P

La actividad matemática

Aritmetización del álgebra y desarticulación entre noción matemática, técnica y tecnología en los libros de textos escolares

Autor:
Nieva, Margarita del Carmen
Tutor:
Lidia, Ibarra

2005

Tesis presentada con el fin de cumplimentar con los requisitos finales para la obtención del título en Magister de la Universidad de Buenos Aires en Didáctica

Posgrado

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

"La actividad matemática: aritmetización del álgebra y desarticulación entre noción matemática, técnica y tecnología en los libros de textos escolares"

Margarita del Carmen Nieva

Se autoriza su lectura en biblioteca.

TESIS 11-6-14

DEPARTAMENTO DE POSTGRADO DE LA UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Directora:

Dra. Elvira Arnoux

FACULTAD DE FILOSOFÍA Y LETRAS

MAESTRÍA EN DIDÁCTICA

Directora:

Dra. Alicia Camilloni

SEDE

UNIVERSIDAD NACIONAL DE SALTA

Coordinadora:

Msc. Ana de Anquin

Salta, Agosto de 2003

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
UNIVERSIDAD NACIONAL DE SALTA

TESIS

"La actividad matemática: aritmetización del álgebra y desarticulación entre noción matemática, técnica y tecnología en los libros de textos escolares"

Para obtener en grado de Magister en Didáctica

Autora:

Margarita del Carmen Nieva

Directora:

Msc. Lidia Ester Ibarra

Agosto de 2003

A mi padre que ya no lo tengo.

A mi madre que gracias a Dios esta a mi lado.

Juntos me enseñaron y ayudaron a luchar para conseguir una meta y ser siempre mejor.

A mis hermanos María Esther, Raúl y Silvia Inés.

Agradecimientos

- A Dios nuestro señor y la Virgen por darme otra oportunidad..
- A la Msc Lidia Ester Ibarra por aceptar dirigir mi tesis, por su comprensión , enseñanza y amistad.
- A todos los Profesores de la Maestría en Didáctica por sus enseñanzas porque me enseñaron a llegar a la meta.
- Al Dr. Joseph Gascón del Departamento de Matemática de la Universidad Autónoma de Barcelona por haberme aceptado hacer la pasantía del plan de estudio de esta Maestría.
- A las autoridades de la Facultad de Ciencias Naturales de la Universidad Nacional de Salta por la ayuda económica que me brindaron para realizar mis estudios de la Maestría.
- Al Consejo de Investigaciones de la Universidad Nacional de Salta por el apoyo académico y económico.
- A la profesora Socorro Chagra y al Ingeniero Juan M. Torres por haberme permitido cursar la Maestría.
- A las Profesoras Florencia Alurralde de Rojo y Marta Pérez de Correa por su apoyo, confianza y amistad.
- A la Profesora Ana Chalabe por su ayuda en la compaginación de este trabajo.
- A las autoridades del Colegio San Pablo por haberme permitido hacer la pasantía.
- A mi familia, amigos y todas aquellas personas que de una u otra forma colaboraron para que pueda concluir esta etapa de mi vida.

ÍNDICE

INTRODUCCION

Como docente de Matemática de EGB_3, Polimodal y de la cátedra de Matemática de 1° Año de la Facultad de Ciencias Naturales, donde se dictan las carreras de Ingeniería Agronómica, Ingeniería en Recursos Naturales, Profesorado y Licenciatura en Ciencias Biológicas, he observado las dificultades que tienen los alumnos cuando deben resolver problemas de ecuaciones.

Esto me conduce a suponer que los estudiantes pasan por EGB_3 y Polimodal sin sentir la necesidad de aprender nociones matemáticas tales como; ecuaciones lineales, sistemas de ecuaciones lineales, cuadráticas, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas.

A este problema se agrega el hecho que habitualmente, los profesores de EGB_3 y Polimodal, al elaborar prácticos o guías de problemas para la tarea en el aula efectúan una selección de contenidos y actividades, tomando como referencia las propuestas que figuran en los libros de texto, sin un mayor análisis y adecuación de los mismos.

En la universidad se enfrentan nuevamente con la necesidad de resolver problemas de ecuaciones, sumado al fuerte mandato de superar las dificultades por sí mismos.

Consciente de la complejidad y amplitud de la resolución de problemas en el tema ecuaciones, voy ha centrar mi estudio en la resolución de ecuaciones lineales con una incógnita propuestas en los libros de textos.

Mi hipótesis inicial es que la resolución de ecuaciones, se apoya fuertemente en la aritmética, tanto en la resolución como en las técnicas que se utilizan para llegar a su solución.

Me propongo poner atención en el tratamiento de:

1. Las ecuaciones a través de los problemas propuestos en los libros de textos. En muchos casos única referencia del docente para preparar sus clases.
2. En el campo de problemas que proponen los profesores en el proceso de estudio de una obra matemática.

El objetivo del presente trabajo es descubrir los diferentes modelos epistemológicos que subyacen en los textos de matemáticas y su incidencia en la enseñanza y el aprendizaje del álgebra escolar.

Mi interés es estudiar cómo los libros de textos de EGB_3 y Polimodal presentan la secuencia de los contenidos, y las propuestas de actividades alrededor de uno de los conceptos del álgebra: el de ecuaciones.

A lo largo del desarrollo de este trabajo intentaré:

- Identificar los modelos epistemológicos implícitos o explícitos en la actividad matemática.

- Interpretar la incidencia que tienen los diferentes modelos epistemológicos en el análisis de la actividad matemática escolar.

- Descubrir si se producen fenómenos didácticos relativos a la producción, transmisión y la utilización del conocimiento matemático.

- Describir la estructura de la organización del álgebra en la ex-enseñanza secundaria, EGB_3 y Polimodal de la actual Reforma Educativa.

- Analizar el grado de algebrización de la actividad matemática en algunos libros de textos.

- Analizar si la actividad de resolución de problemas de ecuaciones se presenta atomizada.

Para lograr los objetivos propuestos en la investigación, se analizan los textos de matemáticas desde la década del 60 hasta la actualidad, teniendo en cuenta los autores mas solicitados en la enseñanza media y la actual EGB_3, y Polimodal centrando el análisis en identificar los campos de problemas, y las diferentes técnicas utilizadas para la resolución de problemas en distintos momentos históricos.

La selección de los libros se realiza teniendo en cuenta cuáles son los textos mas recomendados por los profesores y utilizados por los alumnos en las ex escuelas medias y las que actualmente imparten EGB_3 y Polimodal de la ciudad de Salta, en las últimas cuatro décadas, considerando esto como muestra intencional.

La metodología utilizada para el análisis se basa en el método hipotético deductivo, el trabajo intenta captar cuales son los conceptos, técnicas y tecnologías propuestas por los diversos autores en función de los modelos epistemológicos en los libros de textos.

Para hacer una recolección de la información y contextualizar este trabajo, además de hacer una selección de los textos mas utilizados por los alumnos y profesores, también se tiene en cuenta las siguientes variables:

- Contenidos incluidos y orden de presentación.
- Criterios para organizar el saber matemático.

I- MARCO TEÓRICO DE LA INVESTIGACIÓN

1. LA DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS: El Problema de La Demarcación Entre Didáctica General Y Didáctica Especial

La demarcación del campo de conocimiento que corresponde a la Didáctica General y a las Didácticas especiales, el establecimiento de sus interrelaciones, los profesionales que deben ocuparse de su estudio, etc., son problemáticas que han generado conflictos, y controversias que pueden rastrearse a lo largo del desarrollo histórico de la didáctica.

Los didactas generalistas se han preocupado por establecer el status epistemológico de la didáctica como campo de conocimiento. De esta manera aparecen como cuestiones fundamentales la reflexión acerca de sus fundamentos epistemológicos, se proponen alternativas y se intentan dar coherencia y estructura a este campo de conocimiento.

Pero en muchas ocasiones se cuestiona la existencia misma de una didáctica general, ya que si la didáctica opera sobre contenidos específico, estos contenidos también determinan los tipos de metodologías que serán apropiadas de acuerdo a cada disciplina y de acuerdo a su objeto de estudio.

En los últimos tiempos el problema de la definición del campo de la didáctica y sus especializaciones ha generado nuevas posiciones y desarrollos teóricos. Los especialistas de las distintas disciplinas se han preocupado por re conceptualizar a las didácticas alrededor de los contenidos de enseñanza. De este modo las didácticas especiales aparecen determinando sus campos específicos alrededor del campo de conocimiento de sus respectivas ciencias.

Surgen entonces controversias y disputas entre la didáctica y las disciplinas científicas, ya que ambas trabajan sobre este objeto complejo que es la enseñanza. Los conflictos se intensifican, cuando cada una de las disciplinas científicas, preocupadas por la enseñanza de sus propios campos de estudio, intentan delimitar su objeto y constituir cuerpos teóricos autónomos.

Desde la perspectiva de la Didáctica General, este tipo de teorías son fragmentarias, ya que implicaría un reduccionismo del objeto de estudio al focalizar su estudio en una o mas dimensiones del problema de la enseñanza. Para algunas investigaciones , esto constituiría una reducción del proceso de enseñanza a una tarea formativa y la generación de " teorías diafragmáticas".

> *¨...Es epistemológicamente legitimo, que las didácticas especiales focalicen su producción en una dos dimensiones del problema, Finalmente este es el sentido de la especialización (...) Sin embargo la cuestión reviste peligros significativos cuando esas dimensiones focalizadas pretenden constituirse en dimensiones automatizadas o teorías cerradas explicativas del fenómeno total...¨ Camilloni (1996: 53)*

Sin compartir totalmente los términos en que la autora plantea la cuestión, me interesa mostrar la discusión que hoy aparece en el campo de la didáctica, que involucra no solo la especificación del campo, sino cuestiones epistemológicas y metodológicas.

2. EL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO: Protagonista principal o secundario en didácticas de las matemáticas

En parte la problemática planteada en líneas anteriores, puede rastrearse en el desarrollo histórico de la Didáctica de las Matemáticas, en la cual puede observarse dos tendencias:, una que se sustenta en una concepción que denominaremos ¨ tradicional ¨ de la didáctica de las matemáticas , como aplicación de presupuestos didácticos generales al campo de las matemáticas. Y otra, la denominada " Didáctica Fundamental " que se encuentra trabajando en un esfuerzo por constituir a la didáctica de las matemáticas en una disciplina científica.

La Didáctica tradicional puede caracterizarse como una Didáctica Especial, forma parte o es dependiente de la Didáctica General, lo que delimita su campo, basado fundamentalmente en una necesidad de aplicar normas o principios generales válidos para todos los saberes, a la enseñanza de las matemáticas.

Dentro de este planteo puede observarse una clara tendencia a considerar la enseñanza , fundamentalmente como actividad. Con una fuerte tendencia a separar, a diferenciar entre ¨ que enseñar ¨ y ¨ como enseñar ¨.

Esta separación se traduce en una disociación entre contenidos y técnicas, entre conocimiento teórico y conocimiento práctico, lo que produce a su vez una separación del objeto didáctico.

Podemos decir que este problema trae aparejado un refuerzo del sentido técnico de la didáctica, haciendo que el tratamiento de lo didáctico quede circunscrito al ámbito de lo escolar, y su campo a pura técnica. En la práctica esto produce que los profesores centren su preocupación en lo metodológico en el ¨ como enseñar ¨, mientras que el, ¨ que enseñar ¨ es algo resuelto por los expertos, por las editoriales, por los administradores.

Desde este punto de vista, los contenidos son tomados de manera a crítica. Es así que los saberes matemáticos que se utilizan, o bien no son problemáticos en si mismo o no forman parte de la problemática didáctica.

De este modo se concibe que dichos saberes solo pueden ser aplicados para describir e interpretar los hechos didácticos, pero nunca pueden ser modificados como consecuencia de dicha aplicación.

Se puede advertir que existen al menos tres limitaciones en el desarrollo de la didáctica de las matemáticas tradicional:

1- No incluye dentro de su objeto de estudio las nociones de enseñar matemáticas ni de aprender matemática, solo las utiliza como nociones trasparentes y cuestionables o bien como nociones construidas en otras disciplinas.

2- Al centrar el análisis en el alumno, su objeto de estudio se aborda a partir de los fenómenos psicológicos involucrados en el proceso de enseñanza aprendizaje y pone en segundo plano los fenómenos específicamente didácticos matemáticos.

3- Al interpretar el saber didáctico como un saber técnico renuncia a la ambición de construir a la didáctica de las matemáticas como disciplina científica.

De este modo se identifica el proceso de aprendizaje de las matemáticas como un proceso psico-cognitivo, fuertemente influenciado por factores motivacionales y actitudinales. Así la didáctica de las matemáticas se fundamenta desde la teoría del aprendizaje.

Como consecuencia de esta visión de la didáctica se plantea además otra disociación: la enseñanza, la actividad docente por un lado, y el aprendizaje del alumno por el otro.

Se puede reconocer, por lo tanto desde la perspectiva tradicional de la didáctica dos enfoques clásicos de estudio:

a) El aprendizaje del alumno, cuyo objeto de investigación es el conocimiento matemático y su evolución, sustentado en la Sicología, la que proporciona los fundamentos científicos de las técnicas que la didáctica proporciona.

b) La enseñanza, la actividad docente, centrado en cuestiones relativas al profesor y a su formación profesional. La pregunta por excelencia dentro de esta enfoque es ¿que conocimientos debe tener el profesor para favorecer un aprendizaje afectivo en el alumno?

El objeto de este segundo enfoque, es el pensamiento del profesor que incluye su conocimiento de matemáticas, su conocimiento de los procesos de enseñanza-aprendizaje, y su experiencia en la práctica docente. Se trata de un conocimiento que abarca la sicología educativa, la sociología, la historia de las matemáticas, la pedagogía .etc.

Por otro lado, la Didáctica Fundamental (Gascon, 1998), parte del reconocimiento que su objeto se delimita por el estudio de la matemáticas, y se diferencia a partir de allí, de la Didáctica General, cuyo objeto de estudio es la enseñanza.

Esta delimitación tiene su fundamento epistemológico en que el estudio de las matemáticas, no solo se refiere al conocimiento enseñado y aprendido en la escuela , sino a un campo mucho mas amplio: la situación didáctica de estudio en el que se encuentra cualquier persona cuando quiere conocer algo para resolver una determinado problema.

3- LA DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS DESDE UNA PERSPECTIVA EPISTEMOLÓGICA Y ANTROPOLÓGICA: El conocimiento matemático como fundamento de la Didáctica

A partir de las aclaraciones previas, sobre el desarrollo histórico de la Didáctica de las Matemáticas. Me encuentro en condiciones de plantear desde que concepción de la misma se realiza mi trabajo de investigación. El mismo, se fundamenta teórica y metodológicamente desde los términos teóricos elaborados por la Didáctica Fundamental, que denominaré de ahora en adelante Didáctica de la Matemáticas

Tomaré de los aportes teóricos de Chevallard, (1991) la noción de " enfoque antropológico de la didáctica " y el de " transposición didáctica. De Chevallard, Gascón, Bosch (1997) el concepto de que hay que reformular el contrato que une a la escuela con la sociedad, desde el concepto de estudio, de las matemáticas, que al ser mas englobador permite superar el viejo reduccionismo de la didáctica: el de enseñanza-aprendizaje .

Chevallard (1991) sostiene que para construir la especificidad de la didáctica de la matemática es necesario incorporar la noción de saber, los saberes son una construcción que se introducen en la dinámica de lo social y lo cultural.

> *"...Los modos en que, en las instituciones se manipula el saber son problemáticas de utilización, de enseñanza y de producción...".*
> (Chevalllard, Y. 1991: 154).

Desde esta perspectiva es necesario abandonar la posición de algunas epistemologías que han hecho un estudio excluyente de los saberes y sus productores olvidando tanto su producción como su enseñanza. Recuperar la producción, la utilización y la enseñanza de los saberes resulta de este modo indispensable para abordar el problema de lo que Chevallard denomina la transposición didáctica.

A partir del concepto de transposición didáctica se nos abren dos perspectivas de análisis relacionadas entre sí, la idea que hay un conjunto de saberes sociales a los cuales se le reconocen el status de saber sabio ,y que son éstos tipos de saberes los que deben transmitirse a través de la enseñanza. Resulta fundamental plantearnos que significa el saber sabio, en base a que criterios se determina y cómo estos pueden ser trasmitidos en la escuela .

El concepto de transposición didáctica de Chevallard parece plantear la producción o generación de saberes para ser enseñados.

A partir de allí: ¿ se puede hablar de ' ' producción" del saber a enseñar? Si es así, el problema, no es como se transmiten o que deformaciones sufre el saber sabio cuando ingresa al sistema de enseñanza, sino cuáles son los mecanismos de producción de los nuevos saberes, para ser saber a ser enseñado y con que elementos esenciales de producción del conocimiento matemático se vincula: las instituciones, los sujetos, los objetos y sus interrelaciones.

Por otro lado, Chevallard sostiene que un saber sabio no se constituye en tanto sus productores sean académicos, sino en cuanto la cultura le asigna ese status, es la sociedad la que legitima un saber como tal. Los saberes para ser enseñados son aquellos que la sociedad determina como indispensable para su reproducción o para su producción en gran escala.

Es por lo tanto necesario realizar distintos niveles de análisis. Un primer nivel el de las políticas educativas a través de los diseños curriculares. Y otro que corresponde a los niveles de concreción de esas políticas: primero, los libros de texto que muchas veces se convierten en verdaderos diseños curriculares y el de la producción del saber a ser enseñado en las instituciones educativas, al cual podríamos denominar segundo nivel de concreción.

Por otra parte, Chevalar, Bosch y G Gascón (1997) sostienen que uno de los problemas mas importantes a superar para la constitución de la Didáctica de las Matemáticas como disciplina científica, fue la disociación entre conocimiento matemático y técnicas propuestas para su enseñanza y aprendizaje, lo que produjeron una ¨ enfermedad didáctica ¨ , desnaturalizando el propio conocimiento matemático.

Los autores parten de un planteo epistemológico, el principal objeto de estudio de la Didáctica de la matemáticas es la matemática misma. Dicha proposición introduce un problema fundamental : si de lo que se trata es el estudio de las matemáticas mismas, habrá que determinar por un lado, cual es la importancia de las matemáticas en la vida de los hombres - que significa ser matemático-. Y por otro lado, que significa estudiar matemáticas en la escuela.

El estudio de las matemáticas los lleva a adentrarse en la obra matemática, la cual muchas veces se presenta como incomprensible y lejana. Sin embargo, las matemáticas están presentes en nuestra vida cotidiana por medio de objetos técnicos.

Lo que se intenta desde la perspectiva de la disciplina ¨Didáctica de las Matemáticas¨ , es reestablecer la comunicación entre la sociedad y la escuela. De éste modo el proceso de estudio de las matemáticas podrá constituirse en un proyecto que involucra tanto a los profesores, como a los padres y a los alumnos.

A partir de este postulado, sostienen que uno de los objetivos mas importantes, es que la matemática en la escuela recobre su sentido fundamental:

¨... llevar a las jóvenes generaciones a estudiar aquellas obras humanas que mejor les servirán para comprender la sociedad en la se disponen a entrar ...¨ Chevallard , Bosch y Gascón (1997:13)

A partir de éste objetivo formulan la proposición que toda obra matemática surge como respuesta a una cuestión o a un conjunto de cuestiones problemáticas. Y que las mismas están formadas por elementos técnicos, tecnológicos y teóricos, que constituye una **obra matemática**.

Centrada su atención en la obra matemática, sostienen que una de sus características es el dinamismo. Ya que las técnicas generan nuevos problemas y apelan a nuevos resultado tecnológicos que a su vez permiten desarrollar técnicas ya establecidas, así como abordar nuevas cuestiones teóricas.

El objeto de la Didáctica de las matemáticas se constituye así en el estudio de la obra matemática. Ahora bien, dentro de esta lógica, para estudiar o ayudar a estudiar una obra matemática, hay que comenzar identificando los tipos de cuestiones, en respuestas a las cuales esa obra fue creada.

A partir de esta consideración se trata de reconstruir la organización matemática que la obra encarna, es decir, **los campos de problemas** en que se traducen las cuestiones, las técnicas con las que se pueden resolverlos mismos, como así mismo, los elementos tecnológicos y teóricos que permiten explicar y justificar las técnicas.

Los autores argumentan sobre la tesis que la Didáctica de las Matemáticas no puede ser reducida a un proceso de enseñaza- aprendizaje. Fundamentan este enunciado, a partir de las premisas que un conocimiento no solamente sirve para ser enseñado y aprendido sino que además sirve para actuar, para resolver problemas. De allí realizan otra inferencia: que conocer matemáticas se convierte en una necesidad para realizar ciertas actividades.

Chevallard, Bosch y Gascón (1997) , sostienen que ser matemático implica un proceso de interacción social particular, en donde se es matemático para alguien . De este modo establecen la siguiente proposición condicional: Si A es un matemático para B, A se responsabiliza de la validez que da a las preguntas de matemáticas que le plantea B.

Dentro de este enfoque - denominado antropológico- en Didáctica de las Matemáticas, las nociones de **objeto, sujeto, institución y las relaciones personales e institucionales,** se constituyen en las dimensiones de análisis que caracterizan a su objeto de estudio.

Los interrogantes que orientan el análisis de su objeto de estudio son:

- ¿ Porque las matemáticas se presenta tan extraña y lejana?
- ¿ Cual es el sentido de su estudio?

En respuesta al primer interrogante sostienen que las necesidades matemáticas que surgen en la escuela deberían estar subordinadas a las necesidades matemáticas de la vida en sociedad, de no ser así las matemáticas se presentan lejanas a los estudiantes.

Con respecto al segundo interrogante plantean que uno de los problema del estudio de las matemáticas consiste en reducir su estudio al proceso de enseñaza aprendizaje. A esta reducción, los autores denominan ¨ **enfermedad didáctica** ¨.

A partir de esta categoría de análisis, consideran diversos aspectos de las deformaciones que pueden surgir de este ¨ reduccionismo¨:

- En primer lugar sostienen que la enfermedad didáctica consiste en creer que toda la sociedad es una escuela. Esto trae aparejado importantes consecuencias. Puesto que, si reducimos todo al aprender y enseñar , nos olvidando que los conocimientos también sirven para actuar. Y perdemos de vista que en la sociedad , enseñar y aprender son sólo medios para que cierto número de personas adquieran los conocimientos necesarios para realizar ciertas actividades.

- En segundo lugar consideran importante resaltar que todas las actividades humanas suscitan procesos didácticos, procesos de estudio . Por lo tanto estamos constantemente a punto de pasar de una actividad habitual no didáctica, a una actividad didáctica.

- En tercer lugar la enfermedad didáctica también consiste en creer que para que alguien aprenda algo tiene que seguir un curso, Y esto es simplificar demasiado la cuestión, lo importante es establecer que cuando alguien quiere saber tiene que estudiar, para estudiar la ayuda de un profesor es importante pero no se reduce a ello.

- En cuarto lugar, una consecuencia de este problema , es no saber distinguir entre lo didáctico y lo no didáctico. Muy a menudo todas las actividades humanas suscitan procesos didácticos ya que estamos constantemente a punto de pasar de una actividad habitual , no didáctica, a una actividad didáctica.

Un proceso didáctico es un proceso de estudio. y en éste sentido la diferencia entre alumnos y profesor no es tan marcada , como cuando nos referimos al marco escolar.

Este enfoque plantea una perspectiva de análisis en donde el problema central se convierte en la problematización del conocimiento matemático y el estudio de la obra matemática.

Este punto de vista se fundamenta en la distinción entre actividad matemática y actividad de estudio .

- **La actividad de estudio** puede ser considerada como emergente de una obra pero también debe ser productora del saber matemático. Por lo tanto la obra matemática es el objeto y a la vez el producto de la actividad de estudio.

- **La actividad matemática** es el trabajo de construir modelos matemáticos encaminados a resolver problemas, para estudiar sistemas, ya sean estos matemáticos o no matemáticos.

Es posible distinguir tres tipos de actividades que se pueden considerar como matemáticas:

a) **Primero**: resolver problemas a partir de herramientas matemáticas que uno ya conoce y sabe como utilizar.

b) **Segundo**: en caso de enfrentarnos con problemas que no sabemos como resolver porque carecemos de los instrumentos apropiados, la mejor solución es procurar esos instrumentos, ya sea por nosotros mismos o recurriendo a algún matemático que nos facilite la tarea.

   Surge de éste modo la necesidad de aprender matemáticas para responde a las cuestiones propuestas, y aparece en consecuencia dentro de este marco, la actividad de enseñar matemáticas

> *"...el profesor de matemática ayuda a sus alumnos a buscar y poner a punto los instrumentos matemáticos que estos necesitan para modelizar y resolver ciertas cuestiones desconocidas para ellos aunque clásicas para un matemático profesional..." Ives Chevallard (1997*: 56)

c) **Tercero:** el trabajo matemático se presenta como una actividad reservada a los investigadores de matemáticas. Son muy numerosas las situaciones matemáticas y extra-matemáticas que van surgiendo y para las que hay que crear nuevos modelos para estudiarlas o bien para imaginar nuevas utilizaciones de antiguos modelos.

En un sentido amplio se podría decir que aquel que hace matemáticas participa de alguna manera en un trabajo creador , el que utiliza matemáticas conocidas para resolver un problema matemático clásico, muy a menudo tendrá que modificar el modelo matemático que maneja para adaptarlo a las peculiaridades de su problema, lo cual comporta la posibilidad de enunciar y abordar problemas nuevos.

Hablamos entonces de **proceso didáctico**, cada vez que alguien es llevado a estudiar matemáticas o cada vez que alguien ayuda a otros u otros a estudiar matemáticas.

En este contexto la enseñanza aparece como un medio para el estudio .Lo didáctico es todo lo referente al estudio, podemos hablar de procesos didácticos cada vez que alguien se ve llevado a estudiar algo, solo o con la ayuda de otras personas.

Dentro de esta perspectiva, las nociones de enseñanza- aprendizaje son resignificadas , adquiriendo una nueva dimensión. De este modo se entiende por ¨ aprendizaje ¨ el efecto perseguido por el estudio y por ¨ enseñanza ¨ uno de los medios para el estudio.

La Didáctica de las Matemáticas se constituye así en la ciencia del estudio y de la ayuda al estudio de las matemáticas. Su objetivo es llegar a describir y caracterizar los procesos de estudio de cara a proponer explicaciones y respuestas sólidas a las dificultades con que se encuentran todos aquellos que se ven llevados a estudiar matemáticas o a ayudar a otros a estudiar matemáticas.

Por este motivo, el desarrollo de la Didáctica de las Matemáticas se ha visto obligada a poner de manifiesto, a cuestionar la transparencia del conocimiento matemático, a problematizarlo y en definitiva a integrar entre sus objetos de estudio nociones matemáticas como por ejemplo, proporcionalidad, numero decimal, función, etc. Esto significa para los autores, una ampliación de la problemática didáctica que inicialmente se manifiesta en " la teoría de las situaciones didácticas" de Brousseau , que provocó una transformación importante en la naturaleza de la didáctica como disciplina . A partir de allí, se inaugura una nueva vía de acceso al análisis de los fenómenos didácticos a partir de la noción de transposición didáctica.

> *¨...Gracias a ello fue posible recorrer posteriormente el camino inverso, es decir partir del hombre haciendo matemáticas para constatar que lo didáctico es denso en lo matemático y que todo fenómeno matemático tiene un componente didáctico esencial. Este es el punto de vista antropológico inaugurado por Ives Chevallard, Gascon, J y Bosch, M....¨(1997:76)*

Lo que muestra este enfoque es que lo matemático y lo didáctico son empíricamente inseparables. En éste sentido la noción misma de fenómeno didáctico se generaliza para hacer referencia a una dimensión esencial de toda actividad matemática.

Lo didáctico deja de ser exclusivo del proceso de enseñanza aprendizaje para referirse a cualquiera de los aspectos del proceso de estudio de las matemáticas.

La investigación en didáctica se propone llegar a entender mejor los procesos didácticos y los fenómenos que estos originan , se parte del principio que solo a partir de una mejor comprensión de estos procesos se podrán proponer actuaciones y medios concretos para mejorar el estudio de las matemáticas.

Los planteos previos nos llevan a considerar por último, que a partir del reduccionismo del que ha sido objeto la didáctica de la matemática, se produce un problema emergente de esta situación, que los autores identifican como un fenómeno didáctico: el de la¨ **irresponsabilidad matemática de los alumnos**

Esta última noción- fenómeno didáctico en término de los autores- , aparece relacionada con otros fenómenos que aparecen dentro del sistema escolar. Se encuentra vinculada estrechamente con el tipo de contrato didáctico que se establece en la institución educativa, en especial lo relacionado con la asignación de la responsabilidad matemática solamente al profesor.

El concepto de irresponsabilidad matemática de los alumnos adquiere una nueva dimensión, por cuanto se trata de interpretarlo en relación directa al conocimiento matemático que se encuentra vinculado a ella.

En este sentido sostienen, que sin negar la importancia de los factores psicológicos, actitudinales , de motivación de los alumnos y profesores o los métodos y técnicas pedagógicas utilizadas, el origen del problema no se encuentra en este plano.

Es en el tipo de actividades matemáticas que desarrollan conjuntamente los profesores y los alumnos en el aula y fuera de ella y como se plantean las cláusulas del contrato didáctico.

La irresponsabilidad matemática consiste en que el alumno no se responsabiliza de la validez de sus repuestas, sino que espera que el profesor determine si la misma es correcta o no. Y esta situación parece normal- establecido por el contrato didáctico- ya que el alumno es el que no sabe, el que no es matemático y el profesor -el que sabe- debe determinar la verdad o falsedad de sus respuestas .

Para modificar esto sería necesario que el profesor se reconozca así mismo como matemático y los alumnos asuman hacer ellos mismos de matemáticos y en este sentido puedan responsabilizarse por las respuestas que da a las cuestiones que se plantean.

Este problema, vinculado a la ¨ enfermedad didáctica ¨ trae aparejado otra cuestión. Si el profesor de matemática actúa sólo como tal, y no asume que también es un matemático, la enseñanza se reduce a trasmitir conocimientos.

De este modo los autores dicen:

> *¨...Un profesor de matemática es un matemático. Pero un matemático no es necesariamente profesor de matemática(...)pero lo olvida fácilmente si solo hace de matemático para sus alumnos. Si sólo es matemático por razones didácticas .O por decirlo de otra*

manera mas técnica, si solo es matemático para satisfacer necesidades de origen didáctico. Porque se olvida entonces que hay necesidades matemáticas que no son de origen didáctico..." Ives Chevallard, Josep Gascón y Mariana Bosch (1997: 32)

Aparecen así, como parte de el objeto de estudio de las matemáticas, cuestiones a cerca de como se considera el trabajo matemático personal del alumno en el marco del proceso de enseñanza aprendizaje, que papel se adjudica al profesor en las instituciones escolares y, como inciden los libros de texto dentro de éste fenómeno.

