no se contradicen, no pueden contradecirse, puesto que son la misma Aritmética expuesta con diferentes criterios. En ambas es 4 más 5 igual á 9, mientras que 4 ó 5 son entes simples en la una, y compuestos en la otra. ¿Porqué? - Porque el ser elemento irreductible ó clase no es propiedad de ningún ente lógico ó científico, es solo uno de los tantos modos que tenemos de considerar las cosas; depende de nuestro arbitrio que 4 sea ó no un individuo, depende del punto de vista en que nos hayamos colocado, del fin que nos hayamos propuesto. Hay entes geometricos que en una misma Geometría son unas veces clases y otras no: una recta es una clase si la consideramos como punteada, y es elemento simple si la consideramos en un plano reglado; un punto es un elemento en el espacio de puntos, y es una clase puesto en el centro de una radiación de planos ó de rectas.

LOS POSTULADOS EXISTENCIALES

De todo lo hasta ahora expuesto resulta que una teoría deductiva se construye á base de ciertos elementos irreductibles, ideas y proposiciones primitivas. Así la Geometría Métrica admite como dados, sin previas definiciones ni demostraciones, los conceptos de punto, recta y plano, y algunas relaciones elementales entre dichos entes. Combinando los conceptos de punto, recta y plano, y las relaciones que entre ellos intercеden mediante ciertas reglas fijas establecidas por la Lógica, podemos obtener (definir) nuevos conceptos geométricos como los de semiplano, triángulo, circunferencia, etc. Veamos como un geómetra define por ejemplo la idea de triángulo; de un ente cualquiera -lo sabemos ya por los capítulos anteriores- puede darse infinitas definiciones; el triángulo no es evidentemente una excepción á la regla, así puede definirse el triángulo como la figura determinada por tres puntos no colineales, ó como el conjunto de los puntos comunes á tres semiplanos de un plano, etc. En estas definiciones se habla, aun cuando de un modo genérico, de "tres puntos", de "conjunto de puntos", es decir se da por admitido que la clase punto no es nula, que contiene elementos, ó lo que es lo mismo que existe, puesto que la existencia de una clase se reduce á la contenencia de por lo menos un elemento; aun en el razonamiento vulgar para demostrar que una clase, supongamos la de los hombres negros, existe, se aduce el ejemplo de un objeto que pertenece á la clase, de que tal hombre, supongamos Juan, es negro. Ahora bien, la aserción de que la clase punto existe no figura entre los postulados, ya que estos solo afirman relaciones entre conceptos; ni puede deducirse de ellos, puesto que, como ya Poincaré lo mostrara, una proposición de una cierta categoría gramatical ó lógica solo puede obtenerse de otras proposiciones de la misma categoría; así de una proposición en indicativo (una afirmación científica) no sigue nunca una proposición en imperativo (un mandato moral), esta se acepta como postuladox, ó se basa en otras proposiciones en imperativo; una proposición existencial solo puede deducirse de otras proposiciones existenciales, etc. No podremos definir el triángulo, y lo que es más aun no podremos construir la Geometría si no admitimos como ciertas las proposiciones que afirman la existencia de puntos, rectas y planos; y como es imposible deducirlas de los postulados, no nos queda sino agregar al sistema de proposiciones primitivas de la Geometría otras tres que afirman la existencia, la nonulidad de las clases correspondientes á las tres ideas primitivas de punto, recta y plano. En una teoría rigurisamente constituida los conceptos y sus relaciones son susceptibles de un proceso de reducción mediante definiciones y demostraciones á otras relaciones y conceptos que les son anteriores en el orden de exposición elegido; aplicando repetidas veces estos procedimientos obtenemos como residuo de análisis un grupo de ideas y proposiciones irreductibles que se admiten convencionalmente, de un modo análogo las proposiciones existenciales que afirman la existencia de determinadas clases pueden reducirse á otras que afirman la existencia de clases contenidas en la definición de las primeras; prosiguiendo la descomposición en sus elementos de las proposiciones existenciales de una ciencia, se llega á un cierto número de proposiciones, igual al de las ideas primitivas, cuya reducción es imposible de realizar, y que se admiten, en consecuencia, como postulados existenciales.

Toda definición de un nuevo concepto debe venir acompañada (precedida ó seguida) de la demostración de la existencia de la clase correspondiente. Si damos al término definición un sentido muy amplio incluyendo en la clase de las definiciones aun á las malas definiciones, á las ilegítimas, á aquellas en que se recurre á conceptos que no han sido anteriormente definidos y que no figuran tampoco en el cuadro de las ideas primitivas, ó proposiciones que no han sido demostradas ni admitidas como postulados, es evidente que la definición de una clase no implica su existencia; si definiéramos arbitrariamente la clase de los dragones como la de las serpientes que arrojan llamas por sus fauces, sin habernos antes asegurado que es posible la interferencia de las clases "serpiente" y "ser que arroja llamas por sus fauces" cometeríamos un craso error de lógica al concluir que los dragones existen por que los hemos definido. Pero si tomamos la palabra definición en su sentido estricto, entendiendo por tales unicamente á las que son correctas, legítimas, puesto que no caben definiciones no definitorias, como no son posibles obras de arte que no sean bellas, artísticas-una obra de arte fea es un absurda-entonces una definición implica la existencia del ente definido; mas ¿quien nos asegura que una dada definición es correcta? Las dificultades prácticas que se presentan para demostrar directamente la legitimidad de una definición obligan á recurrir á las proposiciones existenciales, cuya demostración-por lo común fácil-nos da una prueba indirecta pero segura, de la consistencia, de la no-contradicción interna de las definiciones.

D. Aarón Spivals