El análisis realizado del desarrollo histórico de la Didáctica de las Matemáticas, y la identificación de dos tradiciones de investigación en éste campo, con supuestos básicos subyacentes de orden epistemológico distintos, me permite contextualizar la investigación .

Tomando el segundo nivel de concreción curricular, segundo nivel de transposición didáctica desde Chevalard, analizo en la investigación, los libros de textos que se proponen para enseñar matemáticas , a partir de los aportes de la Didáctica de las matemáticas desde la línea antropológica.

Parto del supuesto que existe continuidad en los libros de textos en la concepción tradicional de la Didáctica de las Matemáticas, basada en una tendencia a realizar una separación epistemológica entre el conocimiento matemático y las técnicas propuestas tanto para su enseñanza como para su aprendizaje. Cuestiones que abordaré en los siguientes capítulos

II- ANTECEDENTES SOBRE INVESTIGACIONES EN RESOLUCION DE PROBLEMAS

Existe una amplia literatura en investigación acerca del tema "Resolución de problemas". La preocupación por este campo de problemas queda evidenciado en los congresos nacionales e internacionales de la matemática. Es un tema complejo y amplio que ha sido estudiado desde distintos ángulos.

En un trabajo con los antecedentes, se puede observar que las investigaciones realizadas por distintos autores, pueden agruparse en dos tipos de enfoques: psicológico y matemático.

Desde la psicología, es importante considerar los trabajos de Dewey , psicólogo y pedagogo funcionalista, que se destaca por su teoría del interés. Presentó en 1888 un modelo para resolver problemas que consta de las siguientes fases:

1. Identificación de la situación problemática.
2. Definición precisa del problema.
3. Análisis medios- fines. Plan de solución.
4. Ejecución del plan.
5. Asunción de las consecuencias.
6. Evaluación de la solución. Supervisión. Generalización. Problema.

Otro aporte importante es el de los Gestaltistas, quienes explican que la comprensión de un problema se produce cuando la persona logra concebirlo como un todo y es capaz de establecer la relación de las partes con el todo. Así en 1926, Wallas propone un modelo para la resolución de problemas que consta de cuatro fases:

1. La preparación: que implica la recolección de información e intentos preliminares de solución.
2. La incubación: que significa dejar el problema de lado para realizar otras actividades o dormir.
3. La iluminación: es cuando aparece la clave para la solución, lo que se denomina el "insigh".
4. La verificación: es cuando se comprueba la solución para estar seguros de que funciona.

Wertheimer, por su parte en 1945, intentó demostrar que la aprehensión de las estructuras subyacentes, lleva al pensamiento productivo y a la resolución elegante de los problemas.

Duncker en 1945, orientó el proceso para conseguir el "insight". Insistió en un doble proceso para resolver problemas: por un lado, el procesamiento desde arriba, que parte del análisis de los objetivos y el replanteo del problema; y por otro, el procesamiento desde abajo que parte del análisis de los elementos para llegar al objetivo del problema.

En 1982, Mason, Burton y Stacey proponen un modelo que no pretende ser un instrumento de estudio o análisis, sino una ayuda para la instrucción. El objetivo de estos autores es mostrar como atacar el problema de una manera eficaz y como ir aprendiendo de la experiencia. Se basan en los trabajos de Polya y Schoenfeld.

En 1984, Bransford – Stein crean el "método ideal" como modelo de resolución de problemas, dicho modelo se basa en:

1. La identificación de los problemas.
2. La definición y representación del problema.
3. La exploración de posibles estrategias.
4. La actuación fundada en alguna estrategia.
5. Los logros, que consiste en observar y evaluar los efectos de las actividades.

Otra tendencia en investigación, son las teorías basadas en el procesamiento de la información, en la que se destacan tres fases en la resolución de problemas:

- Preparación
- Producción
- Enjuiciamiento.

Neweel y Simon, con sus investigaciones pueden considerarse como ejemplos dentro de este paradigma.

En 1983, Mayer desde esta perspectiva analiza los conocimientos necesarios para la resolución de problemas matemáticos. Considera dos estadios: el de traducción y el de solución, para cada uno de ellos describe los tipos de conocimientos que son necesarios de considerar.

En el estadio de la traducción es necesario considerar los siguientes tipos de conocimientos: lingüístico, semántico y esquemático.

En el estadio de solución, se consideran los tipos de conocimiento: operativo y estratégico.

Los Enfoques desde la Matemática:

En estos enfoques voy a considerar solo aquellas investigaciones que plantean modelos de resolución de problemas desde el contenido matemático.

Parto de considerar que un modelo matemático se construye para entender un fenómeno matemático. Desde esta afirmación es importante considerar que un aspecto esencial de la actividad matemática consiste en construir un modelo matemático de la realidad que queremos estudiar. Se trabaja con este modelo y se interpretan los resultados obtenidos en este trabajo para contestar a las cuestiones planteadas inicialmente.

Por lo tanto, gran parte de la actividad matemática puede identificarse con una actividad de modelización matemática.

Entre las investigaciones sobre el tema que me parecen más relevantes según el objeto de esta investigación, se pueden destacar:

1.- El Modelo de Polya

Polya sugirió que la resolución de problemas está basada en procesos cognitivos que tienen como finalidad encontrar una salida a una dificultad, una vía alrededor de un obstáculo. Este objetivo no es inmediatamente alcanzable, sino que está mediatizado por fases.

El modelo de Poyla se encuentra organizado en cuatro fases en las cuales podemos encontrar distintas subfases, que se presentan del siguiente modo:

- Fase 1. Comprensión del problema, consiste en reconocer la incógnita, los datos y las condiciones del problema.
- Fase 2 . Concebir un plan: es decir, determinar la relación inmediata entre los datos y la incógnita. De no encontrarse una relación inmediata, puede considerar problemas auxiliares para obtener finalmente un plan de solución.

a) Fase 3: Ejecución del plan, lo que implica comprobar cada uno de los pasos de la solución.

b) Fase 4: Examinar la solución obtenida, lo que lleva a verificar el resultado.

Sugiere para cada una de las fases, estrategias basadas en una técnica general para resolver problemas. La misma no garantiza que se encuentre la solución, pero puede constituir una guía para resolver el problema. Los momentos de aplicación de esta técnica son:

- Si no es posible resolver lo propuesto, hay que buscar un problema similar apropiado, que sí se sepa resolver.
- Hay que dar el problema por resuelto y tratar de desandar el camino.

- Es importante tratar de avanzar.
- Hay que restringir las condiciones.
- Es necesario buscar un contra ejemplo.
- Hay que tantear las posibles soluciones.
- Si se ve la necesidad, hay que cambiar el enfoque conceptual.

El modelo de Polya se basa en la idea de la existencia de un resolutor ideal, es decir una persona que al resolver un problema avanza linealmente desde el enunciado hasta hallar la solución, sabiendo en todo momento qué hace y por qué lo hace, y que, para acabar, examina la solución, comprueba que es adecuada y ve hacia donde le conduce (Puig y Cerda- 1988).

Para Polya, resolver problemas es una actividad práctica como vender o tocar el piano. Naturalmente la práctica debe ser guiada, de allí la importancia de estructurar la resolución de problemas en las cuatro fases citadas.

En cada fase propuesta, lo que se propone es potenciar en el alumno una estrategia de resolución de problemas.

Es importante saber que para Polya existen dos grandes tipos de problemas:

a) Problemas para resolver.
b) Problemas para demostrar.

Esta división o clasificación no es muy clara como veremos en el siguiente ejemplo:

Calcular la suma: $S_n = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + ... + \frac{n}{(n+1)!}$

Cuando intentamos resolver aparece una conjetura, e inmediatamente el problema se convierte en una demostración, como la ejemplificaremos a continuación:

Ejemplo:

Para n = 2 $\quad S_2 = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} = \frac{3+2}{3!} = \frac{5}{3!} = \frac{3!-1}{3!}$

Para n = 3 $\quad S_3 = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} = \frac{12+8+3}{4!} = \frac{23}{4!} = \frac{4!-1}{4!}$

Para n = 4 $\quad S_4 = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \frac{4}{5!} = \frac{5!-1}{5!}$

Supongamos que es valido para n $S_n = \frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\ldots\ldots\ldots+\frac{n}{(n+1)!}=\frac{(n+1)!-1}{(n+1)!}$ (1)

Probaremos por inducción (1), que vale

Para n+1 $S_{n+1} = \frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\ldots\ldots\ldots+\frac{n}{(n+1)!}+\frac{n+1}{(n+2)!}=\frac{(n+2)!-1}{(n+2)!}$

Entonces: $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\ldots\ldots\ldots+\frac{n}{(n+1)!}+\frac{n+1}{(n+2)!}=$

Por hipótesis inductiva:

$$=\frac{(n+1)!-1}{(n+1)!}+\frac{(n+2)!-1}{(n+2)!}=\frac{(n+2)[(n+1)!-1]+(n+1)}{(n+2)!}=$$

$$=\frac{(n+2)(n+1)!-n-2+n+1}{(n+2)!}=\frac{(n+2)!-1}{(n+2)!}$$

A través del ejemplo, observamos que el problema para resolver se convirtió en problema para demostrar, en consecuencia es difícil hacer una división entre problema para resolver y problema para demostrar.

$\therefore\ S_n \Rightarrow S_{n+1}$ como quería demostrar.

2.- Modelo de Schoenfeld

Una variación del modelo iniciado por Polya es la de Schoenfeld. En 1985 diseña uno de los modelos más completos, sobre todo en estrategias heurísticas.

Su modelo se basa en una observación minuciosa del proceso de resolución de problemas reales y, a posteriori, construye bloques de conductas más o menos homogéneas, que se dan en un período de tiempo. Realiza una calificación de los bloques de modo que especifiquen su función en la globalidad del proceso.

En este modelo se pueden distinguir tres fases relativas a los bloques de conducta antes mencionados: **análisis**, **exploración** y **comprobación de la solución obtenida**. Para ello preparó una tabulación de los principios heurísticos mas frecuentemente utilizados en las Matemáticas de nivel universitario:

Con respecto al **Análisis** propone las siguientes pautas de trabajo:

1. Si es posible, trazar un diagrama.
2. Examinar los casos particulares, en función de los siguientes criterios:
   a) Elegir valores especiales que sirvan para ejemplificar el problema y facilitar la comprensión del mismo.

b) Examinar casos limites, para explorar la gama de posibilidades.
c) Asignar a los parámetros enteros que puedan figurar la secuencia de valores 0, 1, 2... y buscar una pauta inductiva.

3. Probar a simplificar el problema, ello sería posible si tenemos en cuenta que:
   a) Hay que sacar partido de posibles simetrías.
   b) Si no hay simetría, mediante razonamientos "sin pérdida de generalidad" (incluido los cambios de escalas).

Con respecto a la **Exploración** propone:

1. Examinar problemas esencialmente equivalentes, teniendo en cuenta que ello es posible:
   a) Por sustitución de las condiciones, o por otras equivalentes.
   b) Por recombinación de los elementos del problema de distintos modos.
   c) Por introducción de elementos auxiliares.
   d) Por replanteo del problema mediante:
      - El cambio de perspectiva o de notación.
      - La consideración del razonamiento por contradicción o el contra-reciproco.
      - La suposición de que se dispone de una solución y la determinación de cuáles serian sus propiedades.
2. Examinar problemas ligeramente modificados, mediante:
   a) La Elección de sub objetivos.
   b) El relajamiento de una condición y el tratar de volver a imponerla.
   c) La descomposición del problema en casos y el estudio caso por caso.

3. Examinar problemas ampliamente modificados, mediante:
   a) La construcción de problemas análogos con menos variables.
   b) El mantenimiento fijo de todas las variables menos una, para determinar qué efecto tiene esa variable.
   c) Tratar de sacar partido de problemas a fines con respecto a la forma, los datos o las conclusiones.
   d) Recordar que, al manejar problemas afines más fáciles se debería sacar partido, tanto del resultado como del método de resolución.

Comprobación de la solución obtenida

Esto implica responder a los siguientes interrogantes:

1. ¿Verifica la solución obtenida los siguientes criterios específicos? :

a) Utilización de todos los datos pertinentes.

b) Es acorde con predicciones o estimaciones razonables.

c) Resiste a ensayos de simetría, análisis dimensional o cambio de escala.

2. ¿Verifica los siguientes criterios generales? :

a) Si posible obtener la misma solución por otro método.

b) Si puede quedar concretada en casos particulares.

c) Si es posible reducirla a resultados conocidos.

d) Si es posible utilizar la solución para generar algo ya conocido.

Los siguientes ejemplos sirven para ilustrar el modelo de la heurística especifica de Schoenfeld, relativas a las fases de análisis y exploración.

Examinar casos particulares

1.- Calcular el valor de $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\ldots\ldots+\frac{n}{(n+1)!}$

Resuelto en página......

Examinar problemas esencialmente equivalentes

1.- Resolver la ecuación $x^2+\left(\frac{x}{x+1}\right)^2=1$

Posibles soluciones:

I) Si multiplicamos por $(x+1)^2$ y resolviendo obtenemos $x^4+2x^3+x^2-2x-1=0$ (1)

No parece tener raíces enteras que haría una solución mas simple.

II) Si sustituimos por $x=\cos\alpha$ y $\frac{x}{x+1}=\operatorname{sen}\alpha$.

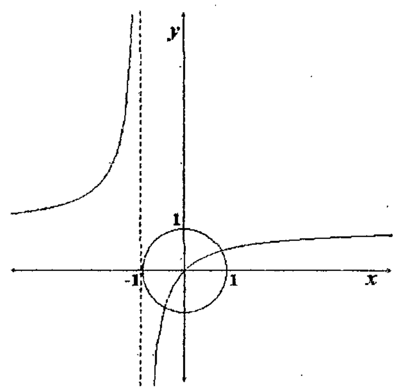
Resuelta $tang\ \alpha=\frac{1}{1+\cos\alpha}$; nuevamente sustituyendo $tang\ \frac{\alpha}{2}=t$, obtenemos

$\operatorname{sen}\alpha=\frac{2t}{1+t^2}$; $\cos\alpha=\frac{(1-t^2)}{1+t^2}$ queda la ecuación : $(1+t^2)(1-t^2)=4t$ (2)

Ecuación de cuarto grado, mas sencillas que (1)

III) Resumiendo a la geometría analítica obtenemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} y = \dfrac{x}{x+1} \\ \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$



Donde gráficamente nos aproximamos a la solución.

<u>*Examinar problemas ampliamente modificados*</u>

Si a, b, c y d son no negativos y menores que 1, comparar $(1-a)(1-b)(1-c)(1-d)$ y $1-a-b-c-d$.

Cuando hay un sólo producto $1-a = 1-a$

Cuando hay dos productos ¿cómo se relacionan $(1-a)(1-b)$ y $1-a-b$?

$(1-a)(1-b) = \quad 1-a-b+ab \ \geq \ 1-a-b$

Suponiendo tan sólo que $a > 0$, $b > 0$, sólo vale el signo igual cuando $ab = 0$, cuando al menos uno de los dos a, b se anula.

Usando tres productos; si $(1-a)(1-b) \ \geq \ 1-a-b$ $\begin{cases} 0 \leq a \leq 1 \\ 0 \leq b \leq 1 \\ 0 \leq c \leq 1 \end{cases}$

$(1-a)(1-b)(1-c) \ \geq \ [1-(a+b)](1-c) = 1-a-b-c+(a+b)c \ \geq \ 1-a-b-c$

La igualdad vale sólo cuando al menos dos de a, b, c son nulos.

Procediendo análogamente, resulta si $0 \leq a, b, c, d \leq 1$, $(1-a)(1-b)(1-c)(1-d) \ \geq \ 1-a-b-c-d$.

A través de los ejemplos observamos que las aportaciones de Schoenfeld, mejora la heurística de Polya, buscando siempre un problema más sencillo al propuesto.

3- Modelo de Miguel de Guzmán

Siguiendo el modelo de Polya, en 1991, Miguel de Guzmán propone uno de los últimos modelos de resolución de problemas.

A partir de las cuatro fases propuestas por Poyla, orienta y anima al resolutor en estrategias de resolución de problemas para que avance.

Estas fases se caracterizan por:

1. Familiarizarse con el problema, lo que implica:

- Tratar de entender a fondo la situación.
- Trabajar con paz, con tranquilidad, al propio ritmo.
- Jugar con la situación, enmarcándola, tratando de determinar el aire del problema, perdiendo el miedo.

2. Buscar estrategias de resolución, teniendo en cuenta que:

- Hay que empezar por lo fácil.
- Hay que experimentar.
- Es necesario realizar un esquema, una figura, un diagrama.
- Es importante escoger un lenguaje apropiado y una notación apropiada.
- Hay que buscar un problema semejante.
- Es importante tener en cuenta el proceso de inducción matemática.
- Hay que suponer el problema como resuelto.
- Hay que suponer que el problema no está resuelto.

3. Llevar adelante la propia estrategia de resolución de problemas:

Para ello es necesario tener en cuenta los siguientes criterios:

- Seleccionar y llevar adelante las mejores ideas que se pensaron en la fase anterior.
- Actuar con flexibilidad. No darse por vencido fácilmente. No dogmatizarse con una idea. Si las cosas se complican demasiado, probablemente hay otra vía. Mirar a fondo la posible solución. Revisar el proceso y sacar consecuencias de él.
- Examinar a fondo el camino seguido. Para ello propone que el que intenta resolver un problema, se responda a sí mismo, el siguiente cuestionario ¿Cómo llegué a la solución?, ¿Por qué no llegué?.
- Tratar de entender no solo que la cosa funciona, sino por qué funciona.
- Mirar si se encuentra un camino más simple de resolución.
- Mirar hasta donde llega el método.
- Reflexionar sobre tu propio proceso de pensamiento y sacar consecuencias para el futuro.

Miguel de Guzmán insiste en que es necesario tener una idea clara, un modelo de resolución de problemas, a los que nuestra forma de proceder se debe ajustar.

Se debe armonizar adecuadamente las dos componentes que integran el modelo: el componente heurístico, los procesos del pensamiento y los contenidos específicos del pensamiento matemático.

A través de las aportaciones de Polya, Schoenfeld y Miguel de Guzmán, el proceso de resolución de problemas es estudiado desde el punto de vista de la heurística. *"Heurístico"* viene del griego eurisko, de donde proviene también el famoso eureka que la leyenda atribuye a Arquímedes, que significa encontrar.

En las tres propuestas, la heurística está pensada para el alumno, en consecuencia se traslada al alumno la responsabilidad de resolver el problema.

Ahora bien, a partir de la descripción de los modelos que he realizado, considero que no es suficiente una heurística de ejecución centrada en el alumno, que tienda a mejorar directamente el proceso de resolución de problemas.

Si bien la heurística es útil, se debería ampliar la problemática de estudio. Partiendo de sistema de estudio de las matemáticas, los interrogantes que me surgen son:

- ¿Con qué criterios se selecciona una clase de problemas?.
- ¿Qué relación existe entre la clase de problemas y los mecanismos de solución de problemas?.
- ¿Los problemas elegidos generan otros tipos de problemas?.

En definitiva, lo importante a resolver de la resolución de problemas en relación con su enseñanza es:

- ¿Cómo podemos elaborar una estrategia didáctica para enseñar problemas de ecuaciones?
- ¿Qué papel juega la resolución de problemas de ecuaciones en la enseñanza de la matemática?.
- ¿Se trata solamente del uso de técnicas mecánicas?.
- ¿Cómo se puede aprovechar el uso de los problemas de ecuaciones en el proceso de estudio?.

Este conjunto de interrogantes es lo que guiará mi análisis en los capítulos siguientes.

III – LA RESOLUCION DE PROBLEMAS EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMATICAS

Como ya sostuve en el capítulo II, el papel de la resolución de problemas en el sistema de enseñanza de la matemática es muy importante, pero no está claro cómo interpretar y aplicar la resolución de problemas en la enseñanza.

En los libros de textos, aparece con evidencia el problema que acabo de plantear: o bien el problema es excusa para introducir un concepto, pero luego se lo abandona, o bien se enseña cómo se resuelve un problema como una simple técnica. En ambos casos existe un tratamiento ambiguo del problema.

Si bien existe una idea dominante acerca de enseñar a partir de la resolución de problemas, considero que se hace un estudio segmentado del mismo, por un lado se trabaja con la resolución de problemas como mera técnica heurística, y por otro lado se trabajan las nociones matemáticas.

De modo tal, que si queremos superar esta dicotomía, creo necesario responder a los siguientes interrogantes:

- ¿Qué es un problema matemático?.
- ¿Qué significa enseñar matemática?.

El último interrogante debe ser contextualizado, ya que no es lo mismo enseñar matemática en EGB_3, en el Polimodal o en la Universidad. Es importante determinar la institución.

No haremos una descripción de lo que pasa en una clase determinada sino interpretaremos la actividad matemática en los libros de textos. A partir de las proyecciones podemos interpretar lo que sucede.

A cada una de estas maneras ideales de entender la resolución de problemas denominaremos "Paradigmas", entendiendo por paradigma en sentido amplio el conjunto de concepciones teóricas, metodológicas y de técnicas que guían el trabajo de investigación y de los docentes, mediante los libros de textos, en el aula.

J. Gascón (2001) Identifica lo que denomina siete "paradigmas" sobre el enfoque de resolución de problemas. Los diversos enfoques reflejan diversas concepciones sobre la matemática, su enseñanza y aprendizaje, lo que es un problema, el proceso de resolución, el papel que juegan los problemas en la enseñanza y el papel que juegan las técnicas y las teorías.

Los "paradigmas" que aparecen frecuentemente entremezclados en la practica docente real son:

- **El paradigma "teoricista"**

En este paradigma, la resolución de problemas es considerada como un aspecto secundario dentro del proceso didáctico global. La actividad matemática se pone entre paréntesis; y solo se toma en cuenta el fruto final de esta actividad. En particular se ignoran las tareas dirigidas a elaborar estrategias de resolución de problemas y, por lo tanto, los problemas tienden que ser trivializados y descompuestos en ejercicios rutinarios.

Los problemas se presentan como ajenos a las nociones matemáticas; y no juegan ningún papel importante en su constitución. Estos son utilizados para aplicar, ejemplificar o consolidar los conceptos teóricos e incluso para motivarlos, introducirlos o justificarlos; pero, estas funciones de los problemas son consideradas como 'meramente pedagógico" en el sentido negativo de no constitutivas del conocimiento matemático propiamente dicho.

La característica de este paradigma es que ***ignora absolutamente los procesos de la actividad matemática*** como tal y en consecuencia, ***no concede ninguna importancia*** a la ***génesis y el desarrollo de los conocimientos matemáticos***.

Aquí se da el momento del primer encuentro – momento teórico- de los alumnos con los objetos matemáticos que les presenta el profesor. Para el teoricismo que identifica "aprender matemática" con "aprender teorías acabadas" significa que el proceso didáctico empieza en el instante en que el profesor enseña esas teorías a los alumnos.
Así por ejemplo:

> *1- Demostrar que al unir los puntos medios de los lados consecutivos de un cuadrilátero, se obtiene siempre un paralelogramo.*

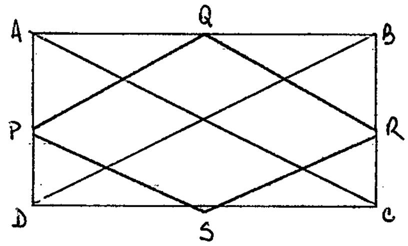
Se puede descomponer en una cadena de simples ejercicios como:

i) Sobre el cuadrilátero ABCD, dibujar el cuadrilátero QRSP, donde Q es el punto medio del lado AB, R es el punto medio de BC, S es el punto medio de CD y P es el punto medio de DA.

ii) Dibujar las diagonales BD y AC del primer cuadrilátero.

iii) Aplicar el Teorema de Thales para comprobar que PQ//BD. Y RS//BD. Deducir que PQ//RS.

iv) Demostrar análogamente que QR//PS.



$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{AQ}{QB}=\dfrac{AP}{PD} & \Rightarrow QP // BD \\ \\ \dfrac{CS}{SD}=\dfrac{CR}{RB} & \Rightarrow RS // BD \end{array}\right\} \Rightarrow QP // RS \quad (1)$$

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{BR}{RC}=\dfrac{BQ}{QA} & \Rightarrow QR // AC \\ \\ \dfrac{DS}{SC}=\dfrac{DP}{PA} & \Rightarrow SP // AC \end{array}\right\} \Rightarrow QR // SP \quad (2)$$

Con (1) y (2) queda demostrado el problema.

2- Supongamos que los puntos A, B, C, D y E (distintos) del plano verifican las siguientes condiciones:

a) A, B y C no están alineados.

b) La recta AD es paralela a la recta BC.

c) La recta AE es paralela a la recta CB.

Demostrar que los puntos A, D y E están alineados.

Solución:

Consideramos los puntos: $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$, $C(x_3;y_3)$, $D(x_4;y_4)$ y $E(x_5;y_5)$

Si los puntos A, D y E están alineados quiere decir que son contenidos en la misma recta.

Entonces:

Si la recta AD // BC, significa que tienen la misma pendiente.

La pendiente de la recta que pasa por AD es: $\dfrac{y_1-y_4}{x_1-x_4}$

La pendiente de la recta que pasa por BC es: $\dfrac{y_2-y_3}{x_2-x_3}$

La pendiente de la recta que pasa por AE es: $\dfrac{y_1-y_5}{x_1-x_5}$

Al se la recta AD//BC significa que: $\dfrac{y_1-y_4}{x_1-x_4}=\dfrac{y_2-y_3}{x_2-x_3}$

Al ser la recta AE //CB significa que: $\dfrac{y_1-y_5}{x_1-x_5}=\dfrac{y_2-y_3}{x_2-x_3}$

Entonces si: $\dfrac{y_1-y_4}{x_1-x_4}=\dfrac{y_2-y_3}{x_2-x_3} \wedge \dfrac{y_2-y_3}{x_2-x_3}=\dfrac{y_1-y_5}{x_1-x_5} \Rightarrow \dfrac{y_1-y_4}{x_1-x_4}=\dfrac{y_1-y_5}{x_1-x_5}$ lo que demuestra que los puntos A, D y E están alineados.

A través de los ejemplos observamos que el alumno no puede resolver los problemas sino tiene los elementos como ser, definiciones, teoremas, axiomas entre otros.

Se podría utilizar y manipular ciertos conceptos antes de introducirlos teóricamente y justificarlos. Esto no ocurre en este paradigma.

- **El paradigma tecnicista**

Este paradigma se caracteriza por la poca importancia que otorga al dominio de las técnicas matemáticas. La postura defensiva de este paradigma es situar las técnicas matemáticas en el lugar que le corresponden con base en su función en el proceso de aprendizaje.

El paradigma tecnicista comparte con el teoricista trivializacion de los problemas; el uso de las técnicas "simples" llevan a considerarlas como principio y final de la actividad matemática, hace olvidar los "auténticos" problemas que son aquellos cuya dificultad principal consiste en escoger las técnicas adecuadas para construir una "estrategia de resolución".

El tecnicismo parte de ciertas técnicas y plantea solamente aquellos ejercicios que sirven para llegar a dominarlas; así de esta forma excluye las estrategias complejas y no algorítmicas del repertorio de técnicas.

Los paradigmas teoricista y tecnicista comparten una concepción psicologista ingenua del proceso didáctico, consideran al alumno como una caja vacía que debe llenarse a lo largo de un proceso gradual o como un autómata que mejorara el dominio de la técnica mediante la simple repetición. Estos paradigmas consideran a los problemas como si fuesen aislados y descontextualizados; es decir presentan a los problemas se los trata individualmente y nunca como representantes de ciertas clases de problemas; y por otra, se los presenta separado de su contexto.

A partir de la reforma iniciada en el año 1997 en la Argentina y en Salta, en los libros de textos la geometría escolar se sitúa implícitamente en el modelo cartesiano que suele identificarse con la geometría plana. En esta situación se le proporciona al alumno técnicas algorítmicas y sus correspondientes clases de problemas que se utilizan para practicar los citados algoritmos.

Entre algunos ejemplos extraídos de los libros de textos, se pueden observar los siguientes problemas relativos a calcular:

1. Graficar recta que pasa por un punto dado y es perpendicular a otra recta dada.
2. Resolver ecuaciones aplicando las propiedades de los sistemas numéricos.

El alumno aprende el algoritmo y el problema se resuelve fácilmente. En consecuencia no se da importancia a la génesis de los conceptos matemáticos y se los considera como una cuestión acabada, solo interesa aplicar el algoritmo.

Como síntesis, se puede decir que tanto el paradigmas Teoricista y Tecnicista se fundamental en una concepción de la resolución de problemas como proceso mecánico controlado por el profesor.

Estos paradigmas presentan cierta analogía con el modelo Euclideano. Históricamente el Modelo Euclidiano convive en el Sistema de Enseñanza de la Matemática y se lo critica en función de que considera a toda la matemática como un sistema euclidiano.

Por lo que se plantea una reformulación del Euclidianismo que desde luego incide en el Sistema Enseñanza de la Matemática bajo la denominación del "Modernismo". Cambio que aparece en los libros de textos, en caso Argentino a partir de 1960.

- **El paradigma modernista**

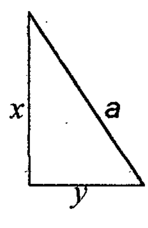
Se caracteriza por la actividad exploratoria. El alumno conoce y domina ciertas técnicas, pero debe recrear una estrategia compleja para la resolución de problemas.

Este paradigma tiende a identificar la actividad matemática con la exploración de problemas no triviales; es decir con las tareas que se realizan cuando todavía no se sabe gran cosa de la solución, se intenta aplicar los resultados y se buscan problemas semejantes. Es decir se caracteriza por conceder una preeminencia absoluta al momento exploratorio, es decir que identifica "enseñar" y "aprender matemática" con enseñar y aprender esta actividad exploratoria.

Los problemas abiertos propuestos por Arsac (1988) y los problemas olímpicos propuestos por M. Callejas (1994), caracterizan este paradigma.

Así por ejemplo:

Ejemplo 1: *Calcula la longitud "a" de la hipotenusa de un triángulo rectángulo, dados el área "A" y el semiperímetro "s".*



Llamamos con x e y a los catetos.

Sabiendo que: $A = \frac{xy}{2}$ y $s = \frac{x+y+a}{2}$

Teniendo en cuenta el Teorema de Pitágoras: $x^2 + y^2 = a^2$

Expresamos $2A = xy$, si multiplicamos por 2 la igualdad tenemos $4A = 2xy$

Si $2s - a = x + y$

Elevamos al cuadrado ambos miembros: $(2s - a)^2 = (x + y)^2$

Desarrollamos los cuadrados del binomio: $4s^2 + a^2 - 4sa = x^2 + y^2 + 2xy$

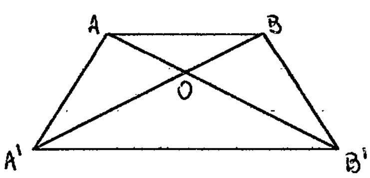
Como $x^2 + y^2 = a^2$ y $4A = 2xy$, la igualdad nos queda: $4s^2 + a^2 - 4sa = a^2 + 4A$

Cancelando a^2, obtenemos $4s^2 - 4A = 4sa$

Despejando a de la igualdad nos queda $\dfrac{4s^2 - 4A}{4s} = a$ o sea $\dfrac{s^2 - A}{s} = a$, esta expresión nos indica la longitud "a" en función de A y s.

Ejemplo 2: *Las diagonales A'B y AB' de un trapecio se cortan en O. Demostrar que los triángulos A'OA y B'OB tienen la misma área.*

Demostración:



Considerando que los triángulos AA'B y AB'B tienen la misma base AB y altura h.

Entonces tiene la misma superficie $S = \dfrac{AB.\,h}{2}$

Considerando h_1 la altura del triángulo AOB, entonces: $Sup.AOB = \dfrac{AB.\,OB.\,\operatorname{sen}\alpha}{2}$

Calculamos la superficie de AA'O como: $Sup.\,AA'O = Sup.\,AA'B - Sup.\,AOB$

Es decir: $Sup.\,AA'O = \dfrac{AB.\,h}{2} - \dfrac{AB.\,OB.\,\operatorname{sen}\alpha}{2}$

$$Sup.AA'O = \frac{AB}{2}\left[h - OB.\,\operatorname{sen}\alpha\right] \quad (1)$$

Calculamos la superficie de B"BO como: $Sup.\,B'BO = Sup.\,AB'B - Sup.\,AOB$

Es decir: $Sup.B'BO = \dfrac{AB.\,h}{2} - \dfrac{AB.\,OB.\,\operatorname{sen}\alpha}{2}$

$$Sup.B'BO = \frac{AB}{2}\left[h - OB.\,\operatorname{sen}\alpha\right] \quad (2)$$

Observamos que las expresiones (1) y (2) son iguales. Lo que demuestra que los triángulos AA'O y B'BO tienen la misma área.

Este último problema ejemplifica que para poder llegar a la solución del mismo podemos utilizar diferentes técnicas como:

- ✓ Demostrar que los dos triángulos son iguales (ángulos iguales y un lado común, lados iguales ....)
- ✓ Calcular sus áreas aplicando una formula y comprobar que se tiene el mismo resultado.
- ✓ Descomponer los triángulos en otras figuras y comprobar que las sumas de las áreas son iguales.
- ✓ Añadir una misma figura y demostrar que las áreas de las nuevas figuras así obtenidas son iguales.
- ✓ Demostrar que un triángulo puede ser obtenido a partir del otro por una transformación geométrica que conserva el área (isometría, simetría oblicua, deslizamiento de la base sobre la recta que la contiene, deslizamiento del vértice en la dirección del lado opuesto).

La utilización de diferentes técnicas consideramos que no está al alcance del alumno y esto llevaría a una constante incertidumbre.

Se coloca como objetivo o expectativa de logro, en los textos, que los alumnos desarrollen la "creatividad" en el sentido de cambiar una técnica, relacionar conceptos con un teorema, generalizar, entre otros. Pero el Sistema de Enseñanza no les da las posibilidades para poder hacerlo.

- **El paradigma constructivista**

Es un paradigma muy complejo en el que se sitúan muchas manera de entender la resolución de problemas. Se fundamenta en una teoría del aprendizaje no muy explícita, y que se resume en un pequeño conjunto de hipótesis tomadas de la psicología genética y la psicología social y proporciona una base más sólida a los paradigmas clásicos.

La idea fundamental es utilizar la resolución de problemas como medio o instrumento para construir "conceptos".

Frente a este enunciado, es necesario realizar algunas apreciaciones:

La primera cuestión es que habitualmente no se considera una actividad matemática sino psicológica. En consecuencia no se analiza la naturaleza matemática del problema propuesto. Ello se debe a una visión solo psicopedagógica de la resolucion de problemas.

La segunda cuestión es que se trata de una teoría del aprendizaje en general y no especifica de la matemática.

La tercera cuestión es que cuando se trabaja con el conocimiento matemático, se trata de una "aplicación" de estrategias de resolución de problemas a "nociones matemáticas". Tal es el caso de Douady (1986) quien propone como utilizar la situación-problema para lograr el objetivo de construir un concepto, cuyas características son:

i) El alumno ha de poder introducirse en la resolución de problemas y ha de poder considerar lo que es una solución posible.

ii) Los conocimientos de los alumnos tienen que ser, en principio, insuficientes para resolver el problema.

iii) La "situación problema" ha de permitir al alumno decidir si una solución determinada es correcta o no.

iv) El conocimiento que se desea que el alumno adquiera ha de ser la herramienta mas adecuada para resolver el problema al nivel de conocimiento del alumno.

v) El problema se ha de poder formular en diferentes "cuadros" (por ejemplo: físico, geométrico, algebraico) entre los que han de poderse establecer correspondencia.

El avance fundamental de este paradigma es que relaciona funcionalmente el momento exploratorio con el momento teórico, dando gran importancia al papel de la actividad de resolución de problemas en la génesis de los conceptos.

El paradigma constructivista no presenta los problemas tan descontextualizados, pero los sigue considerando igualmente aislados.

Un ejemplo de este paradigma para la resolución de un problema referido a la noción de mediatriz de un segmento, extraído de los libros de textos es el siguiente:

"*...Una curva XY es la trayectoria de una nave espacial que puede comunicarse con las estaciones de radio situadas en los puntos A y B. La nave solo recibe la señal de la estación más próxima.*

¿Sobre qué parte de la trayectoria se comunicará con A?. ¿Y con B?. Se lanza una segunda nave espacial cuya trayectoria se puede trazar de manera arbitraria. Contestar las mismas preguntas anteriores. Volver a empezar con una tercera nave espacial. Si ahora tenemos tres estaciones a la vez, A, B y C (y la nave sólo se comunica con la más próxima), determinar la porción de la trayectoria sobre la cual se comunicará con A, con B y con C.."r Arsac (1988)

Si tenemos en cuenta el modo en que el alumno resuelva este problema, el resultado será diferente. Por ejemplo

1° Caso: Los alumnos frente a esta primera cuestión podrán hacer todas las pruebas. Van luego a poder quedarse con un proceso de resolución analizando a priori los procesos posibles, separamos las variables didácticas de la situación:

- Algunos alumnos de la experiencia probaron que podría ser, un poco al azar, los puntos según su sentido mas o menos incluido por la figura. Por ejemplo arriesgan elegir espontáneamente el medio de la curva.

No es necesario que ese punto sea el punto solución (es decir el punto que particiona la trayectoria). Así la posición de la curva con relación a los puntos A y B influirá sobre los procedimientos elegidos, esto es luego una variable didáctica del problema.

- Si la mediatriz de los puntos es paralela al borde de la pagina algunos alumnos arriesgan trazarla espontáneamente sin haber hecho previamente las pruebas. La posición de los puntos A y B con relación a las líneas inducidas por los bordes de la hoja es también una variable didáctica.

En esta primera investigación, el alumno tiene un medio de controlar la solución que propone: midiendo.

Hay mucha posibilidad para que el alumno quede al nivel de las pruebas, no hay a priori una razón para que el proceda de otro modo, salvo si los puntos de la trayectoria están inducidos por la posición de la curva o de los puntos A y B. Este método de las pruebas no es dificultoso. Va a ser necesario conducir al alumno a abandonarlo si se desea que perciba la mediatriz como recta que particiona el plano.

En una practica "tradicional" se invitaría al alumno a cambiar de proceder con los argumentos del tipo: "esto no es matemática", "trata de cambiar a otro método", "trata de cambiar a otro método", y aun seria aun más persuasivo incitando al alumno a trazar lo que designará el lugar de la mediatriz, y haciéndole constatar que su punto de intersección con la curva concuerda.

Es necesario que el alumno tome conciencia por si mismo de la insuficiencia de su modelo. Para esto es necesario tomar en cuenta una nueva cuestión que bloquea este procedimiento. Además, en esta primera etapa, el alumno no trabaja mas que sobre una trayectoria, y no en todo el plano.

2° Caso: Se lanza una segunda nave espacial sobre otra trayectoria. Dibuje una trayectoria a elección, e indique las partes donde se va a poder comunicar con A y con B. Recomience con una tercera nave espacial. El alumno es llevado a trazar muchas curvas, y luego a usar muchas veces su procedimiento, si ello es muy pesado (lo que seguramente será el caso por el método de las pruebas), va a ser llevado a abandonarla y a tratar de probar un método más eficiente. ¿Por qué no dejar al alumno trazar él mismo las curvas?.

Este método presenta el siguiente inconveniente: el alumno tiene el riesgo de trazar las curvas que tienen la misma forma, y para las cuales el procedimiento de las pruebas es riesgoso debe ser aun eficiente.

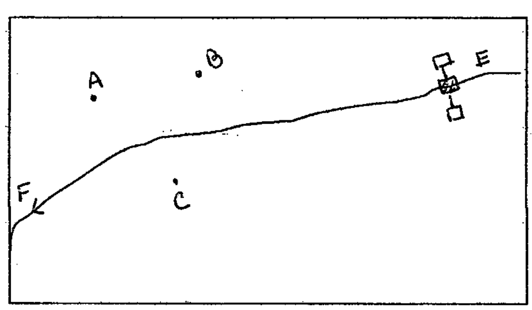
Por otro lado este método presenta dos ventajas: en el momento de la fase de debate, los alumnos podrán confrontar sus procederes con un gran numero de figuras (gráficos).

Es posible, en un caso como este, proponer a los alumnos 4 o 5 casos de gráficas para cada grupo, cada grupo tendrá casos diferentes.

Esta segunda cuestión permite también al alumno comenzar a visualizar la participación del plano, sobre todo si piensa materializar por colores diferentes las dos porciones de la trayectoria que aparecen.

Después de esta fase de acción, es interesante proponer a los alumnos redactar el método que ellos han encontrado. Se pasa así a una fase de formulación cuyo objetivo es el de permitir a los alumnos tomar distancia con relación a los diferentes métodos que han puesto en practica; métodos a menudo no explicitados y de los cuales no han tomado fuertemente conciencia.

3° Caso: EF es la trayectoria de una nave espacial. Esa nave comunica con 3 estaciones de radio A, B o C. Ella no capta qué estación es la más cercana. Encuentre la porción de trayectoria donde se comunica con A, aquella donde se comunica con b y aquella donde se comunica con C.



Conclusión: A través de esta sucesión de situaciones, se ha desarrollado en cada alumno una concepción de la mediatriz, la cual se fue construyendo a partir de las siguientes fases:.

1° Fase: *Acción*:

Los alumnos se ponen en contacto y trabajan individualmente o en grupo. Generalmente no es un problema sencillo, difícilmente lo encontraríamos en un libro de texto.

2° Fase: *Formulación*:

Llego el momento que para poder avanzar en la resolución el alumno necesita un lenguaje, un gráfico, un diagrama entre otros.

3º Fase: *Validación*:

El alumno debe demostrar que el resultado es consistente.

En estas tres primeras fases el profesor no interviene o interviene mínimamente. El profesor traspasa al alumno la responsabilidad del aprendizaje.

La devolución del problema es uno de los objetivos que se propone el profesor.

4° Fase: *Institucionalización*:

¿Qué tipo de conocimiento es el que queda? Es una de las preguntas que caracteriza a esta fase.

5° Fase: *Evaluación*:

Ha de servir para reforzar, afianzar la construcción del problema.

Según mi criterio la manera de plantear la resolución de problemas dentro del paradigma constructivista es a partir de considerar que la actividad matemática es exploratoria. La limitación de esta propuesta, es que ignora el trabajo de la técnica y su relación con el marco teórico.

- **El paradigma procedimental**

Este paradigma aborda la problemática, situando como principal objetivo del proceso didáctico, no la adquisición o construcción de sistemas conceptuales, sino el dominio de sistemas estructurados de procedimientos. Se lo puede interpretar como una reacción al teoricista y en parte al constructivista.

El paradigma procedimental se centra en el problema epistemológico-didáctico de posibilitar el diseño, la utilización y el dominio de métodos de resolución de problemas. Es decir no se pretende analizar el papel del momento teórico, sino que se parte de un alumno hipotético que se supone ha adquirido los conocimientos necesarios y domina las técnicas básicas para abordar los problemas de una cierta clase.

Conecta funcionalmente el momento exploratorio con algunos aspectos del momento de la técnica. La resolución de problemas se utiliza como una estrategia didáctica para que el alumno llegue a dominar sistemas estructurados de procedimientos matemáticos que pueden cristalizar o no, en un método de resolución.

Si se quiere enseñar por ejemplo, técnicas de resolución de "problemas de ecuaciones". ¿Qué clase de problemas es la más adecuada?. ¿La clase de problemas de geometría, de aritmética, de proporcionalidad?, o ¿Problemas de edades?, o ¿La técnica de resolución a la unidad? , o ¿ Técnicas de tanteo?.

La pregunta que engloba a todas sería: ¿Cómo se relacionan entre sí las correspondientes técnicas de resolución?.

A través de estos interrogantes dentro de este paradigma, se puede observar que la resolución de problemas se utiliza como estrategia para que el alumno llegue a dominar técnicas matemáticas para resolver.

En consecuencia , surge otra cuestión con respecto a cómo determinar la amplitud de la clase de problemas que se tomará como base para enseñar un método de resolución, por ejemplo de ecuaciones.

A este paradigma se lo puede interpretar como una complementación del paradigma tecnicista, que solo toma en consideración clases algorítmicas de problemas. Se rompe definitivamente el aislamiento tradicional de los problemas.

- **El paradigma de la modelización.**

Para éste paradigma, los problemas sólo adquieren pleno sentido en el contexto de un sistema, por lo tanto, la resolución de un problema pasa siempre por la construcción explícita de un modelo del sistema subyacente.

El objetivo de este paradigma es la obtención de conocimientos relativos a los sistemas modelizados, que en principio, pueden ser tanto extramatemáticos como matemáticos.

La actividad de resolución de problemas se engloba, en una actividad más amplia que se llama actividad de "modelización matemática" y que se sintetiza en cuatro estadios:

El primer estadio de esta actividad, lo constituye una situación problemática en donde se pueden formular preguntas y conjeturas, y se puede llegar a detectar y formular algunos problemas matemáticos.

El segundo estadio engloba la definición o delimitación del sistema subyacente a la situación problemática y la elaboración del modelo matemático correspondiente.

El tercer estadio incluye, además del trabajo técnico dentro del modelo, la interpretación de este trabajo y de sus resultados dentro del sistema modelizado.

En él ultimo estadio se pueden enunciar problemas nuevos, cuya resolución permitirá responder a cuestiones, cuya formulación era poco probable antes de la elaboración del modelo matemático.

Es decir que este paradigma engloba en cierta forma al constructivista ya que éste utiliza la actividad de resolución de problemas para que el alumno construya conocimientos nuevos. El paradigma de la modelización profundiza en el significado de "construir conocimientos nuevos" mediante la elaboración de un modelo matemático.

Para ejemplificar este paradigma analizaremos el siguiente problema:

Sean AB: $2x - 2y = 5$ y CD: $2x - 3y = 0$ las rectas que contienen respectivamente las dos bases del trapecio ABCD. Sean respectivamente M, N, P y Q los puntos medios de los segmentos AD; AB; BC y CD.

- Demostrar que los cuatro puntos M, N, P y Q no están alineados. (Generalizar el enunciado y la demostración al caso en que las rectas paralelas AB: $ax + by = c$ y CD: $ax + by = d$ sean cualesquiera).

Partiendo que el modelo matemático es el resultado de un proceso de modelización que consta de los estadios mencionados, para resolver este problema elegimos un sistema de referencia cartesiano. En él se hace corresponder a cada punto del plano sus coordenadas cartesianas en ese sistema de referencia. Se establece una correspondencia biyectiva entre el conjunto de puntos del plano y el conjunto producto cartesiano R x R (R: conjunto de los números reales).

Esta elección del sistema de referencia sé operativiza mediante variables x e y.

Ahora establecemos las relaciones matemáticas entre dichas variables:

- ✓ Ubicación de las rectas en el plano.
- ✓ Comprobación de que las rectas dadas son paralelas.
- ✓ Ubicación estratégica de los 4 puntos ABCD del trapecio.

Este conjunto de relaciones suele considerar el modelo matemático propiamente dicho.

Se continúa trabajando con el modelo en el sentido de:

- ✓ Calcular los puntos medios de cada lado.
- ✓ Verificar que los puntos están alineados de dos en dos.

Para llegar al objetivo de obtener conocimiento relativo al sistema modelizado necesitamos una teoría que justifique el modelo elegido (punto perteneciente a una recta si y solo si se verifica la ecuación; punto medio; definición de trapecio; condición para que los puntos estén alineados, etc.).

Se puede comprobar que con estas definiciones se verifican todos los axiomas de la Geometría Euclideana y en consecuencia tenemos un modelo de éste el llamado cartesiano.

El modelo cartesiano de la Geometría Euclideana debería ser útil para aumentar nuestro conocimiento del sistema modelizado.

El problema propuesto es el mismo que el dado en el paradigma teoricista. Sin embargo observamos que el paradigma que estamos analizando, nos proporciona nuevas herramientas para abordarlo.

A través del ejemplo, es importante destacar que la construcción del conocimiento es matemático y no psicológico ya que los sistemas son matemáticos.

En este sentido perfecciona el constructivismo; no construye conceptos sino modelos matemáticos de un sistema.

Otra característica de este paradigma es que culmina en un proceso contextualizado aunque dentro de él vuelven a surgir una serie de interrogantes.

Al generalizar el enunciado y la demostración al caso en que las rectas paralelas AB: $ax + by = c$ y CD: $ax + by = d$ sean cualesquiera.

Los interrogantes que surgen son: ¿El problema corresponde a las teorías euclidianas o a la geometría analítica?. ¿Qué relación existe entre las diferentes actividades geométricas?. ¿Cómo se relacionan las técnicas matemáticas que se utilizan en una y otra actividad?.

Las limitaciones que observamos dentro de este paradigma son que al individualizar las variables las técnicas quedan un poco descontroladas por lo creativo. Con ello no queremos afirmar que se omite el trabajo de la técnica.

En el ejemplo se pone en evidencia que el proceso de modelización tiene dos niveles:

1) Modelización local
2) Modelización regional (teoría)

En este proceso existe la recursividad del modelo del sistema (real) se pasa al modelo cartesiano pero en él necesitamos teoría para avanzar y allí aparece el modelo euclideano.

Este proceso de ir de un modelo a otro condiciona el trabajo de la técnica.

Por último, los diferentes paradigmas descriptos: teoricismo, tecnicismo, modelización, son al decir de Gascón (2001:133) "... formas ideales que nunca han existido en estado puro en las prácticas docentes reales...".

Una vez realizada la descripción de los distintos paradigmas de resolución de problemas matemáticos, voy a centrar mi estudio en el paradigma de los momentos didácticos y el modelo de la actividad matemática que propone el enfoque antropológico en didáctica de la matemática.

IV - LA ACTIVIDAD MATEMATICA QUE PROPONE EL ENFOQUE ANTROPOLOGICO

El paradigma de los momentos didácticos pone de manifiesto una interrelación dialéctica entre el desarrollo de las técnicas matemáticas, la evolución de los campos de problemas y la construcción recursiva de las teorías matemáticas asociadas.

Algunos aportes del modelo que contribuyen a interpretar la resolución de problemas en el proceso de la enseñanza de las matemáticas son:

1. Considera que todo problema de matemáticas es el punto de partida de un campo de problemas. Se parte de problemas concretos, no aislados y que tienen sentido o interés matemático, los que se agrupan en función de las técnicas matemáticas que se pueden utilizar para estudiarlos.
2. El proceso de estudio de campos de problemas se lleva a cabo mediante la utilización y, sobre todo, la producción de técnicas de estudios. Aquí surge una relación entre dos momentos de la actividad matemática: el momento de la técnica y el momento teórico. Es decir que un campo de problemas no es nunca un conjunto completamente definido; se va constituyendo a medida que se desarrollan las técnicas de estudio. La actividad de resolución de clases de problemas se enmarca, en la actividad del *estudio de campos de problemas.* Así este paradigma contiene en cierta forma al paradigma procedimental y lleva hasta sus ultimas consecuencias el análisis de las funciones, del momento de la técnica dentro del proceso didáctico.
3. Se considera que toda actividad matemática puede ser interpretada como un proceso de estudio de campos de problemas. La actividad de producción de teorías se puede analizar como un proceso de estudio de ciertos campos de problemas "teóricos" que requieren técnicas de estudios especificas y teorías que justifican estas técnicas.

Dentro de esta perspectiva de análisis Mariana Bosch (1997), sostiene que la matemática es teoría, rutina, creación, procedimiento y modelización, todo ello a la vez. Es decir que se debe adoptar un **modelo adecuado** de la **actividad matemática, una manera de entender lo que es hacer matemáticas, y también enseñar y aprender matemáticas**.

El enfoque antropológico considera a las matemáticas como una actividad humana. En él no se establecen diferencias entre las matemáticas y todas las demás actividades que desarrolla el hombre en su vida en sociedad.

Otra característica de éste enfoque es que propone un punto de vista unitario sobre los diferentes tipos de actividad matemática. No hace una distinción de la actividad del investigador, del docente y del uso cotidiano de las matemáticas. En el primer caso, el objetivo es producir matemáticas nuevas; en el segundo, la actividad de transmisión o adquisición de conocimientos y en el tercero la actividad de utilización rutinaria de conocimientos matemáticos.

Esta no distinción , se basa en la inseparabilidad de la actividad matemática; ya que el investigador produce, pero también enseña y aprende durante la investigación; el profesor y el alumno, en el proceso enseñanza-aprendizaje, producen y re-producen conocimientos, y todos necesitan utilizar matemáticas ya elaboradas para llevar a cabo dicha construcción. Al usuario o utilizador rutinario de matemáticas se lo considera como limite que tienden los dos tipos de actividades mencionadas anteriormente.

Los distintos tipos de actividad matemática que un investigador, como el profesor y sus alumnos hacen, es la **noción de estudio,** es decir estudian **campos de problemas matemáticos.**

El proceso de estudio de un campo de problemas esta estructurado en seis momentos, que no están organizados en un sentido cronológico, sino con relación a las dimensiones del proceso. Estos son:

- el momento del primer encuentro.
- el momento exploratorio.
- el momento del trabajo de la técnica.
- el momento tecnológico-teórico.
- el momento de la institucionalización.
- el momento de la evaluación.

El punto de partida de un campo de problemas es, por ejemplo, resolver la ecuación $x^2+5x+6=0$, en este caso se considera el campo de problemas de las ecuaciones de segundo grado.

En segundo lugar, el proceso de estudio de campo de problemas se lleva a cabo mediante la utilización y la producción de técnicas de estudio.

Por ejemplo para la ecuación $x^2+5x+6=0$ podemos utilizar las siguientes técnicas:

i) Completar cuadrado

$$x^2+5x+6=0$$

$$x^2+5x+\left(\frac{5}{2}\right)^2=-6+\left(\frac{5}{2}\right)^2$$

$$\left(x+\frac{5}{2}\right)^2=-6+\frac{25}{4}$$

$$\left(x+\frac{5}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\ \Rightarrow\left(x+\frac{5}{2}\right)=\pm\frac{1}{2}\ \Rightarrow x=\pm\frac{1}{2}-\frac{5}{2}$$

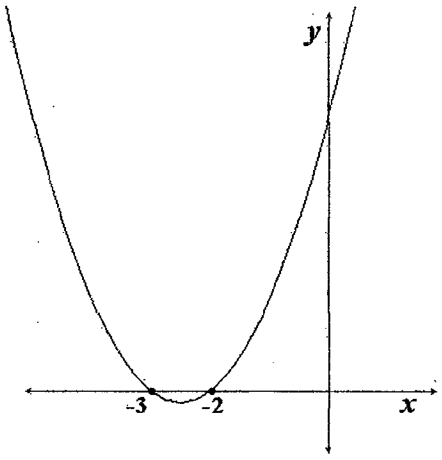
la solución es $x=-3 \quad \wedge \quad x=-2$

ii) Técnica de aplicar la formula: $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

La aplicamos para la ecuación $x^2+5x+6=0$, obtenemos $x=\dfrac{-5\pm\sqrt{25-4.1.6}}{2}$

Resolviendo la solución es $x=-3 \quad \wedge \quad x=-2$

iii) Técnica utilizando la gráfica de la función $y=x^2+5x+6$



iv) Factorización : $x^2+5x+6=0$

$$x^2+2x+3x+6=0$$
$$(x^2+2x)+(3x+6)=0$$
$$x(x+2)+3(x+2)=0$$
$$(x+2)(x+3)=0$$

Entonces $x_1=-3 \quad \wedge \quad x_2=-2$

v) Técnica: determinar con regla y compás las raíces de la ecuación $x^2+5x+6=0$

Resolviendo esta ecuación obtenemos $x_1=-3 \quad \wedge \quad x_2=-2$

Ahora bien, es necesario determinar si esta solución puede obtenerse mediante el proceso algebraico que corresponde a las construcciones con regla y compás.

Observemos en primer lugar que algunas de las operaciones algebraicas mas sencillas corresponden a construcciones geométricas elementales.

1°) Dados dos segmentos de longitudes a y b (medidas con un segmento unidad dada) es inmediato construir a+b; a-b; ra (r es cualquier racional) a/b y a.b.

2°) Los procesos algebraicos racionales adición, sustracción, multiplicación y división de cantidades conocidas, pueden efectuarse por medio de construcciones geométricas.

La totalidad de las cantidades que pueden obtenerse en esta forma a partir de a, b, c,....constituye lo que se llama un cuerpo de números. los racionales, reales y complejos son ejemplo de cuerpos de números.

En el caso presente, el cuerpo se dice engendrado por los números a, b, c ....

La nueva construcción, que nos lleva fuera del cuerpo así obtenido, es la extracción de una raíz cuadrada, dado un segmento a, $\sqrt{a}$ puede construirse con regla y compás. En consecuencia, *un número complejo será construible con regla y compás si y solo si sus componentes (real e imaginaria) son construibles.*

Podemos definir entonces para "cada numero construible, el número mínimo de ecuaciones cuadráticas irreductible necesarias para obtener al mismo a partir del cuerpo Q o también, el número mínimo de raíces cuadradas que son suficientes para obtener el numero" (Gentile- 1987).

3°) Consideremos el problema de determinar con regla y compás las raíces de la ecuación $x^2+bx+c=0$, extraído de (Consenza- 1991).

Supongamos $c \neq 0$, pues si $c=0$ las raíces de la ecuación son 0 y b.

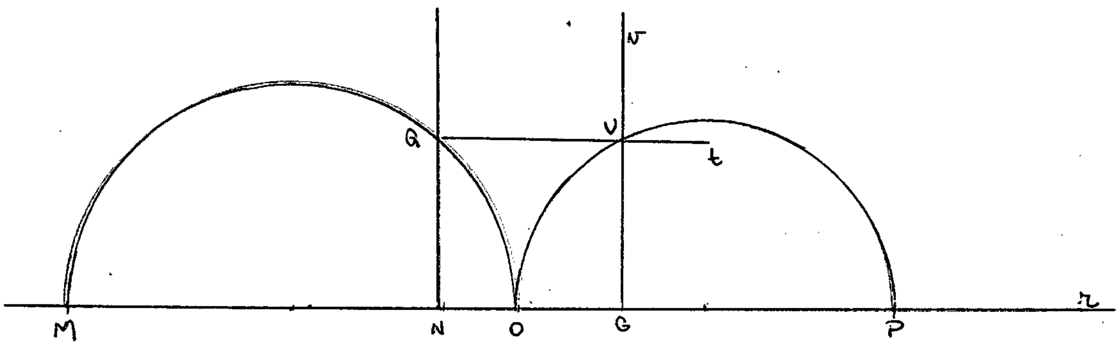
1° caso: $c>0$: $x^2+5x+6=0$, sus raíces son $x_1=-3 \quad \wedge \quad x_2=-2$.

En este caso las raíces x_1 y x_2 de la ecuación tienen el mismo signo y

$$\begin{cases} |x_1|+|x_2|=5 \\ |x_1|.|x_2|=6 \end{cases}$$

<u>En cuanto a la Construcción:</u>

Se traza una recta r y sobre ella, marcamos los segmentos MN, NO y OP de longitudes 6; 1 y 5 respectivamente.



Trazamos dos semicircunferencias de MO y OP como diámetros. Por N levantamos la perpendicular s a la recta r, determinando el punto Q en la semicircunferencia de diámetro MO.

De este modo $NQ^2 = MN.NO = 6$, y $NQ = \sqrt{6}$.

Por Q trazamos t//r, determinando U en la semicircunferencia de diámetro OP. Por el punto U trazamos una recta $v \perp r$, determinando G en r, de manera que los segmentos OG y GP representan los valores absolutos de las raíces de la ecuación, ya que GU = NQ = $\sqrt{6}$ y $GU^2 = OG.GP$.

Luego OG.GP = 6 y por construcción |5| = OG + GP.

Entonces OG y GP son dos segmentos cuya suma es |5| y cuyo producto es 6.

<u>*Observación*</u>:

Si la recta t, soporte de QU no intercepta a la semicircunferencia de diámetro OP, esto es, si $\sqrt{c} > \frac{1}{2}$ |b|, las raíces son imaginarias y la construcción no permite determinarlas.

Lo mismo ocurre en el caso particular de b = 0.

Esta técnica de construcción con regla y compás puede seguir desarrollándose para dar origen a otra clase de problemas cada vez mas amplios. Pero siempre quedaran problemas no resolubles con "regla y compás" como las famosas de la cuadratura del círculo.

Si analizamos los momentos didácticos en el ejemplo de determinar con regla y compás las raíces de la ecuación $x^2 + bx + c = 0$, tenemos:

- El momento del primer encuentro es la dimensión del proceso de estudio en la que surge, por primera vez, una tarea problemática que no se sabe realizar y buscamos algo para conseguir realizarla.

Construcción inicial $\longrightarrow$ Campo de problemas de ecuación de 2° grado.

- El momento exploratorio es la segunda dimensión del proceso. Aquí se busca la técnica que nos permita resolver y empezar a delimitar un primer campo de problemas. Este termina cuando emerge una primera técnica que permite realizar el tipo de tareas problemática inicial.

  Exploración de campos de problemas y la emergencia de técnica:

  T_1: completar cuadrados

  T_2: aplicar formula de $ax^2+bx+c=0$; $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

  T_3: Factorización

  T_4: Resolución gráfica de la ecuación $y=ax^2+bx+c$

  T_5: Resolución geométrica con regla y compás.

- El momento de trabajo de la técnica es cuando ésta funcione para seguir avanzando en el proceso de estudio y poder resolver mas problemas del campo. Aquí es donde se debe trabajar la técnica, variándola, ampliándola y poniéndola a aprueba con un numero mayor de casos. Se trabaja la técnica y se explican y justifican su funcionamiento, este seria el momento tecnológico-teórico.

  La técnica T_5 puede justificarse a través de:

  ✓ Construcciones

  ✓ Lugares geométricos

  $$Q\in C\left(O';\frac{MO}{2}\right)$$
  $$U\in C\left(O'';\frac{OP}{2}\right)$$
  $$QN\perp MO$$
  $$QU\,//\,MO$$

  ✓ Propiedades obtenidas y usadas

  Sea R^2 el plano de la geométrica analítica donde es valido ciertas operaciones en R^2.

  a) Dado dos puntos distintos de R^2 podemos trazar una recta que los une.

  b) Dada una recta podemos marcar dos puntos sobre la misma y considerar.

  c) Dado un punto podemos construir una circunferencia de centro en ese punto y radio determinado según b).

d) Determinar puntos como intersección de a) dos rectas ; b) recta y circunferencia y dos circunferencias.

Fijados a, b, c y d se construye con regla y compás las raíces de la ecuación $x^2 + bx + c = 0$.

- El momento tecnológico-teórico recoge aquellas etapas del proceso de estudio en las que se elabora el entorno tecnológico-teórico, considerado indispensable para el buen desarrollo de la actividad.

  Nos preguntamos : ¿La solución obtenida es única?

  La repuesta es No, ya que consideramos c>0.

  Podemos seguir trabajando para el caso c<0

En este caso, las raíces tienen signos contrarios y siendo x_1 la raíz de mayor valor absoluto debemos tener: $|x_1| - |x_2| = |b|$; $|x_1| . |x_2| = | c|$

Aquí el problema consiste en determinar dos segmentos de la recta cuya diferencia sea |b| y cuyo producto sea c.

Así como, en el caso en que hemos determinamos los puntos M, N, O y P en la recta r y un punto Q sobre la semicircunferencia. Tenemos NQ = $\sqrt{c}$.

Trasladamos NQ una dirección paralela a s obteniendo un segmento OU. Unimos U al centro I de la circunferencia, determinando el diámetro GH, de manera que los segmentos UH y UG representan las raíces de la ecuación, ya que UH – UG = GH = |b| (diámetro).

Por otro lado, por ser OU tangente y UH secante al circulo de diámetro OP, aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo OUI, tenemos:

$OU^2 = NQ^2 = | c| = UH.UG$.

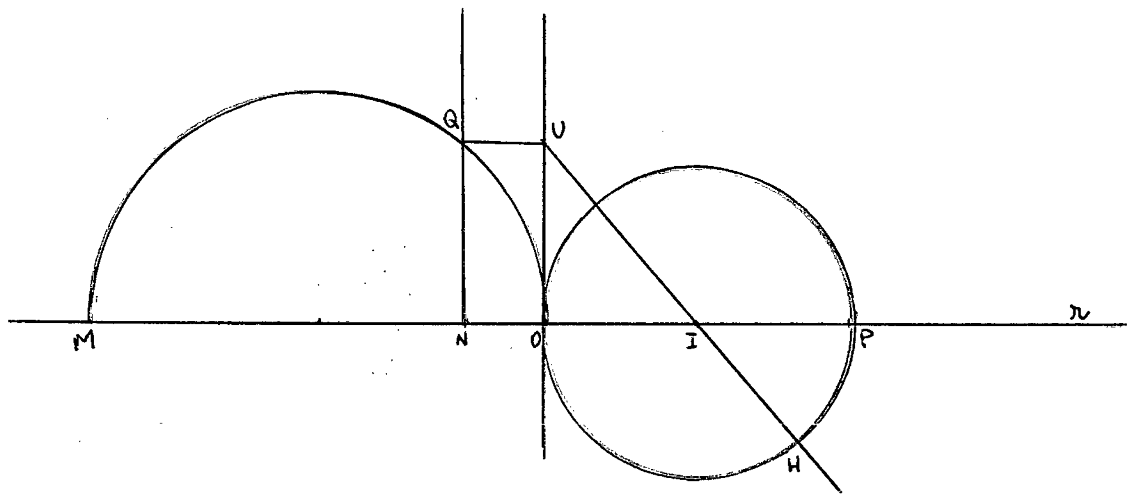
Entonces UH y UG son dos segmentos cuya diferencia es |b| y cuyo producto es | c|.

Si b < 0, las raíces son x_1 = UH y x_2 = - UG.

Si b > 0, las raíces son x_1 = -UH y x_2 = UG.

Observación:

En estos casos el problema tiene siempre solución. Si b = 0, tenemos un caso particular en que I=O=G=H (circunferencia de centro I y radio O), y las raíces son OU y – OU.



- En el momento de institucionalización es, cuando el trabajo privado y a veces el personal, deben arrinconarse para que sus frutos pasen a formar parte del bien común. Es decir hay momentos en los que se explicitarán, comentarán y destacarán determinados elementos.

  Este momento está dado en el primer y segundo caso en el ítem observación.

  <u>En el primer caso cuando c>0.</u>

  Si la recta t, soporte de QU no intercepta a la semicircunferencia de diámetro OP,

esto es, si $\sqrt{c} > \frac{1}{2}$ |b|, las raíces son imaginarias y la construcción no permite determinarlas.

Lo mismo ocurre en el caso particular de b = 0.

<u>En el segundo caso cuando c<0.</u>

En estos casos el problema tiene siempre solución. Si b = 0, tenemos un caso particular en que I=O=G=H (circunferencia de centro I y radio O), y las raíces son OU y – OU.

- El momento de la evaluación, que no debe restringirse al ámbito de la actividad matemática escolar.

Esta técnica de construcción geométrica provoca la necesidad de una modelización algebraica cuyo resultado sea una nueva organización. que nos permita responder algunas de las siguientes preguntas:

- ✓ ¿Qué es un problema de construcción geométrica?.
- ✓ ¿Cómo se resuelve?
- ✓ ¿Cuáles son las definiciones o axiomas que nos permiten hacer algunos tipos de construcciones geométricas?.
- ✓ ¿Por qué es necesario hacer de esta forma?.

- ✓ ¿Qué alcance tiene la utilización de la técnica de construcción con regla y compás?.

Como modo de integrar los momentos didácticos con los distintos paradigmas estudiados en el Capítulo II vemos:

El primer momento y el momento exploratorio con las diferentes técnicas emergentes (completar cuadrados; factorización; construcción con regla y compás, etc.) se englobaría en el paradigma modernista.

Por la diversidad de las técnicas que emergen en el problema de resolución de ecuaciones de 2° grado y por la apertura a nuevas técnicas, este 3° momento de trabajo de la técnica, podríamos decir que corresponde a los paradigmas tecnicista y procedimental .

Finalmente los últimos momentos se pueden englobar en el paradigma teoricista, si analizamos los momentos por separados.

Como conclusión del análisis realizado en éste capitulo, se puede decir que:

- ❖ Un aspecto esencial de la actividad matemática consiste en construir un modelo matemático de la realidad que queremos estudiar, trabajar con dicho modelo e interpretar los resultados obtenidos en este trabajo para responder a cuestiones planteadas inicialmente. Es así que, gran parte de la actividad matemática puede identificarse con una *actividad de modelización matemática.*
- ❖ Toda actividad matemática debe ser analizada, interpretada, cuestionada y problematizadas por la didáctica. El modelo epistemológico describe el saber matemático en términos en *obras*, éstas están estructuradas mediante cuatro componentes principales: *tipos de problemas, técnicas, tecnologías y teoría*, que describen las relaciones dinámicas entre ellas.
- ❖ Toda obra matemática surge como respuesta a un conjunto de cuestiones y como medio para llevar a cabo, en el seno de una institución, determinadas tareas problemáticas.
- ❖ Las cuestiones y las tareas problemáticas a las que responde una obra matemática se cristalizan en uno o mas *tipos de problemas.*
- ❖ El análisis de toda actividad matemática empieza precisamente por el análisis de las *praxeología matemáticas* que emergen de esta actividad, en cuyo estudio se pueden distinguir dos niveles del análisis:
    - ✓ Se comienza realizando, en un primer nivel de análisis, lo que se denomina " análisis matemático" de una obra. El mismo consiste en estudiar las relaciones entre los cuatro componentes de una obra y

analizando el desarrollo que permita integrarlos a organizaciones mas vastas y complejas.

- ✓ Para completar el estudio se hace un análisis de las praxeologías didácticas relativas al estudio de las organizaciones matemáticas, este constituye un segundo nivel denominado "análisis didáctico". Considerando el enfoque antropológico el modelo debe describir la dinámica de estudio de una obra en términos de momentos didácticos.

- ❖ Se puede decir que la matemática escolar se organiza en obras matemáticas que son un conjunto estructurados de objetos matemáticos que surgen como respuestas a ciertas cuestiones planteadas en el seno de una institución. Toda obra matemática es el resultado final de una actividad matemática que presenta dos aspectos inseparables:
  - ✓ *La practica matemática* que consta de tareas (materializadas en tipos de problemas) y
  - ✓ *Las técnica* útiles para llevara cabo esas tareas.
  - ✓ El discurso razonado sobre dicha practica , está constituido por dos niveles, el de las ***tecnologías*** y el de las ***teorías***.

Es decir que, los elementos de una obra matemática están fuertemente interrelacionadas ya que el desarrollo de la técnica genera nuevos tipos de problemas y provoca nuevas necesidades tecnológico-teóricas.

V- ANÁLISIS DE LOS LIBROS DE TEXTOS Y DEL GRADO DE ALGEBRIZACION DE LA ACTIVIDAD MATEMATICA EN ECUACIONES.

Siguiendo el postulado esencial del enfoque antropológico que establece que toda actividad humana procede de una praxeología, es posible definir la actividad del profesor y abordar la complejidad que envuelve su práctica profesional en este contexto.

La actividad del profesor se puede describir como, un conjunto de organizaciones praxeológicas que contemplan la realización de un sistema de tareas alrededor de los cuales se van a desarrollar y organizar un conjunto de técnicas, tecnología y teoría.

La complejidad que caracteriza las tareas didácticas del profesor, tienen relación con el constante cambio que experimenta la sociedad. Esto determina las distintas orientaciones que van a definir el proyecto educativo en el que el profesor participa.

Una de las tareas especificas del profesor como enseñante es, reconstruir las organizaciones matemáticas escolares que aparecen propuestas en los programas oficiales y en los libros de textos para ser enseñados.

En éste trabajo, el estudio se centra en el análisis de los libros de textos cuya selección se realizó de acuerdo a los siguientes criterios:

1) Organización de la información a partir del siguiente corte temporal, antes de la Reforma Educativa (1960-1990) y después de la Reforma Educativa (1992 hasta la actualidad).
2) El corte temporal se realiza teniendo en cuenta la importancia de los cambios propuestos – al menos discursivamente – a partir de la puesta en vigencia de la Ley Federal de Educación.
3) La fecha de 1960 como inicio de la investigación se toma teniendo en cuenta la disponibilidad de los primeros libros de textos dedicados a la enseñanza de la Matemática con lo que cuentan las bibliotecas de establecimientos secundarios- públicos y privados- en la capital de la provincia de Salta.

Metodología utilizada para el análisis de los libros de textos

La metodología utilizada para el análisis se basó en el método hipotético-deductivo, intentando establecer cuales son los conceptos, técnicas y tecnologías propuestas por los diversos autores en función de los modelos epistemológicos.

La selección de los textos se realizó teniendo en cuenta los libros mas consultados por los docentes según datos extraídos de las bibliotecas de dos colegios privados del radio céntrico de la ciudad de Salta y de 8 colegios públicos de la ciudad de Salta donde realizaron las prácticas docentes los alumnos de 4° año del profesorado de Matemática de la Universidad Nacional de Salta durante los años 2000 y 2001.

Los datos obtenidos de los diferentes libros fueron organizados de la siguiente forma:

Libro	Tema	Temas no justificados	Justificaciones y tipos de justificaciones	Análisis de los indicadores	
				Desintegración entre teoría, técnica y tecnología	Rasgos del álgebra

Parto de la hipótesis que "La actividad matemática escolar tal como se lleva acabo en la enseñanza muestra ciertos rasgos del álgebra, con una desintegración entre teoría, técnicas y tecnología".

Para corroborar esta hipótesis, he considerado el estudio de las dos variables que constituyen la hipótesis.

Por un lado, la variable de actividad matemática, que como ya he dicho , presenta dos aspectos inseparables: la practica matemática (que consta de tareas materializadas en tipos de problemas) y las técnicas útiles para llevara cabo dichas tareas. El análisis de la práctica puede realizarse a partir de los siguientes indicadores : las técnicas, la tecnología y las teorías utilizadas en la actividad matemática.

La otra variable a considerar son los rasgos del álgebra presentes en la propuesta de contenidos en la actividad matemática escolar.

Para poder operativizar ésta última variable se ha considerado los siguientes indicadores:

- **Aparición progresiva de letras**: sin diferenciar entre variables e incógnitas. Por ejemplo: al definir múltiplos y divisores. Al enunciar la propiedad distributiva de la potenciación con respecto a la multiplicación y la división.
- **Existencia de un bloque de contenido dedicado al calculo algebraico y otro al calculo de ecuaciones:** sin establecer relaciones entre ambas. Ejemplo: suma algebraica. Suma algebraica en la recta numérica. Completar casillas con los números que corresponda: $-8 + \square = 0$. Problemas numéricos.
- **Empleo del cálculo algebraico mas elemental** (ecuaciones de primer grado con una incógnita) en problemas "concretos", prevaleciendo los problemas numéricos.

La recolección y análisis de datos se realizó:

- Identificando el tratamiento de la noción teórica del tema ecuaciones en los textos seleccionados, verificando la existencia de rasgos del álgebra en la propuesta de enseñanza del tema ecuaciones. (Llamando a los libros de texto 1, 2, 3 y 4, de 7° de EGB_3 y 3° año del secundario).
- Identificando los indicadores de la técnica utilizada en los libros de textos relativos al tratamiento del tema ecuaciones.
- Analizando los indicadores encontrado en los libros de texto.

Libro 1 (Aritmética y Algebra 3- 3° año secundario- Ed. Kapelusz-1968- 17° edición)

Nociones Teóricas relativas al tema ecuaciones: rasgos del álgebra presentes en las propuestas de enseñanza.

El autor de este libro para explicar el temas de ecuaciones realiza una breve reseña histórica del álgebra, luego organiza los contenidos de la siguiente manera:

- Revisión de los conceptos fundamentales (par ordenado; relación; noción de función; expresiones de funciones mediante formulas; tablas de funciones; representación gráfica en ejes cartesianos; funciones dadas por tablas y gráficos; función inversa y noción de ecuación).
- Recapitulación de operaciones con números enteros y con números racionales.
- Expresiones algebraicas enteras (polinomios; función polinómica).
- Operaciones fundamentales con expresiones algebraicas enteras.
- Factoreo de expresiones algebraicas.
- Expresiones algebraicas fraccionarias. Operaciones con expresiones algebraicas fraccionarias. Función racional.
- Define a las identidades como "igualdades incondicionales", como por ejemplo $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$. Y de igualdades condicionales cuando no verifica la igualdad para valores que no son solución.
- A las letras las llama incógnitas o indeterminada y a los valores que satisfacen la ecuación las llama raíces de la ecuación.
- Analiza la solución de una ecuación del tipo $2x + y = 7$, diciendo que tiene infinitas soluciones que son los pares ordenados que la satisfacen.

- Define: - *"Una ecuación entera con una incógnita se dice de primer grado o lineal, cuando el mayor grado con que figura la incógnita es el primero".* (Repetto y otros-1968)
- Sostiene que *" Si una ecuación tiene el conjunto solución S_1 y otra ecuación tiene por conjunto solución S_2 y estos dos conjuntos no son vacíos se dice que dichas ecuaciones son equivalentes si $S_1 = S_2$".*
- Hace una clasificación de las ecuaciones:
  - ✓ Ecuación entera: cuando las incógnitas están sometidas únicamente a las operaciones de suma, resta y multiplicación. Ejemplo: $x + ½ = 2x - 8$.
  - ✓ Ecuación fraccionaria: cuando por lo menos una de las incógnitas figura en el divisor. Ejemplo: $\frac{1}{x}+\frac{4x-2}{x-y}=x+3y$.
  - ✓ Ecuación irracional: cuando por lo menos una incógnita figura bajo el signo radical. Ejemplo: $\sqrt{2x}-1=x+15$
  - ✓ Habla de raíces extrañas (cuando la ecuación es transformada y las raíces no satisfacen la ecuación original).

<u>Identificación de las técnicas que utiliza el autor para resolver una ecuación:</u>

- ➢ Encontrar las raíces de la función y = f(x).
- ➢ Aplicación (sin demostración) de propiedades de las ecuaciones enteras equivalentes. (propiedad uniforme de la suma y el producto):
  - ✓ *Primera propiedad: si a ambos miembros de una ecuación se les suma un mismo número, resulta una ecuación equivalente a la dada.*
  - ✓ *Segunda propiedad: si a ambos miembros de una ecuación en x se les suma una misma expresión algebraica entera en x, resulta una ecuación equivalente a la dada.*
  - ✓ *Tercera propiedad: si ambos miembros de una ecuación se multiplican por un mismo numero, resulta una ecuación equivalente a la dada.*
- ➢ Pasaje de términos", "pasajes de factores o divisores" de un miembro a otro.
- ➢ Enumera tres pasos para la resolución de problemas y llegar a la solución:
  - i) Planteo: Consiste en formar la ecuación que tiene por incógnita el valor buscado.
  - ii) Resolución: es despejar la incógnita de la ecuación.

iii) Discusión; comprobar si la solución hallada satisface el problema.

- Explica con ejemplos las ecuaciones fraccionarias con una incógnita que se reducen a ecuaciones enteras de primer grado, trasponiendo términos. Introduciendo el termino "raíces extrañas", sin justificar el sentido de la palabra.

Análisis de los indicadores:

- La clasificación que realiza el autor esta incompleta, porque faltan mencionar ecuaciones de segundo grado y en general de n-grado. Ecuaciones en dos, tres o n incógnitas. Sistemas de ecuaciones con n incógnitas.
- Presenta 142 problemas numéricos en donde todas tienen solución única.
- Campo de problemas: presenta 33 problemas en total que se clasifican en:
  - ✓ problemas numéricos
  - ✓ problemas de proporcionalidad
  - ✓ problemas de porcentaje
  - ✓ problemas geométricos
  - ✓ problemas de edades
  - ✓ problemas de la vida diaria. Y todos tienen solución.
- No presenta ejemplos para discutir la solución.
- No introduce el concepto de parámetro (a pesar de que en algunos problemas aparecen otras letras).
- Crea los términos "igualdades incondicionales"; "igualdades condicionales" y no los utiliza en el desarrollo del tema.
- Existe una ausencia de cuantificadores para las ecuaciones fraccionarias.
- Concluye el capitulo con el estudio de inecuaciones de primer grado con una incógnita.
- En este libro hay un predominio de los problemas numéricos frente a los problemas geométricos y de edades. Se resuelven con una única técnica, la de aplicar propiedad uniforme (T2).
- El marco teórico no es visible en consecuencia no hay un desarrollo de elementos tecnológicos que justifican la utilización de las técnicas propuestas.

<u>Libro 2</u> *(Matemática 3- 3° año secundario - Ed. Santillana- 1995- 1° edición)*

<u>Nociones Teóricas relativas al tema ecuaciones: rasgos del álgebra presentes en las propuestas de enseñanza.</u>

El autor organiza los contenidos apareciendo las ecuaciones desde el primer capitulo.

La distribución es la siguiente:

- Números reales
- Funciones (definición en sistema cartesiano)
- Proporcionalidad de segmentos.
- Semejanzas.
- Semejanza de triángulos.
- Funciones polinómicas.
- Divisibilidad con polinomios en donde aparecen raíces de polinomios.

Presenta un objetivo básico, y sostiene que "la transferencia de los conocimientos matemáticos se las plantea a través de problemas convencionales y no convencionales".

Las actividades propuesta para los alumnos las presenta mediante:

- Ejercicios propuestos } se caracterizan porque todos los
- Ejercicios resueltos } problemas son numéricos.
- Ejercicios y problemas: se caracteriza por problemas de traducción del lenguaje coloquial al matemático
- Caleidoscopio: se caracteriza por resolver problemas numéricos y analizar el conjunto solucionen cada ecuación propuesta.
- Olimpiadas matemáticas: presenta situaciones en donde debe aplicar el tema a estudiar.

En el capitulo en donde desarrolla el tema "ecuaciones e inecuaciones de primer grado" define: *"Una ecuación es una igualdad en la que uno o mas valores a los que llamaremos incógnita son desconocidos".*

Llama " *solución de una ecuación a los valores de la incógnita que hacen cierta la igualdad y decimos que verifican la ecuación. Con estos valores se forma el conjunto solución".*

Presenta ecuaciones con parámetros, analizando los diferentes casos, cuando tienen solución, no tiene solución e infinitas soluciones, a través de problemas numéricos.

Introduce las ecuaciones racionales sin utilizar cuantificadores.

Identificación de las técnicas que utiliza el autor para resolver una ecuación

Las técnicas que utiliza el autor para resolver ecuaciones son:

- Mediante la gráfica (modelo cartesiano) analiza el tipo de solución:
  - ✓ Si tiene una solución la recta corta en un punto al eje x.
  - ✓ Si tiene dos soluciones la gráfica corta al eje x en dos puntos.
  - ✓ Sin solución la gráfica no corta al eje x.
  - ✓ El caso de infinitas soluciones también ejemplifica mediante la gráfica.
- A través de mx +b= 0, analizando la solución, estudiando el valor del parámetro m y b no relacionado con la gráfica.
- Aplicación de las propiedades de los sistemas numéricos.

Análisis de los indicadores:

- En los capítulos en donde aparecen ecuaciones no es visible la teoría.
- En el capitulo especifico al estudio de las ecuaciones, solo aplica propiedad uniforme de los números reales.
- Presenta:
  - ✓ problemas gráficos.
  - ✓ Problemas numéricos
  - ✓ Problemas de la vida cotidiana.
- Presenta diferentes tipos de actividades, que se unifican a través de problemas numéricos.
- En los problemas olímpicos en el capitulo dedicado a ecuaciones, no se resuelven con ninguna de las técnicas enunciadas.
- Existe una ausencia de cuantificadores para ecuaciones racionales.
- Concluye el capitulo con el estudio de inecuaciones en R.
- En este libro la ausencia de teoría limita el trabajo de las dos técnicas propuestas por el autor (T_3 y T_4). El campo de problemas se concentra en los problemas gráficos y numéricos que aparecen independientemente como dos problemáticas disjuntas.
- En los problemas propuestos no incluye análisis de parámetros. La introducción teórica de los parámetros no se profundiza a través de propuestas practicas.

Libro 3 (*Matemática 9 para EGB – Ed Santillana- 1998- 1° edición)*

Nociones Teóricas relativas al tema ecuaciones: rasgos del álgebra presentes en las propuestas de enseñanza.

Los autores presentan el libro con la selección de contenidos a estudiar y da una explicación de las actividades, las clasifican en:

- Ejercicios y problemas: éstos son de porcentaje, numéricos y de la vida cotidiana
- Integramos: se caracteriza por presentar situaciones relacionadas con otras áreas, como ser Física, Biología, Cs. Sociales, aplicando el tema a estudiar.
- En el diario: se caracteriza por presentar un texto vinculados a problemáticas cotidianas y hace la aplicación del tema.
- Olimpiadas Matemáticas: presenta situaciones en donde debe aplicar el tema a estudiar.
- Caleidoscopio: se caracteriza por resolver problemas numéricos y analizar el conjunto solucionen cada ecuación propuesta.

El estudio de las ecuaciones aparecen después del estudio de:

- Números reales.
- Operaciones.
- Vectores.
- Expresiones algebraicas.
- Lenguaje simbólico.

En la unidad en donde desarrolla el tema ecuaciones, parte dando una definición de la misma y dice : *"la ecuación es una igualdad que contiene por lo menos una incógnita".*

Continúa sosteniendo que *" Las incógnitas son los valores que hay que averiguar y las representamos con letras. Resolver la ecuación es hallar el valor de la incógnita que hace verdadera la igualdad.*

Luego plantea cuatro ejercicios numéricos para resolver ecuaciones lineales, partiendo de una ecuación de 2° grado (cancelándose el termino cuadrático); por ejemplo: $(x-5)^2 - (1+x)(1-x) = -2(5x+3)$.

A través de los ejemplos define que es una ecuación.

En cuanto a la interpretación de problemas dice que las ecuaciones nos permiten resolver los problemas. Plantea un problema, interpreta los datos y resuelve la ecuación y comprueba.

Concluye el capitulo con el estudio de inecuaciones y sistemas de 2 ecuaciones con 2 incógnitas (lineal). Propone tres técnicas para resolver sistemas de 2x2: igualación; sustitución y gráfico.

Identificación de las técnicas que utiliza el autor para resolver una ecuación

Las técnicas que utilizan para resolver las ecuaciones lineales con una incógnita son:

- el método de la balanza.
- Aplicación de "pautas" (las propiedades de los sistemas numéricos.)

Análisis de los indicadores

- Presenta la ecuación lineal con una incógnita a partir de una cuadrática cancelándose el termino cuadrático, podríamos interpretar como una técnica. Predomina en ella la propiedad cancelativa.
- Solo presenta 3 problemas a resolver. Estos son uno de porcentaje, y los otros dos son numéricos. Todos tienen solución.
- No introduce el concepto de parámetro.
- En este libro la técnica de la balanza se corresponde con la definición de ecuación con una incógnita con números a averiguar.
- Bajo el nombre dado por el autor de "Pautas" que no es otra cosa que las propiedades de los sistemas numéricos afianza la concepción de ecuación como igualdad entre números. Esto ultimo aparece en forma reiterada cuando los autores proponen resolver ecuación lineal a partir de una ecuación de grado mayor o igual a dos.
- Los problemas propuestos son muy escasos, esto resulta paradójico respecto de la diversidad de actividades enunciadas (integremos; olimpiadas, entre otros).

Libro 4 (Matemática – Santillana 7 EGB- 2000- 1° edición)

Nociones Teóricas relativas al tema ecuaciones: rasgos del álgebra presentes en las propuestas de enseñanza.

Los autores de este libro, al iniciar dan una explicación de cómo está estructurado. Los contenidos están organizados de la siguiente forma:

- Números naturales I.
- Números naturales II.
- Fracciones y decimales I.
- Fracciones y decimales II.
- Ángulos y mediciones.
- Proporcionalidad.
- Representaciones gráficas.
- Construcciones geométricas.
- Perímetros y superficies.
- Números enteros.
- Cuerpos.
- Volumen, capacidad y masa.

El tema ecuaciones lo trabaja en números naturales II. Las define como "*igualdades en las que hay un valor desconocido al que llamamos incógnita*".

Con relación a las incógnitas sostiene: "*A las incógnitas las designamos con letras, por ejemplo x, y, z, etc. Encontrar el valor desconocido significa resolver la ecuación*".

Trabaja con ecuaciones al estudiar fracciones y decimales, presentando un problema de superficie y un problema de números.

En las actividades los problemas son:

- ✓ Problemas numéricos
- ✓ Problemas de la vida cotidiana
- ✓ Problemas geométricos
- ✓ Problemas de porcentajes

En la unidad Proporcionalidad, trabajan con proporciones y problemas sin mencionar que es una ecuación (tienen que despejar extremos y medios).

Identificación de las técnicas que utiliza el autor para resolver una ecuación

Las técnicas que plantean los autores para resolver una ecuación son:

- Aplica las propiedades de los sistemas numéricos.
- El método de deshacer, haciendo los pasos de atrás para adelante. Esto significa a trabajar con la operaciones inversas.

Análisis de los indicadores

- Todos los ejercicios y problemas tienen solución única.
- En la unidad de números enteros solo presenta seis ecuaciones lineales para resolver.
- En la unidad de volúmenes trabaja con las expresiones de superficie y volúmenes de los cuerpos sin vincularla como una ecuación. Lo mismo ocurre en la unidad de volumen, capacidad y masa.
- Es poco clara la técnica de deshacer.
- En este libro las ecuaciones aparecen en las diferentes unidades temáticas.
- La definición de ecuación como igualdad numérica afianza la concepción del álgebra como aritmética generalizada.
- Esto se consolida con las técnicas propuestas. El método de deshacer no tiene ninguna fundamentación teórica que facilite la comprensión del concepto y de la técnica utilizada.
- Los problemas son escasos a pesar que el tema se desarrolla a lo largo del libro.

Libro 5 *(Matemática I – Santillana Polimodal- 1° edición febrero 1999).*

Nociones Teóricas relativas al tema ecuaciones: rasgos del álgebra presentes en las propuestas de enseñanza.

Los autores presentan el libro con la selección de contenidos a estudiar y dan una explicación de las actividades, las clasifican en:

- Actividades para completar y vayan construyendo los conceptos.
- Problemas que conectan a la Matemática con otras disciplinas y con actividades para completar.
- Actividades de aplicación y de integración ordenadas siguiendo el desarrollo de los contenidos del capitulo.
- Caleidoscopio: juegos, curiosidades, referencias históricas y bibliografía de personas relacionadas con la Matemática.

Al finalizar cada capitulo hay una sección **Síntesis** de todos los conceptos desarrollados en cada capitulo.

El estudio de las ecuaciones aparece desde el capitulo uno, el cual comienza con el estudio de los Números reales y números complejos; luego se estudian los Números irracionales. Radicales. Y en el capitulo tres se estudia Función lineal. Ecuaciones e Inecuaciones lineales.

Identificación de las técnicas que utiliza el autor para resolver una ecuación

- Trabaja con ecuaciones con módulo, aplicando el concepto de distancia entre dos números o la definición de módulo.
- Presenta ecuaciones en los números complejos.

Análisis de los indicadores

- En el capitulo en donde se estudia función lineal, parte con situación de la vida cotidiana, analizando las gráficas de dos rectas. Luego define lo que es pendiente *"como el aumento o disminución de la variable **y** por cada aumento unitario de la variable **x**".*
- Analiza cuando la pendiente es positiva, negativa o nula.
- Define lo que es ordenada al origen cuando x = 0. Dice *"para hallar la ordenada al origen de una función lineal f(x) = ax +b, se plantea: f(0)= a.0+b = b".*
- Al estudiar recta paralelas y perpendiculares , enuncia:
  - ✓ *Dos rectas son paralelas si sus pendientes son iguales.*
  - ✓ *Dos rectas son perpendiculares si el producto de sus pendientes es igual a –1.*
    - Estudia seguidamente, la función escalonada, la función periódica con tramos lineales y la función valor absoluto o modulo.
    - Termina el capitulo con el estudio de inecuaciones lineales y sistemas de ecuaciones lineales.
    - Los tipos de problemas que presenta el libro son: de la vida cotidiana; de porcentajes y numéricos.

<u>Libro 6</u> *(Matemática 1- Primer año del ciclo básico – 18° edición- Año 1993- Ed. Estrada)*

Nociones Teóricas relativas al tema ecuaciones: rasgos del álgebra presentes en las propuestas de enseñanza.

Los autores estructuran los contenidos de la siguiente manera:

- Conjuntos.
- Conjuntos de puntos
- Relaciones
- El conjunto de números naturales
- Igualdad y orden

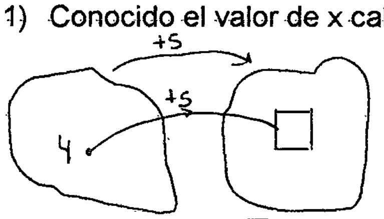
- Adición y sustracción
- Relaciones geométricas
- Multiplicación y división
- Potenciación y radicación
- Triángulos
- Divisibilidad
- Desigualdades geométricas
- Números enteros
- Circunferencia.
- Construcción
- Números racionales
- Lugares geométricos
- Relaciones y estructuras.

<u>Identificación de las técnicas que utiliza el autor para resolver una ecuación</u>

En la unidad "Adición y sustracción", introduce el termino "ecuación" :

En la función x --------- y = x + 5 se presentan dos problemas:

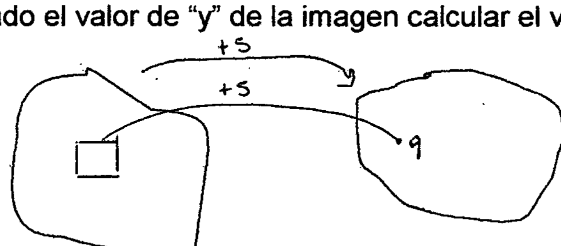
1) Conocido el valor de x calcular el valor correspondiente de la imagen y.



$4 + 5 = \boxed{y}$

Adición

2) Conociendo el valor de "y" de la imagen calcular el valor de x.



$x + 5 = 9$

ecuación

Para resolver la ecuación se transforma 9 en x por la operación inversa de la adición.

Propiedades que aplica: conmutativa; asociativa, cancelativa y uniforme.

En la unidad "Números enteros" plantea ecuaciones en N_0: $a + x = b \Rightarrow x = b - a$

En la unidad "Números racionales", habla de ecuaciones en Z: $ax = b \Rightarrow x = b{:}a$

Al desarrollar los contenidos presenta:

i) ejercicios

ii) ejercicios de repaso. Ejercicios a responder: ¿cuál es la conclusión?.

iii) Para discutir.

Análisis de los indicadores

- Todo los contenidos los trabaja con relaciones.
- Presenta muy pocos problemas
- Resuelve ecuaciones aplicando propiedades de sistemas numéricos.

Conclusiones del análisis realizado en los libros de textos 1,2,3,4,5,y 6

Consideramos los siguientes Tipos de problemas y Técnicas matemáticas simbolizadas de la siguiente manera:

Tipos de Problemas

P_1: problemas numéricos

P_2: problemas geométrico.

P_3: problemas de la vida cotidiana.

P_4:problemas de edades.

P_5:problemas de proporcionalidad.

P_6:problemas gráficos.

P_7:problemas olímpicos.

Técnicas Matemáticas

T_1: Encontrar las raíces de la función $y = f(x) \Rightarrow f(x) = 0$

T_2: Propiedad uniforme de la suma y el producto.

T_3: Gráfica.

T_4: Propiedades de los sistemas numéricos.

T_5: de la balanza.

T_6: A partir de una ecuación cuadrática se llega a una ecuación lineal.

T_7:Deshacer.

T_8: Definición de modulo como distancia.

A partir de los indicadores extraídos de cada uno de los libros examinados intentaremos reconstruir la organización matemática que aparece en los manuales para ser enseñados y el grado de algebrización de las actividades matemáticas de 7º EGB3 y polimodal relacionadas con el tema ecuaciones a través del estudio de los libros de textos en circulación en Salta.

El proceso de algebrización es un fenómeno matemático didáctico que comprende una transformación de la naturaleza de las organizaciones matemáticas escolares y un cambio profundo de un proceso de estudio de esas organizaciones.

No existe una división entre una organización matemática algebrizada y una no algebrizada, sino que esta diferenciación es una cuestión de grados.

Siguiendo a Chevallard describimos la actividad matemática como una actividad de modelización y tomamos las siguientes conceptualizaciones de Gascón:

- Una organización matemática está algebrizada en la medida en que pueda ser considerada como un modelo algebraico de otra organización matemática que juega el papel de sistema a modelizar.
- Una modelización matemática es un modelización algebraica si modeliza íntegramente todos los componentes del sistema y, en particular, si modeliza materialmente las técnicas matemáticas de dicha organización.

  En definitiva una organización matemática algebrizada es la que resulta al llevar a cabo una modelización algebraica.

  Gascón explícita cuatro indicadores del grado de algebrización (IGA) de una organización matemática:
- -IGA 1- **Manipulación de la estructura global de los problemas**: una organización matemática está mas algebrizada si trata con tipos generales de problemas y no sólo aislados. Para ello es necesario usar el juego entre parámetros (objetos matemáticos conocidos tratados como desconocidos) e incógnitas (objeto matemático desconocido que se manipula como conocido).
- -IGA 2- **Tematización de las técnicas y nueva problemática al nivel tecnológico**: un segundo indicador del grado de algebrización de una organización matemática está dado por la posibilidad de caracterizar las estructuras de las organizaciones y plantear las condiciones de existencias de las soluciones y no sólo determinar una única solución del problema. O sea que

mientras más algebrizada está una organización matemática más fácil es que sus técnicas puedan situarse a un nivel tecnológico respecto a la organización inicial, enriqueciendo así la tecnología de la última.

- -**IGA 3- Unificación y reducción de los tipos de problemas, técnicas y tecnologías**: el tercer indicador viene dado por la mayor o menor unificación de los diferentes tipos de problemas que forman parte de la organización y por la mayor o menor integración de sus técnicas y elementos tecnológicos asociados. Esto lleva a una reducción de los instrumentos escritos con los que se representan y manipulan los problemas. Este indicador no se puede aplicar a organizaciones matemáticas puntuales (con una sola técnica) sino a organizaciones matemáticas locales (conjunto de tareas y técnicas que aceptan una tecnología común) - Chevallard - 1999 .
- **IGA 4- Emergencia del tipo de problemas independiente del sistema modelizado**: Este último indicador viene dado por la posibilidad de generar tipos de problemas cada vez más alejados del contexto del sistema cuyo modelo es la organización que se analiza.

Del análisis realizado de los indicadores extraemos las siguientes conclusiones de la investigación:

<u>Indicadores Libro 1:</u>

Noción emergente: "igualdad entre expresiones algebraicas que satisface solamente para algunos sistemas de valores asignados a sus letras".

Campo de problemas
- Según el grado
- Según el numero de incógnita
- Igualdades condicionales E incondicionales.
- Fraccionarias.

- numéricos
- proporcionalidad
- geométricos
- edades

Técnica:
- T_1: Encontrar las raíces de la función $y = f(x) \Rightarrow f(x) = 0$
- T_2: Propiedad uniforme de la suma y el producto.

Soluciones:

- Todos los problemas propuestos tienen solución única.
- Ausencia de discusión de la solución de las ecuaciones.
- Introducción del vocablo "raíces extrañas".

Ausencia de: i) cuantificadores
ii) justificaciones
iii) parámetros

Ejemplos:

1.1- Según el grado y condicionales : $x^2 = 2x + 15$

"Es una ecuación, pues solo se satisface la igualdad para x = 5 y para x =3"

1.2- Según el numero de incógnitas: $2x + y = 7$

"tiene infinitas soluciones que son cada uno de los pares de valores que la satisfacen".

Así una solución: x = 1 ; y = 5

Otra solución: x = 2 ; y = 3

Otra solución: x = 0 ; y = 7

1.3- Fraccionarias: $\dfrac{3}{1-x} = 4$

Para despejar la incógnita x, se pasa el divisor (1 –x) al segundo miembro, con lo que desaparece el denominador, transformando así la ecuación fraccionaria en la ecuación entera: 3 = 4(1 –x).

Luego 3 = 4 – 4x

o sea 4x = 4 – 3

de donde x = ¼

Luego ¼ es la raíz de la ecuación dada. En efecto, al sustituir en la ecuación dada, x por el valor ¼, dicha ecuación se satisface. La ecuación $\dfrac{3}{1-x} = 4$ *tiene por conjunto solución S = { ¼ }.*

1.4- Problema numérico:

" Un numero es tal que su duplo disminuido en 3 unidades es igual a dicho numero aumentado en 2. ¿Cuál es el numero?.

Al numero buscado, o incógnita del problema, se lo designa por x. Luego, su duplo es 2x.

El problema impone que si a ese duplo se le resta 3, se obtiene el numero x mas 2 unidades; por lo tanto, debe verificarse la igualdad: $2x - 3 = x + 2$.
Se obtiene así una ecuación de primer grado cuya raíz es el numero buscado. Para resolverla se transponen los términos x y -3 y resulta: $2x - x = 2 + 3$, de donde $x = 5$.
Luego, 5 es el numero buscado, es decir, la solución del problema.

1.5- Problema geométrico y proporcionalidad: *"La base mayor de un trapecio es el doble de la otra y la altura del mismo es igual a 12,5 cm. ¿Cuántos cm tiene cada una de las bases, si la superficie del trapecio es de 75 cm^2?.*
La respuesta es: las bases miden 8 cm y 4 cm.

1.6- Problemas de edades: *"Un padre tiene el doble de la edad de su hijo, y el doble de la suma de las dos edades es 120. ¿Qué edad tiene el padre y que edad tiene el hijo?.*
La respuesta es: 40 y 20 respectivamente.

A través de los problemas presentados como ejemplos del Libro 1, observamos:

a) El campo de problemas "según el grado y condiciones" y "según el numero de incógnitas" no es visible una técnica, presenta la solución sin indicar cómo la obtiene.
b) En el campo de problemas de ecuaciones, al no poner condiciones en la utilización de la T_2, se puede llegar a un valor que no es solución. Este trabajo algebraico condiciona la comprensión de las ecuaciones fraccionarias.
   Los campos numéricos y de edades aparecen desintegrados y sólo existe un problema donde si integra el campo de problemas de proporcionalidad y los geométricos.
c) Todos los problemas tienen solución única.
d) No hay justificaciones ni demostraciones.

Indicadores Libro 2:

Noción emergente: "igualdad en la que uno o mas valores a los que llamaremos incógnita son desconocidos".

Campos de Problemas	- Propuestos. - Resueltos. - Ejercicios y Problemas. - Caleidoscopio. - Olimpiadas Matemáticas.	- gráfico - numéricos. - de la vida cotidiana

Técnica: $\begin{cases} T_1\text{: Encontrar las raíces de la función } y = f(x) \Rightarrow f(x) = 0 \\ T_2\text{: Propiedad uniforme de la suma y el producto.} \end{cases}$

Soluciones:

- Al trabajar ecuaciones con parámetros analiza las diferentes soluciones (única; infinitas y sin solución).

Ausencia de: i) cuantificadores
ii) justificaciones.

Ejemplos:

2.1- Problemas propuestos y resueltos: "*Dos chicos tenían la misma cantidad de dinero para jugar en una maquina flipper, y ambos gastaron todo lo que tenían. Uno de ellos compró en total 13 fichas y quedo debiendo $ 2; el otro compró de entrada 10 fichas y luego terminó gastando los últimos $4 que le quedaban. ¿Cuánto sale cada ficha?.*

Recurramos al lenguaje matemático o simbólico para resolver el problema.
Queremos hallar el precio de una ficha; ésta es nuestra incógnita, que podemos representar con la letra x.
Llamamos : $x \rightarrow$ *al precio de cada ficha*
Entonces , $13x - 2 \rightarrow$ *es la cantidad de dinero que gasta uno de los chicos.*
Y $10x + 4 \rightarrow$ *es la cantidad de dinero que gasta el otro.*
Como han gastado la misma cantidad de dinero, podemos plantear la siguiente igualdad o ecuación: $13x - 2 = 10x + 4.$
Podemos comprobar que $x = 2$ *es la solución de la ecuación, ya que:*

$13.\ 2 - 2 = 10\ .\ 2 + 4$

$26 - 2 = 20 + 4$

$24 = 24.$ *Cada ficha sale $ 2.*

En muchas ocasiones, al tener que resolver un problema matemático, recurrimos al idioma del álgebra. Traducimos las relaciones numéricas a un lenguaje simbólico, en el que utilizamos letras para representar a una o mas incógnitas.

Enuncia al decir de Polya (1954) las fases de resolución de un problema.

En la resolución de un problema seguimos estos pasos:

- *determinamos la incógnita;*

- *traducimos al lenguaje simbólico el enunciado del problema,*
- *planteamos la ecuación, resolvemos la ecuación, comprobamos la solución.*

2.2- <u>Ejercicios resueltos</u>: *Hallemos la solución de la ecuación:* $\frac{4x-2}{-3}+\frac{3}{2}=-\left(\frac{x}{4}-5\right)$

- *Quitamos los paréntesis:* $\frac{4x-2}{-3}+\frac{3}{2}=-\frac{x}{4}+5$

- *Colocamos todos los denominadores positivos:* $\frac{-4x+2}{3}+\frac{3}{2}=\frac{-x}{4}+5$

- *Suprimimos denominadores multiplicando por el m.c.m de los denominadores:*

$$12\left(\frac{2-4x}{3}\right)+12.\frac{3}{2}=12\left(\frac{-x}{4}\right)+12.5$$

- *Distribuimos el producto con respecto a la suma: 8 – 16x + 18 = - 3x + 60*
- *Sumamos: -16x + 26 = -3x +60*
- *Restamos 26 a ambos miembros: - 16x = - 3x + 34*
- *Sumamos 3x a ambos miembros: - 13x = 34*
- *Dividimos ambos miembros por 13:* $x=-\frac{34}{13}$

2.3- <u>Ejercicios y problemas</u>:

El campo de problemas son: gráfico; numérico y de la vida cotidiana.

- <u>Gráfico</u>: *" Un móvil se desplaza con movimiento rectilíneo a velocidad constante de 15 metros por segundo. Su posición en el instante t (en segundos) está dada por: x(t) = 4 + 15 t para t >0. ¿Cuántos tiempo transcurre cuando ha recorrido 24 metros?. ¿Y 39 metros?".*

- <u>Numérico</u>: *"Resuelvan las ecuaciones:*

a) $\frac{x-b}{a}=\frac{x}{b}$ *a y b son números reales no nulos.*

b) $(1-x)(1+x)(2+x)=x^3-2x^2-8$

c) $\frac{2x^2-2x-1}{2x}=\frac{3x^2-2x}{3x+1}$

d) $(-5x)(1-x)=2(1+x)^2+3(1+x)^2$

e) $\frac{-1}{x+1}-\frac{2}{x-1}=\frac{3}{x^2-1}$

- De la vida cotidiana: *" Se quiere adornar con 270 lamparitas de colores un gran cartel triangular, colocando una lamparita en cada esquina y que la base tenga la tercera parte de las lamparitas que tiene cada uno de los otros dos lados. ¿Cuántas lamparitas habría que colocar en cada lado?."*

2.4- Problemas Olímpicos: *" En una colonia de vacaciones se han inscriptos 305 chicos, de los cuales 175 son varones. ¿Cuántas mujeres mas tendrían que inscribirse para que su numero resultara el 50 % del total de chicos inscriptos?".*

En el Libro 2 observamos:

a) El campo de problemas esta totalmente desintegrado.
   Se introduce el estudio de los parámetros con un ejemplo sin justificaciones teórica. La técnica utilizada es T_1.
   A continuación los problemas con parámetros aparecen bajo el titulo de ejercicios propuestos. Se concluye el tema ecuaciones con parámetros y no se relaciona con los otros campos de problemas.
b) Cuando se introduce ecuaciones con parámetros, ecuaciones fraccionarias entre otros se ejemplifica la resolución e inmediatamente propone ejercicios.
   Nos aproximamos así al modelo tecnicista con un dominio en la aplicación de la técnica T_2.

Indicadores Libro 3:

Noción emergente: "igualdad que contiene una incógnita".

Campo de problemas
- Ejercicios y problemas
- Integramos.
- En el diario.
- Olimpiadas matemáticas.
- Caleidoscopio.
- Cuadráticas.

- Numéricos.
- Porcentaje.
- de la vida cotidiana

Técnicas
- T_4: Propiedades de los sistemas numéricos.
- T_5: de la balanza.

Soluciones:

- Todos los problemas tienen solución.
- Ausencia del trabajo con los parámetros.

Ausencia de: i) justificaciones

ii) cuantificadores

iii) campo de problemas

<u>Ejemplos:</u>

3.1- <u>Ejercicios y problemas</u>: *"Hallen los valores de x que satisfacen las siguientes igualdades".*

a) $(x + 3)^2 - (x + 2)(x - 2) = 4x(x - 5) - (2x + 1)(2x - 1)$

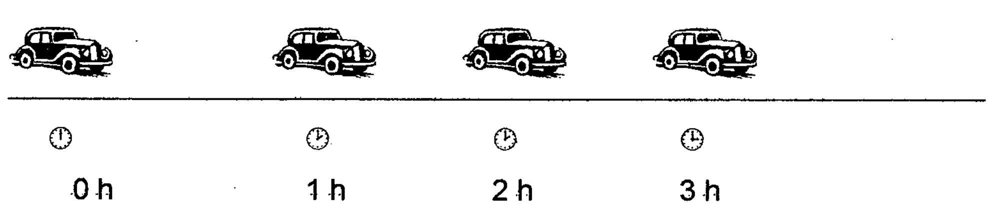
b) $(x^2 + 1)(x^2 - 1) = x(x^3 + 1)$

c) $\dfrac{2x^2 - 3}{x^2 + 3} = 2$

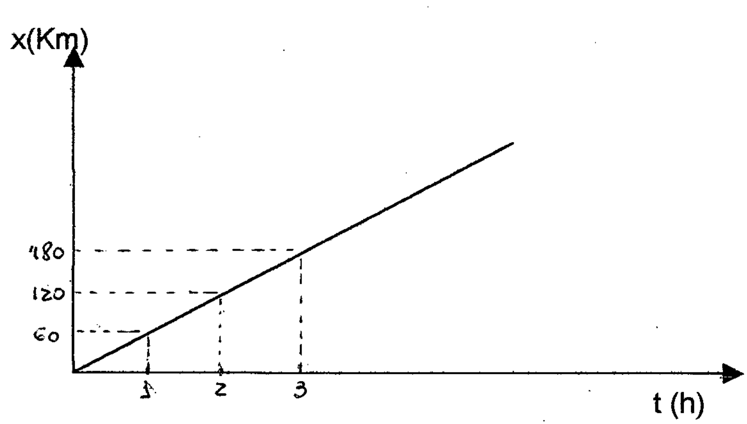
d) $\dfrac{x - 2}{(x + 9)^2} = \dfrac{0{,}3}{\frac{1}{3}x}$

3.2- <u>Integramos</u>: *"Cuando un objeto se mueve en línea recta a velocidad constante, el gráfico que representa la relación entre las posiciones y los tiempos respectivos es una recta.*

En el esquema podemos ver las diferentes posiciones de un auto que avanzo a una velocidad constante de 60km/h."



AUTO	
T (h)	x(km)
0	0
1	60
2	120
3	180



La formula de la trayectoria para ese auto es la ecuación: x = 60 t.
Observen que la pendiente de la recta es la velocidad del auto.

3.3- <u>Olimpiadas matemáticas</u>: *" La bisabuela Clara le dice a su biznieta Claritita:*

- *Recuerdo que tu abuela Clarita, que ahora tiene 57 años, me hizo lo mismo que tu madre Claritita le hizo a ella: un buen ida, de buenas a primeras, me anunció que se casaba. Mira lo que serán las casualidades, las dos lo hicieron cuando tenían la misma edad: 21 años. la única diferencia es que vos naciste la mitad de años después de celebrado el matrimonio de tu madre que lo que tardó mi nieta en nacer luego de celebrado el matrimonio de mi hija.*

  Si la historia se repite, vos también te casarás cuando tripliques la edad que tenias hace dos años, y tendrás una hija en la mitad del tiempo que tardó mi nieta en tener la suya luego de casarse.

  a) *¿Qué edad tiene actualmente Claritita?.*
  b) *¿Qué edad tiene Claritita, la mama de Clarititita?.*
  c) *Si la historia se repite, ¿dentro de cuantos años tendrá Clarititita a su hija?.*
  d) *Como la historia también se cumplió con la bisabuela de Clara, ¿qué edad tiene ella ahora?".*

3.4- <u>Caleidoscopio y en el Diario</u>: son problemas con una incógnita y con solución única.

<u>Indicadores Libro 4:</u>

Noción emergente: "igualdad en la que hay un valor desconocido al que llamamos incógnita".

- Campo de Problemas:
  - Numéricos.
  - de la vida cotidiana.
  - Geométricos.
  - Porcentajes.

Técnica:
- T_2: Propiedad uniforme de la suma y el producto.
- T_7:Deshacer.

Soluciones:

- Todos los problemas propuestos tienen solución única.

Ausencia de: i) cuantificadores

ii) justificaciones

Ejemplos:

4.1- Problemas de la vida cotidiana: *"Pedro y Juan fueron los únicos goleadores del partido, que termino 7 a 0. Si Juan hizo 3 goles, ¿cuántos goles hizo Pedro?."*

Escribiendo una ecuación: llama x a la cantidad de goles que hizo Pedro. Esta es mi incógnita es el valor que quiero hallar.

Resolvemos la ecuación: $x = 3 = 7$

Entonces: $x = 7 - 4$

$x = 4$

Pedro hizo 4 goles.

4.2- Problemas de edades: *"La suma de las edades de Juan y Pedro es igual a 36. Si Juan tiene 2 años menos que Pedro, ¿cuántos años tienen estos chicos?".*

Resolverlo mediante una ecuación, llamo z a la edad que tiene Pedro, traduzco y escribo:

$z + z - 2 = 36$

entonces: $2.\,z - 2 = 36$

$2.z = 36 + 2$

$z = 38 : 2$

$z = 19$

Pedro tiene 19 años y Juan 17 años.

4.3- Problemas numéricos: *"Un numero aumentado en 25 unidades da como resultado 38. Calculen ese numero."*

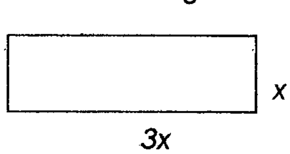
Planteamos la ecuación: $x + 25 = 38$

Entonces: $x = 38 - 25$

$x = 13$

El numero es 13.

4.4- Problemas geométricos: *Observen el plano de un terreno rectangular que tiene un perímetro de 480 m. ¿Cuánto miden el largo y el ancho?."*



Planteamos la ecuación: $2.x + 2.3x = 480$

Entonces: $2.x + 6.x = 480$

$$8.x = 480$$

$$x = 480 : 8$$

$$x = 60$$

Largo = 60 m

Ancho = 180 m

Estos problemas aparecen cuando se estudian los números naturales. Esta organización se repite cuando se trabaja con los números fraccionarios y decimales, y proporcionalidad.

En el Libro 4 observamos:

Los problemas propuestos son:

i) muy limitados en numero.

ii) Desintegrados.

iii) Dominio de la T_2.

Indicadores Libro 5:

Noción emergente: definición de módulo como distancia. No hay definición de ecuación.

Campo de problemas:

- Para completar
- Construir conceptos
- Conectar a la matemática con otras disciplinas.
- integrar
- Caleidoscopio (juegos, curiosidades, etc.)
- Porcentaje
- Numéricos
- De la vida cotidiana

Técnicas: T_8: Definición de modulo como distancia.

Soluciones:

- todos los problemas tiene solución única
- Ausencia de; i) de discusión de las soluciones de las ecuaciones
  ii) justificaciones
  iii) cuantificadores
  iv) campo de problemas

Indicadores Libro 6:

Noción emergente: introduce el concepto de "ecuación" a partir del concepto de función.

Campo de problemas
- Numéricos
- Vida cotidiana

Técnicas: T_2: Propiedad uniforme de la suma y el producto.
T_4: Propiedades de los sistemas numéricos.

Soluciones:

- Todos los problemas propuestos tienen solución única.
- Ausencia de cuantificadores.

VI- CONCLUSIONES Y PROPUESTAS

El estudio realizado en los capítulos anteriores partió de la hipótesis que en algunos libros de textos, la actividad matemática escolar- tal como se lleva acabo en su propuesta de enseñanza - muestra ciertos rasgos del álgebra, con una desintegración entre teoría, técnicas y tecnología.

Hemos considerado para corroborar la hipótesis dos variables: la actividad matemática y los rasgos del álgebra presentes en la propuesta de contenidos .

El análisis de la actividad matemática según hemos dicho, presenta dos aspectos inseparables: la práctica matemática, es decir las tareas materializadas en tipos de problemas y las técnicas útiles para llevarlas a cabo. El análisis se realizó de acuerdo a ello- tomando en cuenta como indicadores: las técnicas, la tecnología y las teorías utilizadas en la actividad matemática.

En cuanto a los rasgos del álgebra presentes en la propuesta de contenidos, se tomó los siguientes indicadores: aparición progresiva de letras; existencia de un bloque de contenido dedicado al cálculo algebraico y otro al cálculo de ecuaciones; empleo del cálculo algebraico mas elemental en problemas concretos; y desintegración entre los contenidos dedicados al cálculo algebraico y el cálculo de ecuaciones.

Realizada la recolección y análisis de datos, podemos inferir las siguientes conclusiones:

En todos los libros analizados:

- Se inicia el tema de ecuaciones con una definición general de ecuaciones. Como consecuencia de esto aparecen dos conceptos superpuestos el de "ecuación" y el de "ecuación de primer grado con una incógnita".

  En las nociones matemáticas planteadas, no están dadas las condiciones para diferenciarla a pesar de que son de naturaleza diferentes.

  Como consecuencia de ello, la definición que se da para ambos conceptos es la de "igualdad con incógnitas".

- En la noción de "igualdad con incógnitas" no se rompe la dependencia unilateral entre lo numérico (aritmético) y lo "algebraico" considerando como generalización de la aritmética.

  Un indicio de esta dependencia lo constituye el tratamiento de objetos aritméticos que se da tanto a los números negativos como a los racionales. Los objetos aritméticos, no aparecen como objetos algebraicos, sin embargo, resuelven problemas algebraicos.

- No hay indicios de la necesidad matemática de integración de la actividad matemática. Los problemas son aislados y desaparecen por completo los elementos justificativos e interpretativos que podrían dar elementos concretos para establecer interrelación entre las diversas actividades (Libro 2; 3 y 5) .

En algunos libros de textos se proponen diversas actividades (olimpiadas, integramos, juegos), pero las mismas se presentan totalmente desintegradas.

- En cuanto a la técnica de resolución de ecuaciones:
  a) Hay un predominio de la técnica de "deshacer" ; "aplicar propiedades numéricas" y "la de la balanza". Estas técnicas consolidan la concepción de ecuación como igualdad numérica.

     No hay justificación para la utilización de las técnicas mencionadas, lo que se evidencia en los siguientes rasgos.

  b) La mayoría de los autores proponen problemas numéricos donde las letras juegan únicamente el papel de incógnitas, los parámetros están ausentes.
  c) Todas las propuestas de los autores tienen una única solución, no permite plantear las condiciones de existencia de todas las soluciones posibles, lo que provoca dificultad para avanzar con las ecuaciones con más de dos incógnitas y con los sistemas de ecuaciones.

En los libros de la década del 90 después de la Reforma, el análisis realizado, permite inferir que se acentúan las siguientes características:

- Escasa ejercitación a pesar de la diversidad de actividades que proponen de diferentes nombres (olimpiadas matemáticas, integramos, etc), limita el momento exploratorio de la actividad matemática, lo que no permite una profundización de las técnicas utilizadas para que se pueda llegar a un nivel tecnológico.
- No se plantea un problema que requiera usar una técnica distinta a las utilizadas; lo que indica un momento exploratorio débil, en consecuencia el momento de la técnica es nulo.

Por todo lo expuesto surge un nuevo problema derivado de la generalización de la aritmética, que nos llevó a la formulación de la siguiente hipótesis derivada:

H2 La ausencia de justificaciones y demostraciones matemáticas en los libros de textos utilizados en las actividades matemáticas desarrolladas en el aula tiene un carácter netamente mostrativo de la matemática.

La confirmación de ésta hipótesis, nos permite afianzar la tesis, que hay una aritmetización del álgebra y una desarticulación entre noción matemática, técnica y tecnología.

A partir del análisis de la Hipótesis fundamental y la Hipótesis derivada, resultaron los siguientes indicadores:

- Grado de algebrización nulo.
- No hay demostraciones matemáticas.

- Fraccionamiento del campo de problemas.
- Las ecuaciones siempre tienen solución única.
- Ausencia de parámetros.

Estos indicadores nos permiten establecer un paralelismo con los cuatro indicadores estudiados por Gascón – Bosch – Bolea (2001) llamados grado de indicadores del grado de algebrización de una organización matemática (IGA).

Según el análisis realizado en los libros podemos decir:

- No existe una relación de los problemas propuestos cuando se trabaja con funciones, proporcionalidad y geometría.
- La noción de incógnita como numero a encontrar, no se presenta el análisis entre incógnita y parámetro en ninguno de los textos analizados.

  Estos indicadores sintetizan IGA 1: manipulación de la estructura global de los problemas. Una organización matemática está mas algebrizada si trata con tipos generales de problemas y no solo aislados.
- Todos los problemas de ecuaciones tienen solución única. Esto no permite plantear las condiciones de existencia de todas las soluciones posibles, lo que a nuestro juicio provoca una serie de dificultades para avanzar con las ecuaciones con mas de dos incógnitas y con los sistemas de ecuaciones.
- No hay justificación para las técnicas utilizadas. Se muestra a través de "reglas practicas".

En consecuencia no existe el segundo indicador del grado de algebrización (IGA 2): tematización de las técnicas y nueva problemática al nivel tecnológico.

Como los tipos de problemas y técnicas no se profundizan en consecuencia no existe una unificación y reducción de los tipos de problemas y tampoco una unificación de las técnicas por lo que el tercer indicador es nulo. (IGA 3): unificación y reducción de los tipos de problemas, técnicas y tecnología.

Hasta aquí he demostrado que en las propuestas de enseñanza de los libros de textos analizados se produce una generalización de la aritmética, lo que trae como consecuencia, una aritmetización del álgebra y una desarticulación entre noción matemática, técnica y tecnología.

Cabe preguntarme ahora como investigadora preocupada por la Didáctica de las Matemáticas:

> ¿Cuáles serian las actividades necesarias para que el tema sea tratado en forma completa favoreciendo un mayor grado de algebrización?.

- ¿Cómo reformular las actividades propuestas en los libros de textos para profundizar las técnicas de resolución de ecuaciones para ampliar el campo de problemas?.

La respuestas a dichas preguntas me conduce a pensar y proponer alternativas de estudio para la enseñanza del álgebra, a partir de las conclusiones inferidas del análisis realizado.

PROPUESTA PARA AMPLIAR EL CAMPO DE PROBLEMAS A PARTIR DE LA PROFUNDIZACIÓN DE LAS TÉCNICAS DE RESOLUCIÓN DE ECUACIONES .

A. Descripción de las propuestas de los C.B.C. para EGB acerca del tema "Resolución de Ecuaciones".

A partir del análisis de los C.B.C de la Nación y de la Provincia para el Área de las Matemáticas, para EGB, he seleccionado los contenidos conceptuales y procedimentales que a mi juicio abarcarían las propuestas de trabajar con las sucesiones, como paso previo a la conceptualización intuitiva de variable.

En los CBC, la organización de los contenidos referidos a las nociones de: sucesiones, ecuaciones y funciones, aparece del modo presentado a continuación, en los diferentes bloques de los tres ciclos:

Bloque 1: NUMERO

Primer Ciclo

Contenidos Conceptuales	Contenidos Procedimentales
• La sucesión natural (numerales por los menos de hasta cuatro cifras). • Relaciones de mayor, igual, menor, uno mas, anterior, posterior, siguiente, entre, . . . • Escrituras equivalentes de un numero (Ejemplo: 17 = 8 + 9 = 10 + 7 = . . .) • Escritura decimales de uso común. Usos. • Comparación de números naturales desde el punto de vista cardinal y ordinal. • Identificación de regularidades en la sucesión numérica y su uso para escribir números y compararlos.	• Comparación de colecciones y lugares en una sucesión desde el punto de vista numérico (correspondencia, conteo, estimación, cardinalizacion). • Uso de la calculadora para investigar regularidades y propiedades de los números.

• Utilización del sistema de numeración posicional, decimal para leer, escribir, comparar, descomponer y componer numerales de hasta cuatro cifras.	

Segundo Ciclo

Contenidos Conceptuales	Contenidos Procedimentales
• Números naturales. Usos. Comparación. Orden. La recta y los números naturales. • Sistemas de numeración: posicionales y no posicionales. Reglas de escritura y lectura. • Fracciones: concepto. Usos. Forma de representación. Comparación. Orden. Fracciones decimales. • Equivalencias entre formas de escritura decimal y fraccionaria.	• Construcción de una sucesión de números según una regla dada. • Utilización del sistema de numeración posicional decimal para leer, escribir, comparar, componer y descomponer numerales. • Comparación y ordenación de números naturales y decimales usando las reglas del sistema de numeración. • Representación en la recta de números fraccionarios y decimales sencillos.

Tercer Ciclo

Contenidos Conceptuales	Contenidos Procedimentales
• Sistema de numeración posicional decimal. Propiedades de los sistemas posicionales. Reglas de escritura y lectura. • Números enteros. Comparación. Orden Discretitud. • Números racionales: concepto. Equivalencias. Expresiones decimales finitas y periódicas. La recta y los números racionales. Orden. Densidad.	• Comparación y ordenación de números enteros. • Comparación y ordenación de números bajo distintas representaciones. • Identificación de formas de escrituras equivalentes de un numero.

Bloque 2: OPERACIONES

Primer Ciclo

Contenidos Conceptuales	Contenidos Procedimentales
• Transformaciones que afecta: - el lugar de un elemento en una sucesión (desplazamientos o cambios de posición).	• Lectura e interpretación de enunciados (orales, escritos, gráficos). • Selección y simbolización de la operación aritmética correspondiente a la situación problemática presentada.

• Nociones de mitad y doble, tercio y triple, cuarto y cuádruple.	• Investigación de propiedades de cada operación a través del análisis de tablas.

Segundo Ciclo

Contenidos Conceptuales	Contenidos Procedimentales
• Números naturales: suma y resta. Multiplicación y división. Potencias y raíces sencillas. Algoritmo de cada operación. Uso de propiedades. Ecuaciones y desigualdades. • Fracciones: suma y resta. Multiplicación y división. Algoritmos. Propiedades. Ecuaciones y desigualdades sencillas. • Decimales: Operaciones propiedades de cada operación. Ecuaciones y desigualdades sencillas en el conjunto de los números racionales. • Proporcionalidad: relaciones de proporcionalidad directa e inversa. Propiedades. Expresiones usuales de proporcionalidad (porcentaje, escala, interés simple, etc).	• Interpretación del sentido de las operaciones en los distintos conjuntos numéricos. • Traducción de situaciones de la vida real al lenguaje aritmético. • Resolución de ecuaciones y desigualdades de primer grado por métodos intuitivos o numéricos. • Interpretación y resolución de situaciones de proporcionalidad utilizando distintos procedimientos (reducción a la unidad, constante de proporcionalidad, usos de tablas y gráficos). • Aplicación del concepto de razón a problemas de escala, interés, etc.

Tercer Ciclo

Contenidos Conceptuales	Contenidos Procedimentales
• Números enteros: Operaciones. Potencias con exponente natural. Raíz cuadrada entera. Propiedades. Ecuaciones e inecuaciones. • Proporcionalidad directa e inversa. • Sucesiones numéricas proporcionales.	• Operaciones con distintos conjuntos de números. • Resolución de sistemas de ecuaciones e inecuaciones de primer grado.

Bloque 3: LENGUAJE GRAFICO Y ALGEBRAICO

Primer Ciclo

Contenidos Conceptuales	Contenidos Procedimentales
• Patrones (regularidades) numéricas. • Tablas y diagramas expresando relaciones numéricas.	• Interpretación y completamiento de patrones numéricos. • Confección de diagramas y tablas para ejemplificar relaciones numéricas.

	• Uso de relaciones funcionales para resolver situaciones problemáticas utilizando tablas, diagramas, etc. (ejemplo: duplo de; menos que ; 2 menos que, etc).

Segundo Ciclo

Contenidos Conceptuales	Contenidos Procedimentales
• Funciones. Concepto. Formas de expresión a través de tablas, diagramas y gráficos cartesianos. Ejemplos de funciones en contextos numéricos, geométricos y experimentales. • Gráficas de funciones directas e inversamente proporcionales. Características generales de los gráficos de estas funciones.	• Utilización de diversas formas de expresar la dependencia entre variables (verbal, tablas, gráficos, formulas, etc). • Interpretación y explicación de gráficos de funciones. • Exploración de relaciones funcionales discriminando si son o no de porcentualidad. • Utilización de gráficos en coordenadas cartesianas para representar funciones.

Tercer Ciclo

Contenidos Conceptuales	Contenidos Procedimentales
• Expresiones algebraicas. Significado. • Formulas. Igualdades y ecuaciones. • Ecuaciones de primer grado con una incógnita. Ecuaciones equivalentes. • Expresiones algebraicas asociadas a una gráfica. • Noción de dependencia entre variables. Dependencia funcional. • Funciones numéricas: lineal (caso particular: función directamente proporcional); cuadrática; hiperbólica, exponencial, geométrica y trigonométricas, aplicadas a distintas áreas del conocimiento: demografía, biología, física, química, etc. • Comportamiento de funciones simples (incremento, valores limites, ceros, continuidad, periodicidad) desde su gráfica. • Sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. Significado. Resolución gráfica y analítica.	• Utilización de la notación simbólica para expresar el termino general de una sucesión. (Por ejemplo: 1; ½ ;1/3; ¼ ; ...1/n). • Discriminación de qué relaciones no son funciones a través de sus gráficas o tablas. • Utilización del lenguaje algebraico para describir gráficas sencillas. • Descripción de las características mas importantes de una función a través de su gráfica. • Descripción de un fenómeno utilizando funciones. • Anticipación de la solución de ecuaciones , inecuaciones y sistemas lineales a partir del análisis de tablas y gráficas.

Bloque 4: NOCIONES GEOMETRICAS

Primer Ciclo

Contenidos Conceptuales	Contenidos procedimentales
• Figuras: clasificación según sus formas (cuadrada, rectangular, circular, etc.), lados y vértices.	• Construcción de figuras simples: cuadrado, triángulo, rectángulo. Reconocimiento de figuras simétricas. Reproducción y construcción de figuras simétricas.

Segundo Ciclo

Contenidos Conceptuales	Contenidos Procedimentales
• Sistemas de referencias para la ubicación de puntos en: - una línea (origen, distancia) - el plano (coordenadas cartesianas y polares). • Figuras: elementos y propiedades de triángulos y cuadriláteros. La circunferencia y el circulo. Construcción con regla y compás.	• Lectura y representación de puntos en base a coordenadas en el plano. • Utilización de instrumentos de geometría (regla, compás, escuadra).

Tercer Ciclo

Contenidos Conceptuales	Contenidos Procedimentales
• Sistemas de referencia para la ubicación de puntos en el espacio y en la esfera terrestre. • Figuras; polígonos y círculos, elementos, propiedades. Relaciones entre formas. Propiedades de los ángulos de un polígono convexo. Construcciones de figuras con regla y compás.	• Lectura y representación de puntos utilizando coordenadas en el espacio y en la esfera terrestre. • Construcción de figuras con regla y compás.

Bloque 5: MEDICIONES

Primer Ciclo

Contenidos Conceptuales	Contenidos Procedimentales
• Magnitudes. Medición de cantidades. Unidades arbitrarias y convencionales. • Longitud. Distancia. Unidades no convencionales. Unidades convencionales (m ; ½ m; ¼ m; cm; mm; km). La regla graduada. • Capacidad. Unidades no convencionales. Unidades convencionales (l; ½ l ; ¼ l). El vaso graduado.	• Estimación de medidas y comprobación de estas estimaciones. Comparación y ordenación de cantidades. Medición de distinto grado de precisión.

Segundo Ciclo

Contenidos Conceptuales	Contenidos Procedimentales
• Sistemas de unidades: longitud, capacidad, peso, masa, tiempo. Moneda. • Amplitud de ángulo. El transportador. • Perímetro. Concepto. Longitud de la circunferencia. Calculo de medidas: estimación. Aproximación y exactitud.	• Estimación de longitudes, cantidades, pesos, áreas, etc. de objetos familiares. Medición seleccionando la unidad adecuada a la cantidad. • Construcción de las formulas y su uso para el calculo de perímetros y áreas de triángulos, cuadriláteros (rectángulo, cuadrado, paralelogramo), de la circunferencia y del circulo.

Tercer Ciclo

Contenidos Conceptuales	Contenidos Procedimentales
• Volumen: unidades. Equivalencias. Calculo del volumen de cuerpos poliedros y redondos. Formulas. • Relaciones entre perímetro, área y volumen.	• Estimación, medición y operaciones con cantidades de diferentes magnitudes, utilizando las unidades convencionales en problemas de distintas disciplinas. • Medición de volúmenes de cuerpos complejos utilizando distintas técnicas como la descomposición en cuerpos mas simples, la comparación por pesos y la aplicación de la formula.

Bloque 7: PROCEDIMIENTOS RELACIONADOS CON EL QUEHACER MATEMATICO

➢ Procedimientos vinculados a la resolución de problemas

Primer Ciclo

- Interpretación de las relaciones entre los datos y la incógnitas a través de representaciones concretas, gráficas o simbólicas.

Segundo Ciclo

- Modelización de situaciones problemáticas a través de materiales, tablas, dibujos, gráficos, formulas, ecuaciones, etc.

Tercer Ciclo

- Generalización de situaciones y resultados.

➢ Procedimientos vinculados al razonamiento

Primer Ciclo

- Comparación de relaciones.

- Búsqueda de regularidades en un conjunto dado.

Segundo Ciclo

- Investigación de la validez de generalizaciones a través de ejemplos y de contraejemplo.

Tercer Ciclo

- Uso y explicación del valor del contraejemplo para rebatir generalizaciones e hipótesis.

➢ Procedimientos vinculados a la comunicación

Primer Ciclo

- Denominación de conceptos y relaciones simples, utilizando el vocabulario aritmético y geométrico adecuado.

Segundo Ciclo

- Denominación, explicación y definición de conceptos y relaciones, usando el vocabulario aritmético (numérico, de proporcionalidad, etc) y geométrico (ubicación y formas) adecuado.

Tercer Ciclo

- Denominación, explicación y definición de conceptos, relaciones y propiedades, usando el vocabulario aritmético, geométrico algebraico y estadístico adecuado.

Algebrización de los problemas escolares de ecuación.

El esquema anterior muestra que desde el primer ciclo se trabaja en forma intuitiva con el concepto de variable.

Los problemas escolares de ecuación forman parte de cierta obra matemática; su algebrización se llevará a cabo a través de la modelización algebraica de dicha obra.

Dado que en los libros de textos, los elementos constitutivos de la obra a modelizar aparecen fragmentados, será necesario hacer una reconstrucción de la obra matemática que quiero modelizar.

B. Propuesta de modelización de la obra matemática a partir de su reconstrucción:

A modo de ejemplo, trabajaré con dos ejercicios propuestos por los autores del Libro 3. Introduciendo modificaciones, es decir que iré construyendo un sistema siguiendo las siguientes etapas.

1. Reconstrucción de algunas clases de problemas de ecuaciones en los números naturales, estudiados fragmentariamente en el primer capitulo del libro 3.
2. Reconstrucción de las técnicas algebraicas que se utilizan para resolver dichos problemas.
3. Reconstrucción de los elementos tecnológicos que se da de una manera mas o menos explícita y sirven para justifica dichas técnicas.

B.1. Descripción de la propuesta de los autores del libro de texto seleccionado

En el libro 3, Capitulo I: N° Naturales se sigue el siguiente orden:

- Números Naturales.
- Representación en la recta numérica.
- Propiedades de los números naturales que tiene sucesor o siguiente.
- Sucesión de los números.
- Operaciones: suma y resta.
- Aparecen las ecuaciones.

Considero que se deberían aprovechar los ejemplos que proponen los autores para hacer una entrada al álgebra con el concepto de "variable".

Los autores proponen los siguientes ejercicios:

- Escriba el numero anterior y el siguiente de cada uno de estos números:
  a) .... 1.000.000 ....
  b) .... 75.300.000 ....
  c) .... 899.000.000 ....
  d) .... 5.600.000 ....

- Completen las sucesiones de números:
  a) 1999993; 199995; 199997; ....; ....; ....
  b) 17345; 18345; 19345; ....; ....; ....

B.2. Reconstrucción de algunas clases de problemas y tecnicas algebraicas de sucesiones como paso previo para llegar a las ecuaciones

Nuestra propuesta consiste en trabajar con la siguiente secuencia de problemas:

1.- π_1: *Dado un numero determinar anterior y siguiente.*

i) ¿Cuáles son los números anterior y siguiente de:

a) .... 500 ....

b) .... 5800 ....

c) .... 5741 ....

ii) ¿Cuál es numero par anterior y siguiente de:

a) .... 8 ....

b) .... 202 ....

c) .... 4108 ....

iii) ¿Cuál es el múltiplo de 4 anterior y posterior a:

a) .... 20 ....

b) .... 44 ....

c) ....132 ....

τ_1: *Sumar y restar los múltiplos de un número.*

2.- π_2: *Hallar los términos de una sucesión.*

I) Escriba la sucesión de : a) los números pares.

b) los números pares a partir del 212.

c) los múltiplos de cuatro a partir de 16.

d) Los múltiplos de 100 a partir de 250.

τ_2: *Aplicar las definición de múltiplos.*

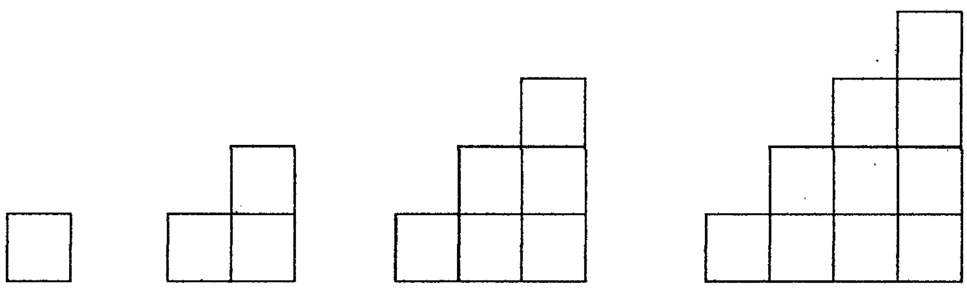
II) Observa en un reloj el ángulo que forman las agujas horaria y minutera.

Completa la tabla sabiendo que los ángulos son 30° a la 1h y 60° a las 2h. Escribe la expresión que relaciones las horas y los ángulos.

Hora	Angulo
1	30°
2	60°
3	....
4	....
5	....
6	....

τ'_2: Relacionar expresiones que vinculen dos magnitudes.

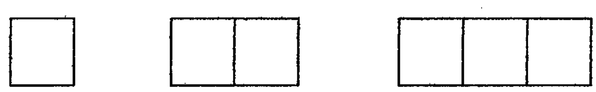
III) Considera las siguientes escalera:



La primera tiene un perímetro igual a 4. Calcula el perímetro de las 2°; 3°, 4° y 10°.

τ''_2: Calcular perímetros de figuras partiendo de una dada.

III) Considera la sucesión siguiente de cuadrados construidos con fósforos.



a) Calcula los fósforos necesarios para construir cada uno de los seis primeros cuadrados:

b) ¿Cuántos fósforos serian necesarios para construir el cuadrado 100?.

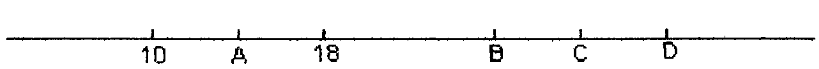
τ'''_2: Calcular cantidad de fósforos teniendo en cuenta los cuadrados a formar.

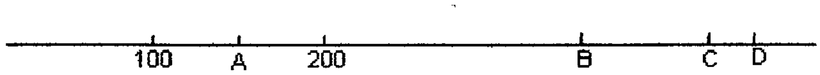
3.- π_3: *Representación en la recta real.*

a) Representa en la recta las sucesión de los números pares comprendidos entre 36 y 42.

τ_3: *Utilizar una unidad de medida para representar una sucesión a partir de 1.*

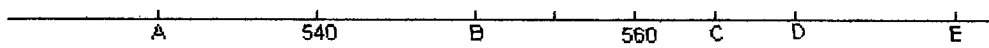
b) ¿Qué numero natural representa cada letra?.

i) 

ii) 

iii) 

τ'_3: *Representar números no consecutivos en distintas unidades de medidas.*

iv) 

τ''_3:*Encontrar el primer termino de una sucesión dado dos números no consecutivos.*

4.- π_4: *Dada una sucesión deducir el n-esimo términos de la misma.*

4.1- Dada la sucesión: 2 ; 4; 6; 8; 10; 12 . . . . . .

i) Represente en la recta la sucesión de los números pares.

ii) Ubicar en la recta el 3er termino, el 8^{avo} termino y el 15^{avo} termino.

a) ¿Cómo expresa el tercer termino en función del primero?.

b) ¿Cómo expresa el sexto termino en función del primero?.

c) ¿Cómo expresa el 20^{avo} termino de la sucesión de números pares?.

d) ¿cuál es la expresión del n-esimo termino?.

iii) Complete la siguiente tabla:

Lugar	N°
1	....
....	4
....	6
4	....
5	....
....	....
....	14
n	....

4.2- Dada la sucesión

i) Represente en la recta la sucesión de los números impares.

ii) Ubicar en la recta el 3er termino, el 8^{avo} termino y el 15^{avo} termino.

a) ¿Cómo expresa el tercer termino en función del primero?.

b) ¿Cómo expresa el sexto termino en función del primero?.

c) ¿Cómo expresa el 20^{avo} termino de la sucesión de números pares?.

d) ¿cuál es la expresión del n-esimo termino?.

iii) Complete la siguiente tabla:

Lugar	1°	....	3°	....	....	6°			n
N°	....	3	....	....	11	....			....

4.3- Dada la sucesión 3; 9; 27; 81; . . . .

i) Represente en la recta la sucesión dada.

ii) Ubicar en la recta el 3^er^ termino, el 8^avo^ termino y el 15^avo^ termino.

a) ¿Cómo expresa el tercer termino en función del primero?.

b) ¿Cómo expresa el sexto termino en función del primero?.

c) ¿Cómo expresa el 20^avo^ termino de la sucesión de números pares?.

d) ¿cuál es la expresión del n-esimo termino?.

iii)Complete la siguiente tabla:

Lugar	N°
1	....
....	9
3	....
....	27
N	....

B.3. Análisis de la obra estudiada y Propuesta de modelización

B.3.1. Relativo a los tipos de problemas y técnicas asociadas

Hemos seleccionado el capítulo I del Libro 3 analizado, para realizar una reconstrucción de la obra matemática.

En éste libro, el autor inicia su propuesta con la actividad matemática de los números naturales, en el siguiente orden:

- Sucesiones
- Ecuaciones
- Multiplicación, división, potenciación.

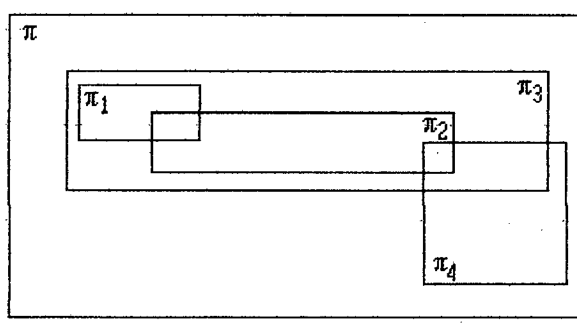
De la propuesta de reconstruir esta obra como material de "laboratorio", hemos tomado los problemas escolares de las "sucesiones" como paso previo al tema de ecuaciones.

A nuestro entender, es importante que el alumno trabaje intuitivamente con la noción de variable para comprender la noción de función. A partir de esta idea iniciar el estudio de la noción de incógnita.

Como resultado de la reconstrucción de la obra seleccionada se distingue 4 grandes tipos de problemas (π_1 , π_2, π_3, π_4) con sus respectivas técnicas prealgebraicas (τ_1 , τ_2, τ'_2 , τ''_2, τ'''_2, τ_3, τ'_3, τ''_3).

Estas técnicas consisten en la ubicación de puntos en la recta; manipulación de tablas numéricas, aplicación de propiedades "aritméticas" de los múltiplos, propiedad de potencias de igual base.

Estos problemas podríamos agruparlos en el campo de problemas de las sucesiones (π) y dentro de él los diferentes tipos de problemas caracterizados por (π_1 , π_2 , π_3 , π_4).



Se podría seguir trabajando con otros tipos de problemas abriendo un campo inmenso de problemas de sucesiones.

B.3.2. Relativo a los elementos tecnológicos y teóricos

Forman parte de la tecnología de la organización matemática todas aquellas afirmaciones cuya función es la de describir, explicar y justificar el funcionamiento de las técnicas, así como sus relaciones y posibles variaciones.

Para simplificar, considero la técnica como una respuesta a las preguntas:

- ¿Por qué se hace de esta manera?
- ¿Qué significa esta manera de hacer?.

La teoría me ayudará a explicar las justificaciones tecnológicas. En el caso que me ocupa, la tecnología abarcará las definiciones y propiedades tales como;

Definición:

- Números pares
- Números impares

- Múltiplos
- Unidad de medida
- Sucesión
- Función

Propiedades :

- Propiedades de los enteros de "cada numero" tiene siguiente.
- Propiedades de los múltiplos.
- Propiedades de las suma de funciones.

Tanto las definiciones como las propiedades sirven para justificar las técnicas descriptas y utilizadas.

En una primera versión tanto los problemas como las técnicas, aparecen atomizadas., queda hacer un trabajo mas flexible o mejor dicho de estructuración de estos elementos (problemas – técnicas), utilizando un modelo funcional como el de las sucesiones.

Este estudio me llevará a responder algunos de los siguientes interrogantes:

- ¿Cuáles son, por ejemplo, las funciones especificas, para utilizarlos en el momento del trabajo de la técnica?.
- ¿Cuáles son, por ejemplo, las funciones especificas que nos permita modelizar el tipo de problemas de las sucesiones y las técnicas correspondientes?.
- ¿Cómo integrar el momento del trabajo de la técnica con la del momento tecnológico en el proceso de estudio de una obra algebrizada?.

Así será posible diseñar la obra algebrizada y su proceso de estudio; lo que me permitirá generar conjeturas y predecir fenómenos didácticos contrastable empíricamente.

BIBLIOGRAFIA

- ✓ Arsac, Gilbert – Germain, Gilles – Mante, Michel (1988). Probleme Ouvert et Situation – Probleme Institut de Recherche Pour L'en seignement des Mathematiques Acaademie de Lyon.

- ✓ Bosch i Casabo, M. (1994). La dimensión ostensiva en la actividad matemática. El cado de la proporcionalidad. Tesis Doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona. España.

- ✓ Bosch M., Gascón J. (1994). La integración del momento de la técnica en el proceso de estudio de campos de problemas de matemática. Enseñanza de la ciencia 12 (3) pp 314-332.

- ✓ Booth L. (1984). Algebra: Children's Strategies and errors. NFER Nelson.

- ✓ Boyer, Carl (1974). Historia de la Matemática. Alianza.

- ✓ Bressan y otros (1997). Los CBC y la enseñanza de la Matemática. AZ Editora. Buenos Aires. Argentina.

- ✓ Camilloni, Alicia (1996), "De herencias, deudas y legados. Una introducción a las corrientes actuales de la didáctica" En Camilloni y otras Corrientes Didácticas Contemporáneas, Bs.As., Paidós.

- ✓ Calleja, M. L. (1994). Un club matemático para la diversidad. Narcea S.A de Ediciones.

- ✓ Cosenza, Gurruchaga, Vignoli. Enseñando una matemática mas novedosa y divertida. Revista de Educación Matemática. Vol. 6. N° 2 – (1991).

- ✓ Courant, Robbins (1971). ¿Qué es la Matemática?. Ed. Aguilar . Madrid.

- ✓ Chevallard Ives, Bosch Mariana, Gascón Josep,(1997) Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje. Barcelona, Hersori.

- ✓ Chevallard, Ives (1991) La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado. Bs. As. Aique.

- ✓ Chevallard, Yves. Bosch, M. Gascon, J. (1997). Estudiar Matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje. ICE. Horsori. Barcelona. España.

- ✓ Davini, Maria Cristina (1996) "Conflictos en la evolución de la didáctica. La demarcación entre la didáctica general y las didácticas especiales" En Camilloni y otras , Corrientes Didácticas Contemporáneas, Bs.As. Paidós.

- ✓ Dickenstein A. (2000). MATE-MAX. La matemática en todas partes. Ediciones Novedades Educativas. Argentina

- ✓ Gallastegui, J (1989). La Resolución de Problemas y la Educación Matemática: hacia una mejor interrelación entre investigación y desarrollo curricular. Enseñanza de la Ciencia. Volumen 7 (1). pp 63-71. Barcelona. España.

- ✓ Gascón, J. (1992). Que's' enten per Resolució de problemes de Matematiques?. Boix 2, 10-17.

- ✓ Gascón, J. (1993). Desarrollo del conocimiento matemático y análisis didáctico del patrón del análisis síntesis a la génesis del lenguaje algebraico. Recherches en Didactique des Mathematiques, Vol 13, N° 3, pp 295-332.

- ✓ Gascón, J. (1985). El aprendizaje de la Resolución de problemas de Planteo Algebraico. Enseñanza de las ciencias. pp 18-27. Barcelona. España.

- ✓ Gascón, J. (1994). El papel de la Resolución de Problemas en la Enseñanza de las matemáticas. Educación Matemática 6 (3)- pp 37-51.

- ✓ Gascón J. (1998 a) Evolución de la Didáctica de la Matemática como disciplina científica. (Recherches en didactique des Mathematiques) 18 (1) pp 7-34

- ✓ Gascon J. Bosch M. (1999). L' Activitat matematica algebritzada. Problems oberts. Uso interno de seminarios de Didáctica. Universidad Autónoma de Barcelona. España.

- ✓ Gascón, J (2001). Incidencia del Modelo epistemológico de las matemáticas sobre las practicas docentes. Universidad Autónoma de Barcelona. España.

- ✓ Gentile, Enzo (1987). Construcciones con regla y compás. Revista de Educación Matemática. Vol 3- N° 2 pp 3-14. Universidad Nacional de Córdoba.

- ✓ Guzmán, Miguel de (1992). Tendencias Innovadoras en Educación Matemática. Olimpiada Matemática Argentina.

- ✓ Guzmán, Miguel (1986). Aventuras Matemáticas. Labor Madrid.

- ✓ Guzmán M. , Cólera S., Salvador (1988). Matemáticas. Bachillerato (3). Editorial Anaya. Madrid. España.

- ✓ Hernández Domínguez, Josefa; Socas Robayna, Martín (1994). "Modelos de competencia para la resolución de problemas basados en los sistemas de representación en Matemática". SUMA. Revista sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. N° 16.pp 82-90. Edita: Federación Española de Sociedades de profesores de Matemática.

- ✓ Kaput J. (1996) ¿Una línea de investigación que sustente la reforma del álgebra I?. UNO Revista de didáctica de las Matemáticas N° 9 pp 85-97. Barcelona. España.

- ✓ Kaput J. (1996). Una línea de investigación que sustente la reforma del álgebra? UNO Revista de didáctica de la Matemática N° 10 pp 89-101. Barcelona. España.

- ✓ Panizza, M. Sadovsky, P. Sessa, C (1995). "Los primeros aprendizajes de las herramientas algebraicas. Cuando las letras entran en la clase de Matemática". Comunicación realizada REM. Unión Anual UMA. Córdoba.

- ✓ Piaget, J y García R. (1982). Psicogenesis e historia de la ciencia (4° edición). Siglo XXI. México.

- ✓ Sacristán Gimeno, Pérez Gómez (1995) Comprender y Transformar la enseñanza. Madrid, Morata.

- ✓ Santalo, L. (1994) La matemática: Una filosofía y una técnica. Editorial Ariel. Barcelona. España.

- ✓ Rico, Luis (Coord) (1997). La Educación matemática en la Enseñanza Secundaria. Editorial ICE.HORSORI. Barcelona. España.

- ✓ Schoenfeld, Alan H. (1991). Ideas y Tendencias en las resolución de problemas. Olimpiada Matemática Argentina.

- ✓ Relime. (2001). Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa . Vol. 4 – N°2.pp 129- 159. Clame (Comité Latinoamericano de Matemática Educativa).

- ✓ Repetto, C; Linskens, M y Fesquet, H. (1968). Aritmética y Algebra 3. Matemática Moderna. Editorial Kapelusz. Buenos Aires. Argentina.

- ✓ Carione, N; Carranza, S; Diteiro, M; Latorre, M. L; Trama, E. (1995). Matemática 3. Ediciones Santillana S.A. Buenos Aires. Argentina.

- ✓ Latorre, M.L; Spivak, L; Kacsor, P y Elizondo M. C. de (1997). Matemática 9. Ediciones Santillana S.A. Buenos Aires. Argentina.

- ✓ Andrés, M; Latorre, M. C y Machiunas, M. V (2000). Matemática 7. EGB. Ediciones Santillana S>A. Buenos Aires. Argentina.

- ✓ Kacsor, P; Schaposchnik, R; Franco, E; Cicala, R y Díaz, B. (1999). Matemática I. Ediciones Santillana S.A. Buenos Aires. Argentina.

- ✓ Vázquez de Tapia, N; Tapia de Bibiloni, A y Tapia, A. (1993). Matemática 1. Primer año del ciclo básico. Angel Estrada y Cia. S.A. Buenos Aires. Argentina.

ANEXOS

DATOS	TEMARIO	TEMA : ECUACIONES Y SISTEMAS DE ECUACIONES
latemática 3 3° Año del Secundario) utor : Noemi Carione- Susana Carranza- María Teresa Diñeiro- María Laura Latorre - Eduardo rama. ditorial : Ediciones Santillana .A. ño de edición : Enero 1995- 1° edición. npreso en Argentina.	Unidad 1 : Números Reales. Unidad 2 : Funciones (Sistema cartesiano). Unidad 3 : Proporcionalidad de segmentos (se trabaja con ecuaciones en T. de Thales y con variables x e y). Unidad 4 : Semejanzas. Semejanzas de triángulos. T. de Pitágoras. Unidad 5 : Funciones polinómicas. Operaciones. Unidad 6 : Divisibilidad con polinomios. Casos de factoreo. Unidad 7 : Expresiones algebraicas racionales (aparece el cero de una función que es una ecuación). Despejan aplicando propiedades que recuerdan de años anteriores. Unidad 8 : Trigonometría. Unidad 9 : Vectores. **Unidad 10 : Ecuaciones e Inecuaciones de 1° grado.** **Unidad 11 : Sistemas de ecuaciones lineales.** Unidad 12 : Sistemas de inecuaciones. Unidad 13 : Polígonos regulares.	Unidad 10 :Define ecuación como una igualdad a partir de una función. Ej : e(t) = 500. Resolver la ecuación es determinar t. **"Una ecuación es una igualdad en la que uno o mas valores a los que llamaremos incógnita son desconocidos".** "Llamamos solución de una ecuación a los valores de la incógnita que hacen cierta la igualdad y decimos que verifican la ecuación. Con estos valores se forma el conjunto solución". Clasifica según : el grados de una ecuación y el numero de incógnitas de una ecuación. Se limita a ecuaciones de 1° grado con una incógnita. Ceros de una función :son los valores de x que verifican la ecuación f(x) = 0 que se llama "ecuación" asociada a la función f(x). Tipos de soluciones (Todos con gráficos) * 1 solución (cdo la recta corta en 1 punto al eje x) * 2 soluciones (cdo la gráfica corta al eje x en dos puntos). * Sin solución (cdo la gráfica no corta al eje x). En un ejercicio pide un ejemplo gráfico de infinitas soluciones. Luego presenta Problemas de ecuaciones lineales. Pasos a seguir en la resolución de problemas : 1°) Determinación de incógnitas. 2°) Traducción al lenguaje simbólico el enunciado. 3°) Planteamos la ecuación. 4°) Resolvemos la ecuación. 5°) Comprobamos la solución. Formas de resolver : Encontrar una ecuación equivalente(que la define como otra con igual solución) mas fácil de resolver, mediante pasaje de términos con propiedades. **Función lineal :** $y = mx + b$ es la ecuación asociada a $mx + b = 0$. Tipos de soluciones : Unica solución : $m \neq 0$, $x = -b/m$ No tiene solución : $m = 0$, $b \neq 0$ Infinitas soluciones : $m = 0$, $b = 0$ En problemas de aplicación se analiza el valor de m para obtener los distintos tipos de solución (seria m un parámetro ?) Luego aumenta al campo a R. Estudia Inecuaciones. En cada capitulo hay problemas propuestos de Olimpiadas Matemáticas. Al final del capitulo da una serie de ejercicios para resolver con respuestas : algunos problemas y ejercicios. Unidad 11 : Con un problema de la vida diaria aparecen dos ecuaciones lineales simultáneas, ala que lama "Sistema de ecuaciones lineales" y halla las soluciones por tanteo, probando las posibles soluciones.

Sistemas equivalentes :Igual conjunto solución.

Para resolver sistemas :

1) Pasa de un sistema a otro equivalente mediante las tres operaciones elementales.

Ejemplo :

$$\begin{cases} x-y=1 \\ x+3y=5 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x-3y=3 \\ x+3y=5 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x-3y=3 \\ 4x=8 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x-3y=3 \\ x=2 \end{cases}$$

$\Rightarrow y = 1$ $\qquad$ $C = \{(2;1)\}$

2) Método de igualación. (con ejemplo)

3) Método gráfico : Intersección de rectas como funciones.

*Compatible : por tener una solución.

Determinado (1 solución).

Indeterminado (infinitas soluciones).

*Incompatible : sin solución.

4) Método de sustitución.

5) Método de reducción por suma y resta. Problemas.

6) Método de determinantes (Lo trata como un pequeño algoritmo). Ej (5)

Expresa en forma genérica el sistema y lo resuelve por reducción y varia el resultado ubicando

en posición practica de determinantes (2x2).

De allí sale $x = \frac{\Lambda x}{\Lambda}$ $\qquad$ $y = \frac{\Lambda y}{\Lambda}$

Si $\Lambda \neq 0 \Rightarrow$ solución única $\Rightarrow$ compatible $\Rightarrow$ determinado.

Si $\Delta = 0 \Rightarrow \Delta x = 0 \Rightarrow$ infinitas soluciones.

Si $\Delta = 0$ y $\Delta x \neq 0 \Rightarrow$ incompatible.

(Si bien no lo llama Cramer corresponde a ese método).

Finalmente da consejos de que métodos utilizar en cada caso.

7) Método de Gauss : Introduce la matriz. Escalona (con operaciones elementales).

Lo aconseja para sistemas de 3x3 y da un ejemplo. Hace la representación gráfica de 3x3. (No aclara que sirve para sist. no cuadrados)

Relaciona : ecuación lineal con dos incógnitas $\Rightarrow$ la recta.

ecuación lineal con tres incógnitas $\Rightarrow$ el plano.

Al final del capitulo : problemas y ejercicios de aplicación. Olimpiadas Matemáticas.

No introduce el concepto de parámetro. No justifica las transformaciones realizadas en el método de Gauss.

Nuestra Apreciación :

1 • *No se presenta definición como una teoría aparte. Va definiendo junto con el ejemplo.* (por ej. no define determinante) → "fórmula" } prox débil

2 * *No hay demostraciones.* (*)

(*) pág. 184

(5) Utiliza conceptos no def. por ej. determinante, habla de diag. principal y no definió matriz - No justifica "Cramer". -

	4	3 * *Se basa en sistema cartesiano.* No se utiliza "parámetro", ni se diferenció con incógnita - No se habla de variable dif. a indep. - No define variable
Matemática 3 A-Z Serie Plata (3° Año Secundario) Autor : Susana Engleberg - Stella Stella Pedemonti - Susana Semino. Editorial : A-Z editora S. A. Argentina. Año Edición : Marzo 1995. 1° edición.	Unidad 1 : 1.1 : Conjuntos numéricos. 1.2 : Polinomios. 1.3 : Proporcionalidad de segmentos (aparecen ecuaciones). Unidad 2 : 2.1 : Estadísticas. Funciones. (a partir de relaciones conjuntistas y cartesian0) 2.2 : Funciones especiales (de 1° y 2° grado). Unidad 3 : 3.1 : Semejanza (Pitágoras. Aparecen ecuaciones sin mencionarlas). 3.2 : **Ecuaciones.** Unidad 4 : 4.1 : Divisibilidad y factorización de polinomios. 4.2 Fracciones y ecuaciones racionales. Unidad 5 : 5.1 : **Sistemas de ecuaciones**. 5.2 : Inecuaciones. Unidad 6 : 6.1 : Razones trigonométricas. 6.2 :Vectores en el plano. 6.3 : Polígonos regulares y figuras circulares.	3.2 : Ecuaciones : No define la ecuación, dice hallar la raíz de una función polinomica f(x) es resolver la ecuación f(x) = 0. Gráfica : Ecuaciones equivalentes. Habla de : ecuación incompatible : no existe solución ecuación indeterminada : infinitas soluciones. Resolución : traspone términos al 1° miembro, conmutando y asociando (confunde propiedades). Da muchos ejercicios. Luego da función de 2° grado. 4.2 : Función racional : hallar la raíz de función racional es resolver la ecuación racional f(x0 = 0. Da ejercicios largos de ecuaciones racionales. 5 : Sistemas de Ecuaciones : Con ejemplo de polinomios con una indeterminada y de 1° grado, luego con 2 indeterminadas de 1° grado. Hallar sus ceros es resolver la ecuación de 1° grado con 2 incógnitas y lo asocia a la recta. Sistemas de ecuaciones : plantea un problema y presenta el sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas. Solución : 1 par ordenado : sistema compatible. Infinitos pares : sistema indeterminado (no pone el conjunto solución). No existen pares : sistema incompatible. Presenta ejercicios y problemas para resolver buscando pares gráficamente que verifiquen. Resolución analítica : 1) Propiedades de sistemas de ecuaciones que permiten hallar analíticamente la solución : sistema equivalente. Habla de mecanismos para resolver sistemas (serian las operaciones de suma y resta de ecuaciones y despejar y reemplazar). De acuerdo al mecanismo empleado se utiliza los métodos. A) Método de reducción por suma y resta. B) Método de Igualación. C) Método de sustitución.

		D) Método de determinante o de Cramer ; por suma y resta llega a Cramer. E) Método de eliminación de Gauss. USA SIN DEFINIR MATRICES (2x2) y (3x3) Generaliza. No aclara el alcance de los métodos (sistemas no cuadrados) Da dos problemas y todos ejercicios. *OBSERVACIONES :* *1) En la primera hoja del libro, en conjunto numérico, habla de ecuaciones que origina Z.* *2) Se trabaja todo con guía tipos cartillas para completar. Trabaja el alumno.* *3) Al finalizar cada subunidad hay una guía de integración con ejercicios terribles de ecuaciones, no solo lineales. Ejercicios de practica y autoevaluación.* *4) Al iniciar alguna guía hace referencias históricas y preguntas sobre el texto.* *5) En el tema función no nombra ecuación. Mezcla todos.* *6) Da pocos problemas. Muchos ejercicios.* *7) No abre el campo a otros problemas. (Por ejemplo no define matriz y la usa).*
Matemática 3 - 3° año del secundario Autor : Norma Camus - Lucas Masara. Editorial : AIQUE Edición : 1° edición de 1994 Impreso en Argentina	Trabaja todo en sistema cartesiano. Capitulo 1 : Preparando el camino Se empieza con un problema físico por lo general y de allí usa los temas pero no da teoría. Trata temas de geometría áreas, unidades. Utiliza el cuadrado de un binomio. Aparecen ecuaciones sin definirlas y sin dar métodos de resolución. Aparecen ejercicios con el enunciado : resuelva ecuaciones. Luego da los temas de modulo, intervalo, área del circulo, el numero pi. Con todo esto redondea los Reales. Da ejercicios de modulo. Propiedad distributiva. Ejercicios combinados con potencias. Al final de cada capitulo, da una historia y curiosidades. Capitulo 2 : Funciones Empieza con una actividad en grupo. Define función. Dominio.	Capitulo 6 : **Ecuaciones y sistemas** Plantea con problemas del planeta génesis y vuelve sobre polinomios y problemas de velocidad. Nombra ecuaciones sin definirla y no da métodos de resolución. Completa cuadrados y se ayuda con gráficos. Da ejercicios. Con dos ejemplos muestra solución única y la no existencia de solución en cuadrática. A sistema lo da con dos ejemplos. Usa mucha gráfica. No explica ningún método, tampoco menciona para resolver los sistemas. Historias y curiosidades. Capitulo 7 : **Sistemas de ecuaciones** Da el tema de transformaciones lineales muy poco claro. Determinante. Método de suma y resta para resolver sistemas de 2x2. (Cramer) como un método sin nombrarlo. Presenta los tres tipos de soluciones con ejemplos. Ejercicios. Aparecen inecuaciones y ejercicios. Algo de investigación operativa. Historia y curiosidades. *Nuestras apreciaciones :* • *Poco claro para el alumno.* • *Desordenado (por ejemplo aparecen sistemas de ecuaciones en el capitulo de*

1) [illegible]

	Problemas de la vida. Máximos y mínimo. Da problemas. Función biyectiva. Problemas con gráficos. Al final da una historia y curiosidades. Capitulo 3 : Funciones Polinómicas Comienza con un problema de velocidad. Gráficos de funciones de tiempo y espacio y da la formula de la función lineal *y = bx + a*. Define pendiente como $\Delta y/\Delta x$. Da problemas. Define función cuadrática. Da ejercicios de representar gráficamente funciones lineales y cuadráticas y las llama funciones polinómicas. No define polinomio. Sigue con polinomios : "A la función cuya formula es un polinomio se la llama función polinómica". Luego da operaciones con polinomios en forma gráfica (suma). División da ejemplos como los números. Luego da ejercicios. Da los ceros de una función polinomica. Regla de Ruffini. Teorema del resto. Ejercicios. Al final da la historia y curiosidades. Capitulo 4 : Divisibilidad de polinomios. Factoreo usando división. (no nombra los seis casos). Da ejercicios de factorización. Historia y curiosidades. Capitulo 5 : Vectores Magnitudes escalares y vectoriales.	*inecuaciones).* • *No hay definiciones claras, ni conclusiones claras.* • *En el tema sistemas de ecuaciones no se ve bien los métodos. Solo se da el método de suma y resta y de determinantes.*

	Suma, producto por un numero real. Descomposición en el plano. Coordenadas polares. Ecuación vectorial de la recta. Ejercicios. Historia y curiosidades. <u>Capitulo 6</u> : **Ecuaciones y sistemas** <u>Capitulo 7</u> : Sistema de inecuaciones (usa matrices). <u>Capitulo 8</u> : Funciones trigonométrica. <u>Capitulo 9</u> : Semejanza de triángulos. <u>Capitulo 10</u> : Mas trigonometría. <u>Capitulo 11</u> : Estadística y probabilidades.	
latemática 9 ercer Ciclo E.G.B <u>utor</u> : Susana Englebert - Stella Pedemonti -Susana Semino. <u>ditorial</u> : A-Z Editora S.A - rgentina. <u>ño de edición</u> : 1997 - 1° edición.	<u>Unidad 1</u> : Números y mas números NO USA SIMBOLOS. Conjunto de los números reales. Error. <u>Unidad 2</u> : Operaciones sin urgencias. Operaciones en los R. (Potencia, raíz cuadrada, factor común, igualdades). **Ecuaciones.** <u>Unidad 3</u> : Hoy... gran función ! ! Muestra funciones en lenguaje coloquial, con tablas, con gráficos o con fórmulas. Estas relaciones las llamas funciones.	<u>Unidad 2</u> : **Ecuaciones** Define primero **identidad** : "igualdades que se verifican para cualquier valor de sus letras" Por ejemplo : $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. **<u>Ecuación</u>** : "igualdad que no se verifica para cualquier valor que se asigne a su letra". Por ejemplo : $x + 7 = 4$ $b - c = 12$ $x^2 + 1 = 10$ Da sucesiones. No hay ejercicios de ecuaciones. <u>Unidad 4</u> : **Sistemas de ecuaciones.** Inicia el tema trabajando en grupo con problemas físico , de encuentro. La resolución de ecuaciones la explica mediante la trasposicion (equilibrio de la balanza : se despeja x con operaciones elementales). En símbolos presenta a una ecuación como $ax + b = 0$. Da ejemplos y ejercicios de resolver ecuaciones y 1 problema. Luego da Inecuaciones lineales.

	Da funciones crecientes y decrecientes, pero solo gráficamente. No usa símbolos. Define función continua : si no se levanta el lápiz del papel. Define función discontinua : si se levanta el lápiz del papel. No hay definición con símbolos. Define función trigonométrica. Define función lineal (como las que son gráficas de rectas o parte de ellas). Y = kx + b. Pide graficar. Luego da función directamente proporcional (rectas por el origen). Función cuadrática. Proporcionalidad inversa (a través de tabla). Función exponencial. Problemas con gráficos. Da ejemplos y problemas de integración. <u>Unidad 4</u> : Despejando dudas. **Ecuaciones e inecuaciones de 1°grado con una incógnita. Sistemas de ecuaciones e inecuaciones de 1° grado con una incógnita.** <u>Unidad 5</u> : Navegando por el plano. Vectores. Simetrías. Rotaciones y traslaciones. Razones trigonométricas. <u>Unidad 6</u> : Un espacio para todos. Figuras cuerpos. Propiedades. Construcciones. <u>Unidad 7</u> : Hecho a medida. Areas de figuras y cuerpos. Volúmenes. Relaciones. Perímetro. Areas y Volúmenes. <u>Unidad 8</u> : Estadísticas que engañan ... pero no mienten.	Al tema de **Sistemas de ecuaciones de 1° grado,** parte con un ejemplo de sistema de 2x2. Lo resuelve gráficamente : 1 solución, sistema compatible determinado. Infinitas soluciones, sistema compatible indeterminado. No existe solución, sistema incompatible. Luego da un ejemplo de sistema mixto. Los métodos de resolución : solo sustitución e igualación. Da ejercicios. Luego da Inecuaciones. Sistemas y ejercicios. <u>Observaciones</u> : • *Trabaja en grupo.* • *Diferencia identidad de ecuaciones.* • *No usa símbolos. No hay un rigor en las definiciones.* Prax débil • *Define groseramente el concepto de función continua y discontinua, todo a partir de gráficos. Lo mismo hace para trigonometría : define seno a partir de ejemplos de una vaquita que gira 360° , de allí habla de función sinusoidal.*

	Estadística. Parámetros. Distribución binomial. Al final tiene los resultados de los ejercicios propuestos.	
Matemática 9 Para E.G.B <u>Autor</u> ; Ma. Laura Latorre - Laura Spivak - Pablo Kaczor - Maria de Lizondo. <u>Editorial</u> : Ediciones Santillana S.A <u>Año de edición</u> ; 1998 - 1° edic. Argentina	<u>Unidad 1</u> : Números reales. Operaciones. <u>Unidad 2</u> : Vectores. Operaciones. <u>Unidad 3</u> : Expresiones algebraicas. Lenguaje simbólico. Operaciones. Factor común. Diferencia de cuadrados. Cuadrado de un binomio. <u>Unidad 4</u> : **Ecuaciones** e inecuaciones. **Sistemas de ecuaciones.** <u>Unidad 5</u> : Geometría y mediciones. Rectas. Angulos. Circunferencia. SIMELA. <u>Unidad 6</u> : Movimientos y proporcionalidad geométrica. Semejanzas de triángulos. Teorema de Thales. <u>Unidad 7</u> : Trigonometría. Razones y ecuaciones trigonométricas. Resolución de triángulos rectángulos. <u>Unidad 8</u> : Funciones : lineal, cuadrática, exponencial. Periódicas : seno. <u>Unidad 9</u> : Combinatoria. Probabilidades y estadística.	<u>Unidad 4</u> : **Ecuaciones. Sistemas de ecuaciones.** Contenidos. Ecuaciones con una incógnita. Interpretación de problemas. Inecuaciones con una incógnita. Intervalos en los reales. Sistemas de ecuaciones de 2x2. Clasificación de sistemas de ecuaciones lineales. Problemas con sistemas de ecuaciones. Define ecuación : es una igualdad que contiene por lo menos una incógnita. Las incógnitas son los valores que hay que averiguar y las representamos con letras. Resolver es hallar el valor de la incógnita que hace verdadera la igualdad. Plantea un ejemplo con la balanza para cada tipo de solución (única, infinitas y ninguna). • Presenta pautas para resolver ecuaciones (con un ejemplo de 2° grado). Operaciones elementales, define ecuación equivalente. Pasaje de términos como reglas a partir del uso de propiedades. Da un ejemplo completo con una ecuación de 2° grado. La resuelve con pasaje de términos y verifica. Luego plantea 4 ejercicios para resolver ecuaciones de 2° grado (se cancela el termino cuadrático). ~~[illegible]~~ presenta la resol. a partir de una cuadrática que se [illegible] • Interpretación de problemas : Las ecuaciones nos permiten resolver los problemas. Plantea un problema, interpreta los datos y resuelve la ecuación y comprueba. • Presenta 3 problemas a resolver. Tema inecuaciones. Tema : **Sistemas de 2 ecuaciones con 2 incógnitas (lineal)** Inicia el tema con un problema y plantea el sistema y luego presenta métodos de resolución.

1°) M. Sustitución : lo resuelve con este método y comprueba.
2°) M. igualación : resuelve el mismo problema y comprueba.
Presenta 4 ejercicios de sistema para resolver.
3°) interpretación gráfica : Despeja "y" de dos ecuaciones y gráfica las funciones y saca la solución gráfica. pero sin haber [illegible] previamente el tema fn [illegible] se ve en el Cap. [illegible]

Clasificación de los sistemas.

Caso	Clase de sistema
• Solución única	Compatible determinado
• Infinitas soluciones	Compatible indeterminado
• Ninguna solución	Incompatible

Da para ejercitarse 4 sistemas.

En problemas : da uno, lo plantea y lo resuelve. Presenta 4 problemas a resolver.

Ejercitación final de la unidad : 4 ecuaciones ; 2 sistemas y 1 problema.

Observaciones :

- *El libro presenta al final una carpeta de actividades para cada unidad.*
- *En la Unidad 4 comienza con un machete, resumen para completar por el alumno.*
- *Aplicaciones : 4 ecuaciones ; 3 sistemas ; 3 problemas y 1 problema de ecología.*
- *Actividad integradora : problemas de encuentro (física).*
  1 problema de sistemas de edades.
- En gral en la ejercitación se tiende a aplicar las reglas enseñadas.

Observaciones (1) Ecuación sin concepto de fn. (pág 51-). Resoluc. gráfica de sist. sin ver fn. Nombra "fórmula" sin definir.
2) menos métodos que el anterior
3) No hay situac. problemática inicial para el alumno

ANALISIS DE ARGUMENTACION EN LIBROS DE TEXTOS (Secundario) EN LOS TEMAS FUNCION LINEAL, ECUACIONES Y SIST. DE ECUACIONES

LIBRO	TEMAS	TEMAS NO JUSTIFICADOS	JUSTIFICACIONES Y TIPOS DE JUSTIFICACIONES
1- **Matemática 3** (3° Año Secundario) <u>Autor</u>: Noemi Carione; Susana Carranza; María Teresa Diñeiro; María Luz Latorre y Eduardo Trama <u>Editorial</u>: Ediciones Santillana S.A <u>Año edición</u>: Enero 1995 1° edición Impreso en Argentina	▪ Las ecuaciones y las funciones. ▪ Tipos de ecuaciones. ▪ Ceros o raíces de una función ▪ Las ecuaciones resuelven problemas. ▪ ¿Cómo hallamos la solución de una ecuación? ▪ Soluciones de una ecuación de primer grado, con una incógnita. ▪ Ecuaciones racionales. ▪ Sistemas equivalentes. ▪ Método de igualación. ▪ Método gráfico. Clasificación de sistemas. ▪ Método de sustitución, ▪ Método de reducción por sumas o restas. ▪ Método de determinante. ▪ Eligiendo el método mas adecuado. . . ▪ Método de Gauss.	- Para obtener una ecuación equivalente a una dada podemos: • *Sumar o restar un mismo numero a los dos miembros de la ecuación.* • *Multiplicar o dividir los dos miembros de la ecuación por un mismo numero distinto de cero.* - En resolución de sistemas de 2x2: • *Si en un sistema de ecuaciones se permutan dos ecuaciones, se obtiene un sistema equivalente al primero.* • *Si una ecuación de un sistema se multiplica por un numero real no nulo, se obtiene un sistema equivalente al primero.* • *Si una ecuación de un sistema se sustituye por la suma de ella con otra ecuación del sistema, multiplicada por un sistema, multiplicada por un numero no nulo, se obtiene un sistema equivalente al primero.* - Habla de sistemas de mas de 2 ecuaciones pero no justifica el método de determinantes.	- En el método de determinantes para resolver un sistema de 2x2, se justifica como se obtiene la formula para obtener “x” e “y”. Hay una demostración deductiva solo para el caso de 2x2. - En el método de Gauss, se justifica deductivamente a partir de un ejemplo, pero no se generaliza (no utiliza letras para una demostración general). - Para la representación gráfica de una función lineal con 3 incógnitas que tiene infinitas soluciones lo describe como puntos de un plano incluido en el espacio. Por analogía de lo que ocurre con sistemas de 2 ecuaciones que tiene infinitas soluciones son puntos de una recta incluidos en el plano. Justificación no deductiva por analogía. - Gráficamente hace analogía lo que ocurre con las rectas. - Falta justiciar gráfica de planos con sus ecuaciones.

2- Matemática 3 A-Z Serie Plata (3° año secundario) Autor: Susana Engleberg; Stella Pedemonti; Susana Semino. Editorial: A-Z editora S.A Argentina Año edición: Marzo 1995 1° edición	Unidad 3 ▪ Ecuaciones ▪ Ecuaciones de 1° grado ▪ Ecuaciones equivalentes ▪ Resolución de ecuaciones de 1° grado. Unidad 5 ▪ Sistemas de ecuaciones con 2 incógnitas ▪ Solución gráfica ▪ Sistemas de ecuaciones compatibles ▪ Sistemas de ecuaciones indeterminados. ▪ Sistemas de ecuaciones incompatibles ▪ Método de reducción por suma y resta. ▪ Método de igualación ▪ Método de sustitución ▪ Método de determinantes ▪ Método de eliminación de Gauss.	- En resolución de ecuaciones lineales, habla de "transponer" términos, pero no justifica con propiedad uniforme. - En el método de Gauss, utiliza matrices y no define lo que es una matriz.	- A partir de un ejemplo hace una justificación deductiva para obtener un sistema equivalente a partir de otro. No generaliza. - En el método de determinantes hay una demostración deductiva solo para sistemas de 2x2. No generaliza. - Para el método de Gauss, justifica a partir de un ejemplo.
3- **Matemática 3** 3° año secundario Autor: Norma Camus ; Lucas Masara. Editorial: AIQUE Edición: 1° edición de 1994 Impreso en Argentina	▪ Función polinómica. ▪ Ecuación cuadrática. ▪ Función lineal, representación gráfica. ▪ Sistemas de ecuaciones de 2x2.	- En esta unidad NO HAY NINGUN TIPO DE JUSTIFICACION (definiciones ni demostraciones) - Todo lo hace a partir de ejemplos, sin establecer métodos de resolución. - Las ecuaciones que presenta son cuadráticas y completa cuadrados para resolverlas. - Para el tema sistema de ecuaciones, no define y la hace con un ejemplo que conduce a la ecuación cuadrática.	- Solo para sistemas de 2x2, justifica deductivamente.

		- Da ejemplos de matrices. Trabaja con suma de matrices y producto de un escalar por una matriz, luego expresa un sistema en forma matricial, pero no resuelve el sistema con matrices. - Presenta los métodos, no indica el nombre ni los justifica. - No menciona propiedades para resolver las ecuaciones y sistemas de ecuaciones. - Habla de "estrategias mas cómodas de resolución", pero no explica.	
4- **Matemática 9** Tercer Ciclo E.G.B <u>Autor</u>: Susana Englebert; Stella Pedemonti; Susana Semino. <u>Editorial</u>: A-Z Editora S.A Argentina. <u>Año de edición</u>: 1997 1° edición.	▪ Ecuaciones de primer grado con una incógnita. ▪ Método de transposición. ▪ Ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. ▪ Sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas. Resolución gráfica. ▪ Sistemas compatibles, determinado e indeterminado. ▪ Método de sustitución. ▪ Método de igualación. ▪ Sistemas de ecuaciones con dos incógnitas.	- Habla de reglas: • *Si se suma o se resta un mismo numero o expresión algebraica a ambos miembros de una ecuación, se obtiene una ecuación equivalente a la dada.* • *Si se multiplica o se divide por un mismo numero o expresión algebraica (distinta de cero) a ambos miembros de una ecuación, se obtiene una ecuación equivalente a la dada.* - No tiene definiciones ni demostraciones. - Lo que hace lo presenta con un ejemplo.	- El método de resolución gráfica explicado mediante ejemplos.

5- Matemática 9 Para E.G.B <u>Autor</u>: Laura Latorre; Laura Spivak; Pablo kaczor; Maria de Lizondo. <u>Editorial</u>: Ediciones Santillana S.A. <u>Año de edición</u>: 1998 – 1° edición – Argentina.	▪ Ecuaciones. ▪ Ecuaciones son una incógnita. ▪ Interpretación de problemas. ▪ Sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas. ▪ Clasificación de sistemas de ecuaciones lineales. ▪ Problemas con sistemas de ecuaciones.	- Presenta "pautas" para resolver ecuaciones, que no las justifica: • *Las ecuaciones que tienen la misma solución se llaman equivalentes.* • *Si a los dos miembros de una ecuación se les suma o resta un mismo numero, o se los multiplica o divide por un mismo numero distinto de cero, resulta otra ecuación que es equivalente.* • *Un termino que esta sumando en un miembro puede pasar restando al otro y viceversa.* • *Un factor que multiplica a todo un miembro puede pasar dividiendo a todo el otro miembro y viceversa.* • *Además solo se puede sumar o restar los términos que son semejantes.* - Teoría muy pobre.	- Pasaje de términos que lo justifica con las "pautas" y con propiedades de las operaciones (justificación deductiva). - A partir de un ejemplo, justifica el método de sustitución e igualación. - Presenta la interpretación gráfica con ejemplos.

<u>OBSERVACIONES:</u>

- ✓ Se observa que en los libros en general es muy pobre el marco teórico en el desarrollo de los temas ecuaciones y sistemas de ecuaciones.
- ✓ Las pocas justificaciones que aparecen son de carácter deductivo, pero en general a partir de ejemplos.
- ✓ No se generaliza (poca utilización de letras) y muy pobre la utilización de simbología.
- ✓ No se observan justificaciones de carácter inductivo.

PREGUNTAS:

- ✓ ¿Será que las cajas curriculares no exigen ninguna justificación, ni demostración?
- ✓ ¿Por eso será que los autores no consideran las demostraciones ni justificaciones?.

- ✓ **Análisis Libro "Matemática 7" – Ed. Santillana –**
- ✓ **Primera Edición: marzo 1997**
- ✓ **Autores: Raquel Alonso – Susana Carranza – María de la C. Vicente Almazan**

✓ Unidad	✓ Contenidos	✓ Observaciones	✓ Campo de problemas	✓ Técnica	✓ Momento
✓ 1.- "Los números Naturales"	✓ Una compra dudosa	✓ Introduce los números naturales con el ejemplo de un cuenta kilómetros	✓	✓	✓
✓	✓ Sistema de numeración decimal	✓ Muestra que el sistema numérico decimal es posicional	✓	✓ Combinación de sumas y productos. ✓ Utilizando potencias de diez	✓
✓	✓ Descomposición de un número en potencias de 10	✓ Presenta un ejemplo de descomposición del nº 35467. ✓ Aparece una actividad para descomponer en potencias de 10	✓ Numérico	✓	✓
✓	✓ Sistema de numeración binario	✓ Introduce el tema con un cuenta km en base binaria y como actividad pasar del sistema decimal al binario como en el cuenta km.	✓ Numérico	✓	✓
✓	✓ Pasaje del sistema decimal al binario	✓ Presenta una técnica para dicho pasaje (dividir por dos sucesivamente). ✓ Hay 2 ejercicios de pasaje	✓ Numérico	✓	✓
✓	✓ Pasaje del sistema binario al decimal	✓ Muestra como descomponer números en potencias de base 2. ✓ Hay 2 actividades para pasar de binario a decimal	✓ Numérico	✓	✓
✓	✓ Sistemas numéricos no posicionales	✓ Presenta un papiro egipcio como ejemplo de numeración no posicional. ✓ Hay una actividad de pasaje de nº egipcio a nº decimal	✓ Numérico	✓	✓

✓	✓ Orden en Z	✓ Trabaja con problema de temperaturas. ✓ Si dos números son positivos, el mayor es el que tiene mayor valor absoluto, es decir el que está mas lejos de cero. ✓ Todo numero positivo es mayor que cero. ✓ El cero es mayor que cualquier numero negativo. ✓ Si dos números son negativos, el mayor es el que tiene menor valor absoluto, es decir el que esta mas cerca de cero.	✓ Da una actividad numérica.	✓	✓
✓	✓ Adición de números enteros ✓ La adición en la recta numérica ✓ Sustracción de números enteros	✓ Introduce el tema con depósitos en una cuenta bancaria. ✓ La suma de dos o mas números enteros positivos es otro numero entero positivo, cuyo valor absoluto es la suma de los valores absolutos de los sumandos. ✓ La suma de dos o mas números enteros negativos, es otro numero entero negativo, cuyo valor absoluto es la suma de los valores absolutos de los sumandos. ✓ La suma de dos números enteros de distinto signo es otro numero entero, cuyo valor absoluto de los números dados y cuyo signo es el del numero de mayor valor absoluto. ✓ La suma de dos números opuestos es cero. ✓ En la recta explica que si el numero es positivo nos desplazamos hacia la derecha, y si es negativo nos desplazamos hacia la izquierda.	✓ Da dos actividades numéricas	✓	✓

✓	✓ Simetría axial	✓ Utilizando hojas de árbol se muestra el eje de simetría axial. Luego se traza un triángulo simétrico a otro respecto a un eje. ✓ Como actividad se debe reconocer entre 5 figuras las que sean simétricas respecto de algún eje.	✓ Geométrico	✓ Trazado con escuadra	✓
✓	✓ Mediatriz de un segmento	✓ Mediante doblez en hoja de papel de calcar presenta la mediatriz de un triángulo. Luego define mediatriz de un segmento.	✓ Geométrico	✓ Doblez de papeles	✓
✓	✓ Bisectriz de un ángulo	✓ Mediante doblez en hoja de calcar presenta la bisectriz de un ángulo. ✓ Como actividad presenta un problema de distancias.	✓ Geométrico	✓ Doblez de hojas	✓
✓	✓ Rotación o giro	✓ Se presenta la rotación de un molinete realizado con cartulina y luego se define centro de rotación y ángulo de rotación. Como actividad se presentan 3 figuras rotadas para que se encuentre el centro y se mida el ángulo de giro	✓ Geométrico	✓ Construcción geométrica con cartulina.	✓
✓	✓ Simetría central	✓ Con 5 dibujos se muestra lo que es un centro de simetría y se define simetría central	✓ Geométrico	✓	✓
✓	✓ Traslación	✓ Se presenta la traslación con el movimiento en línea recta de un auto. ✓ Las traslaciones se indican por medio de un segmento orientado, para ello se muestra un triángulo trasladado.	✓	✓	✓
✓	✓ Caleidoscopio	✓ Se define un caleidoscopio y se muestra como se lo construye para ver los ejes de simetría que aparecen. ✓ Como actividad presenta 6 señales de tránsito para marcar ejes y centros de simetría.	✓ Geométrico	✓ Construcción y reconocimiento	✓

✓	✓ Propiedades distributivas de la potenciación ✓ La potenciación y la adición ✓ La potenciación y la sustracción	✓ La potenciación es distributiva respecto de la multiplicación: ✓ $(a.b.c)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n$ ✓ La potenciación distribuye a la división: $(a:b)^n = a^n : b^n$ ✓ La potenciación no se distribuye respecto de la adición. ✓ La potenciación tampoco es distributiva respecto de la sustracción.	✓ Da dos actividades ✓ -Una para completar con $=$ y $\neq$. ✓ - Otra para calcular potencias.	✓ Operaciones numéricas	✓
✓	✓ Producto de potencia de igual base ✓ Cociente de potencias de igual base	✓ Para multiplicar potencias de igual base, escribimos la misma base y sumamos los exponentes. ✓ Para dividir potencias de igual base, escribimos la misma base y restamos los exponentes.	✓ Da una sola actividad para aplicar estas propiedades.	✓ Operaciones	✓
✓	✓ Raíz cuadrada ✓ Raíz cubica ✓ Propiedades distributivas de la radicación	✓ Para hallar la raíz cuadrada de un numero, buscamos el numero no negativo que elevado al cuadrado, nos de el primer numero. ✓ La radicación es la operación inversa de la potenciación. ✓ Para hallar la raíz cubica de un numero se debe encontrar otro numero que, elevado al cubo, nos de el primer numero. ✓ La radicación es distributiva respecto de la multiplicación. ✓ La radicación es también distributiva respecto de la división.	✓ Da una actividad para que practiquen extraer raíz cuadrada y cubica. ✓ Da dos actividades para que apliquen las propiedades.	✓ Operaciones numéricas	✓

✓ 5.- "Divisibilidad"	✓ ¿Mamá adivina?	✓ Introduce el tema con un ejemplo de la vida diaria (compra de lapiceras)	✓	✓	✓
✓	✓ Múltiplos y divisores de un número natural	✓ Dá un ejemplo de múltiplo y define multiplo y divisor con la notación ✓ a = b (a es múltiplo de b) y b / a (b es divisor de a). ✓ El cero es múltiplo de todos y todos son divisores del cero. ✓ Aclara que no se puede dividir por cero. ✓ Como actividad se debe factoriza un número de distintas formas.	✓ Numérica	✓	✓
✓	✓ Criterios de divisibilidad	✓ Con un ejemplo de la vida cotidiana muestra la necesidad de conocer criterios de divisibilidad. Luego enuncia los criterios. ✓ Como actividad presenta ejercicios numéricos	✓ Numérico	✓ Utilización de criterios	✓
✓	✓ Números primos y compuestos	✓ Como ejemplo muestra que 7 es primo y 6 es compuesto y luego define n° primo y n° compuesto. ✓ Como actividad se debe confeccionar la Criba de Eratóstenes (dá las reglas) para encontrar los primos del 1 al 100	✓ Numérico	✓ Aplicación de criterios de divisibilidad	✓
✓	✓ Descomposición de un número en sus factores primos	✓ Con la descomposición de un número mediante un diagrama de árbol encuentra los factores primos, y aclara que esa descomposición es única. Luego dá pasos a seguir (regla práctica) para descomponer un número en sus factores primos. ✓ Como actividad se debe descomponer 5 numéros en sus factores primos con la regla práctica y otro con el diagrama de árbol.	✓ Numérico	✓ Diagrama de árbol ✓ Regla práctica de descomposición	✓

✓ 6- Los números racionales y sus operaciones	✓ Números en la heladera ✓ Las fracciones y los números decimales ✓ Fracciones y números decimales equivalentes	✓ Cuando la división no es exacta, el cociente entre dos números enteros se puede expresar con un numero fraccionario. ✓ Los números enteros y los números fraccionarios se llaman números racionales. ✓ Las fracciones que se pueden transformar en fracciones decimales expresan números decimales exactos. ✓ Las fracciones que no se pueden transformar en fracciones decimales expresan números decimales periódicos. ✓ Para hallar números decimales equivalentes a otro, escribimos o eliminamos ceros a la derecha en la parte decimal de ese numero.	✓ Da una sola actividad de numeros decimales y fracciones	✓ Observacion	✓

✓	✓ Ecuaciones con números racionales	✓ Recuerda algunas propiedades con ejemplos, enuncia un problema: " Durante la mañana, se llenó la cuarta parte de la piscina de un club, durante la tarde se llenaron las dos quintas partes y aun faltan 116 litros para llenarla completamente. ¿¿Cuáles la capacidad de la piscina?". ✓ * La expresa simbólicamente y luego agrupa en un solo miembro los términos que contiene la incógnita, y opera.	✓ Da dos ecuaciones para resolver	✓ Operaciones numéricas.	✓
✓	✓ Caleidoscopio	✓ Una actividad es una sucesión con fracciones. ✓ Otra actividad es numérica y una tercera también es numérica.	✓ Solo operatoria	✓ Operaciones numéricas	✓
✓ 7.- "Potenciación y radicación de números racionales	✓ Una torta muy grande para Tomasa	✓ Con un ejemplo de la vida diaria (torta) llega al concepto de potencia (sin definir formalmente con letras)	✓	✓	✓
✓	✓ Cuadrado de un número fraccionario	✓ Con un ejemplo geométrico explica como se encuentra el cuadrado de una fracción	✓ Numérico-Geométrico	✓ Utilización de superficies geométricas	✓
✓	✓ Cubo de un número fraccionario	✓ Con un ejemplo geométrico explica como se encuentra el cubo de una fracción. ✓ Como actividad pide calcular 4 potencias de fracciones, y resolver operaciones combinadas de dos formas distintas	✓ Numérico-Geométrico ✓ Numérico	✓ Utilización de volúmenes ✓ Aplicación de leyes distributivas	✓
✓	✓ Notación científica	✓ Escribe en forma abreviada la velocidad de la luz para introducir la notación científica	✓	✓	✓
✓	✓ Uso de la calculadora científica	✓ Con un ejemplo manual y con la calculadora muestra el manejo de la misma. ✓ Como actividad pide expresar tres números en notación científica	✓ Numérico	✓	✓

✓ 8- Los cuerpos y sus areas	✓ Hay que ahorrar! ✓ Clasificación de los cuerpos ✓ Poliedros ✓ Cuerpos de rotación ✓ Prismas ✓ Pirámides ✓ Desarrollo y áreas lateral y total de un prisma	✓ Parte con un problemita para calcular superficie de una pared. ✓ Presenta distintos envases y los clasificas en cuerpos poliédricos o poliedros y cuerpos de rotación. ✓ Un cuerpo es poliedro cuando tiene todas sus caras planas. ✓ Los cuerpos de rotación son los que se generan mediante la rotación o giro de una figura alrededor de un eje. ✓ Un prisma es regular cuando sus bases son polígonos regulares y sus caras son rectángulos iguales. ✓ Una pirámide es el poliedro en el cual todas las caras, menos una tienen un vértice en común. ✓ El área lateral de un prisma es igual al perímetro de la base por la altura del prisma. ✓ El área total del prisma es igual al área lateral mas las áreas de las dos bases.	✓ Presenta solo tres actividades para calculo de áreas	✓ Operaciones numericas.	✓

✓	✓ Cálculo de un elemento de la proporción	✓ Muestra como se utiliza la propiedad fundamental para encontrar los elementos de la proporción. ✓ Como actividad presenta: ✓ - calcular el medio de una proporción ✓ - escribir como razones 4 ✓ informaciones ✓ - calcular extremos o medios de tres ✓ proporciones ✓ - inventar proporciones y cambiar el ✓ orden para ver si obtienen otras ✓ proporciones ✓ Nota: a pesar de usar las ecuaciones (con incógnita n) en las proporciones, no se relaciona los temas.	✓ Algebráico ✓ Numérico	✓ Aplicar propiedad fundamental	✓
✓	✓ Magnitudes directamente proporcionales	✓ Con un ejemplo de compras en el Supermercado muestra que el importe es directamente proporcional al peso. ✓ Define magnitud directamente proporcional cuando la razón entre ellas es constante. ✓ Como actividad presenta para comparar cantidades que son directamente proporcionales	✓ Numérico	✓	✓
✓	✓ Problema de regla de tres simple	✓ Elige dos magnitudes directamente proporcionales. Realiza una tabla con lcantidades de copias que hace una impresora en un tiempo determinado para averiguar el tiempo que demora para otra cantidad de copias	✓ Numérico	✓ Aplicación de propiedades de magnitudes proporcionales y propiedad fundamental ✓ Para regla de tres simple	✓
✓	✓ Porcentajes	✓ Presenta el porcentaje como una razón con denominador 100. Da un ejemplo numérico. Como actividad pide calcular mentalmente dos porcentajes	✓	✓	✓

✓	✓ Proporcionalidad inversa y geometría	✓ Presenta un ejemplo donde se observa que la base y altura de un rectángulo que mantiene el área, son inversamente proporcionales. ✓ Como actividad se presenta un problema para aplicar regla de tres simple	✓ Geométrico	✓ Regla de tres simple	✓
✓	✓ Regla de tres compuesta	✓ Se opresenta como los problemas donde intervienen 3 o mas magnitudes que se resuelven como varios problemas de regla de tres simple. Se da un ejemplo de la vida cotidiana. Como actividad se presenta un problema de regla de tres compuesta.	✓ Numérico	✓ Regla de tres compuesta	✓
✓	✓ Más regla de tres compuesta	✓ Se presenta un problema de regla de tres compuesta mixto. ✓ Como actividad: 2 problemas de regla de tres compuesta	✓ Numérico	✓ Regla de tres	✓
✓	✓ Interés simple	✓ Define interés y muestra que es directamente proporcional al capital y al tiempo: ✓ I = C.R.T / 100 u.t ✓ Como actividad pide despejar de ✓ la fórmula I, C, R y T	✓	✓	✓
✓	✓ Caleidoscopio	✓ Presenta un problema de compra de terreno. ✓ Educación para el consumidor: un problema de compra de naranjas	✓ Geométrico (áreas) ✓ Numérico	✓ Gráfica ✓ Regla de tres ✓ Porcentaje	✓

✓	✓ Población y muestra	✓ Define población y muestra después de un ejemplo. ✓ Define variable cuantitativa y cualitativa.	✓	✓	✓
✓	✓ Variable	✓ Con distintos ejemplos muestra variables. ✓ Como actividad pregunta otras formas de realizar encuestas y hace elegir una muestra y justificarla.	✓	✓	✓
✓	✓ Frecuencia absoluta y frecuencia relativa	✓ Se presenta los resultados de una votación de 7° grado, y a partir de allí se confecciona una tabla, se indica la variable, se define frecuencia absoluta y frecuencia relativa. ✓ Como actividad se debe completar una tabla con frecuencias absolutas y relativas al tirar un dado 50 veces.	✓ Estadístico ✓ Numérico	✓ Uso de tablas. ✓ Porcentajes	✓
✓	✓ Gráfico de barras	✓ Con un ejemplo: variable es el Club de futbol y las frecuencias absolutas se construye un gráfico de barras. ✓ Como actividad se presenta un problema para analizar un gráfico de barras.	✓ Estadístico	✓ Gráfico	✓
✓	✓ Gráfico circular	✓ Se presenta una tabla con datos, variable, frecuencia absoluta y frecuencia relativa y se construye un gráfico circular. ✓ Como actividad se debe analizar un gráfico circular	✓ Estadístico	✓ Cálculo de porcentajes ✓ Cálculo y gráfico de ángulos	✓
✓	✓ Promedio y moda	✓ Con un ejemplo se define promedio y moda. Como actividad se debe calcular promedio y moda en un ejercicio	✓ Estadístico	✓	✓

✓ 12.- Volumen, Capacidad y Masa	✓ El arenero ✓ Unidades de volumen ✓ Volumen del prisma ✓ Volumen del Cubo	✓ Parte con la construcción de un arenero. ✓ El volumen de un cuerpo es la medida del espacio que ocupa. ✓ Para pasar de una unidad a otra, tenemos en cuanta que cada ùnidad de volumen es 1000 veces mayor que su unidad inmediata anterior. ✓ Volumen del prisma es el producto de las tres dimensiones. ✓ Volumen del cubo = área de la base . altura.	✓ Presenta tres actividades una para reducir de una unidad a otra; y las otras para calculo de volúmenes.	✓ Observación y operaciones.	✓
✓	✓ Volumen de la pirámide ✓ Volumen del cilindro ✓ Volumen del cono ✓ Volumen de la esfera	✓ Volumen de la pirámide es la tercera parte del volumen del prisma ✓ Volumen del cilindro = área del circulo . altura ✓ Volumen del cono es la tercera parte del volumen del cilindro. ✓ Volumen de la esfera es 4. Volumen del cono.	✓ Presenta 11 actividades para calcular volúmenes de distintos cuerpos.	✓ Obsecración y operaciones numérica.	✓
✓	✓ Unidades de capacidad ✓ Unidades de masa ✓ Densidad	✓ La unidad fundamental de capacidad es el litro y corresponde a un volumen de 1 dm^3. ✓ La masa de un cuerpo es la cantidad de materia que lo forma. ✓ La densidad de una sustancia se obtiene calculando el cociente entre la masa y el volumen.	✓ Presenta seis actividades para calculo de capacidad y masa	✓ Operaciones numéricas.	✓
✓	✓ Relaciones entre las unidades de volumen, capacidad y masa	✓ Para el agua destilada bajo ciertas mediciones fisicas: ✓ * I litro equivale a 1 dm3 y tiene una masa de 1 kg.	✓ Presenta cuatro actividades	✓ Operaciones numéricas y de unidades.	✓
✓	✓ Caleidoscopio	✓ Presenta dos situaciones para el calculo de volúmenes y densidad	✓	✓	✓
✓ 13.- "Matemática y Tecnologia"	✓ Nos informamos, nos comunicamos.	✓ Se informa acerca de la memoria de una computadora y de la velocidad de procesamiento	✓ Información gral	✓	✓

✓	✓ Caleidoscopio	✓ Se presenta qué es el Pionner X (1ª sonda espacial) ✓ Se pide escribir distancias en notación científica ✓ Cuidemos las fuentes de energía: mediante un diagrama de barras de fuentes de energía se pide decidir en qué proporción se ✓ utiliza más el petróleo.	✓ Información gral ✓ Esta´distico. Porcentaje	✓ Uso de notación científica ✓ Observación, porcentajes y proporciones.	✓
✓ ***CARPETA DE*** ✓ ***ACTIVIDADES***		✓	✓	✓	✓
✓ UNIDAD I	✓ Autoevaluación (7 ejercicios)	✓ Contador con digitos cambiados ✓ Escritura de números ✓ Problema numérico cotidiano	✓ Numérico	✓ Operaciones numéricas ✓ Diagrama de árbol	✓
✓	✓ Integramos (5 ejercicios)	✓ Cálculo de distancia ✓ Conteo ✓ Sistema binario ✓ Sistema egipcio	✓ Numérico ✓ Numérico y geométrico ✓ Numérico ✓ numérico	✓ Gráfico ✓ Simbólico	✓
✓	✓ Olimpiadas matemáticas ✓ (4 ejercicios)	✓ Sucesiones (buscar el término genérico) ✓ Problema de conteo ✓ Problema de porcentaje	✓ Algebráico-numérico ✓ Numérico ✓ numérico	✓ Diagrama de árbol ✓ Proporciones	✓
✓	✓ En el diario (2 ejercicios)	✓ Ejemplo diario con estimación de densidad poblacional	✓ Estadístico	✓	✓
✓ UNIDAD II	✓ Autoevaluación (10 ejercicios)	✓ Ubicación de puntos y uso de escala ✓ Números enteros: operaciones ✓ Representación en la recta numérica	✓ Numérico	✓ Operaciones numéricas y propiedades	✓
✓	✓ Juegos (3 ejercicios)	✓ Descubrir figuras ✓ Numérico ✓ Juego con dados y casillas	✓ Numérico gráfico ✓ Numérico ✓ Conteo	✓ Operaciones.	✓

✓ UNIDAD IV	✓ Autoevaluación (6 ejercicios)	✓ Aplicación de propiedades de potencia ✓ Problema con baldosas sobre cuadrado de un número ✓ Raices cuadradas y cúbicas: aproximación ✓ 1 ejercicio combinado ✓ Se da un ejemplo de ecuación resuelta y presenta 3 para resolver ✓ 2 problemas numéricos para plantear ecuaciones	✓ Numérico ✓ Algebráico	✓ Operaciones, propiedades ✓ Resolución de ecuaciones	✓
✓	✓ Integramos (5 ejercicios)	✓ Descomponer y componer números como suma de potencias ✓ Se presenta un problema de cálculo de distancias . (el autor ya les sugiere que apliquen el Teorema de Pitágoras) ✓ Cálculo de perimetro (borde de un pañuelo) ✓ Problema: cómo ordenar cassettes en grupos tal que la cantidad de casettes por grupo sea igual que el nº de grupos	✓ Numéricos ✓ Geométrico	✓ Descomposición ✓ Aplicación de Pitágoras	✓
✓	✓ Juegos (1 ejercicio)	✓ Completar un crucinúmeros	✓ Numérico	✓ Operaciones	✓
✓	✓ Olimpiadas matemáticas (4 ejercicios)	✓ Problema de edad ✓ Duplicación de los lados de un cuadrado para ver qué ocurre con su área ✓ Una relación muy curiosa (descubrir exponentes) ✓ Sucesiones incompletas	✓ Geométrico ✓ Numérico	✓ Gráficar ✓ Tanteo numérico ✓ Observar	✓
✓	✓ En el diario (1 ejercicio)	✓ Clasificar avisos matemáticos del diario para determinar y verificar áreas, perimetros y operaciones	✓ Numérico ✓ Geométrico	✓ Operar	✓

✓	✓ Olimpiadas Matemáticas (3 ejercicios)	✓ Partes de un triángulo sombreadas ✓ Problema de alimento de animales (se puede resolver con ecuación) ✓ Problema de porcentajes de chicos y chicas en un baile	✓ Geométrico ✓ Algebráico ✓ Porcentaje	✓ Observar ✓ Resolución de ecuación ✓ operar	✓
✓	✓ En el diario (1ejercicio)	✓ Números decimales en el diario (temperaturas)	✓ Numérico	✓ Operar en Q	✓
✓ UNIDAD VII	✓ Autoevaluación (6 ejercicios)	✓ Cálculo de potancias y raices de racionales ✓ Completar una sucesión ✓ Planteo de ecuaciones, resolución y verificación en problemas numéricos ✓ Pasaje de lenguaje coloquial a algebráico	✓ Numérico ✓ Algebráico	✓ Operar ✓ Resolución de ecuaciones ✓ Manejo de lenguaje algebráico	✓
✓	✓ Integramos (3 ejercicios)	✓ Cálculo de distancias (el autor les indica el uso de Pitágoras) ✓ Volúmen de un cuerpo expresado en forma algebráica ✓ Cálculo de superficies y volúmenes de cubos con expresiones algebráicas	✓ Numérico y geométrico ✓ lenguaje algebráico ✓ algebráico	✓ Pitágoras ✓ Lenguaje algebráico ✓ Cálculo algebráico	✓
✓	✓ Juegos (1 ejercicio)	✓ Camino de números: recorrer el camino haciendo operaciones en Q	✓ Numérico	✓ Operar en Q	✓
✓	✓ Olimpiadas matemáticas (4 ejercicios)	✓ Calcular el nº de dados que entran en una longitud fija ✓ Construcción cúbica: cálculo de área conociendo el vólumen ✓ Encontrar exponentes que verifican una igualdad ✓ Problema de duplicación del nº de hojas de lirios que cubren un estanque	✓ Numérico ✓ Geométrico	✓ Operar ✓ Manejo de fórmulas geométricas	✓
✓	✓ En el diario (1 ejercicio)	✓ Articulo del diario sobre la capa de ozono: cumbre mundial, presupuesto. Se debe buscar números grandes	✓ Numérico	✓ Uso de notación científica	✓

✓ UNIDAD IX	✓ Autoevaluación (9 ejercicios)	✓ Cálculo de términos en una proporción ✓ Proporciones: problema de una receta, problema de trayectoria de una bicicleta ✓ Problema de escala en un plano de departamento ✓ Porcentaje: problema de reducción de fotocopia, problema de comisión de un sueldo ✓ Problema de proporción de envases de caramelos según cantidad ✓ Problema de regla de tres compuesta	✓ Algebráico (de la vida diaria) ✓ Cálculo de porcentajes ✓ Regla de tres compuesta	✓ Propiedad fundamental de proporciones ✓ Regla de tres	✓
✓	✓ Integramos (7 ejercicios)	✓ Completar tabla con las bases de rectángulos dada la altura, para reconocer magnitudes inversamente proporcionales ✓ Idem para triángulo equilátero con perímetro y lado ✓ Idem para superficie de un triángulo, conocida la altura ✓ Problema de alargamiento de un resorte respecto del peso para ver relación de proporcionalidad ✓ Tabla con información del crecimiento de una planta para ver proporcionalidad con el tiempo ✓ Investigar mediante gráficos relación entre los lados de un triángulo isosceles rectángulo con su área. Idem con un rectángulo y un cuadrado	✓ Geométrico ✓ Físico ✓ Proporción	✓ Uso de fórmula de perímetro del rectángulo , triángulo y circunferencia ✓ Uso de fórmula de superficie de triángulo ✓ Uso de proporciones	✓
✓	✓ Olimpíadas matemáticas (4 ejercicios)	✓ Calcular el largo ocupado por cuadraditos de 1 cm de lado que entran en 1 km^2 ✓ Idem para un cubo de 1 m de arista ✓ Réplica de la torre Eiffel: proporción ✓ Deformación de un cuadrado en rectángulo: modificación de su área	✓ geométrico y de reducción de unidades ✓ Proporción	✓ Uso de fórmulas geométricas	✓

✓ UNIDAD XI	✓ Autoevaluación (2 ejercicios)	✓ Con datos de una encuesta se debe completar una tabla, realizar gráfico de barras y circular. Reconocimiento de la población, variable y muestra	✓ Estadístico ✓ Porcentaje ✓ Gráfico	✓	✓
✓	✓ Integramos (4 ejercicios)	✓ Problema para representar partes de un total ✓ Gráfico separado en partes (representa cultivos diversos en un campo) para calcular la probabilidad de ser dañada por granizo ✓ Con datos de porcentaje realizar gráfico circular y de barras ✓ Se presenta una tabla con datos de densidad, natalidad y mortalidad de diversos países para sacar datos estadísticos	✓ de partes (porcentaje y probabilidad) ✓ gráfico ✓ probabilístico ✓ estadística	✓ Manejo de gráficos e interpretación de tablas	✓
✓	✓ Olimpiadas matemáticas (2 ejercicios)	✓ Presenta dados tetraédricos y octaédricos, para trabajar con probabilidades ✓ Problema de monedas	✓ probabilidad y conteo	✓	✓
✓	✓ En el diário (1 ejercicio)	✓ Información mediante un histograma de contaminación ambiental en Bs.As, se debe responder a una serie de preguntas interpretando el gráfico	✓ Estadístico	✓	✓
✓ UNIDAD XII	✓ Autoevaluación (7 ejercicios)	✓ Problemas para calcular volúmenes	✓ geométricos	✓ Uso de fórmulas geométricas	✓
✓	✓ Olimpiadas matemáticas (3 ejercicios)	✓ Volumen, peso, superficie y densidad	✓ geométricos	✓ Manejo de sistemas de unidades y fórmulas geométricas	✓
✓	✓ En el diario (3 ejercicios)	✓ Información de lanzamientos de distintos productos para calcular densidad, volúmen y tipos de envases convenientes	✓ geométrico	✓ Manejo de sistemas de unidades y fórmulas geométricas	✓

ANALISIS DE LOS LIBROS DE POLIMODAL

DATOS	TEMARIO	TEMA: ECUACIONES Y SISTEMAS DE ECUACIONES
1-**Matematica I (polimodal)** Autores: Pablo Kaczor, Ruth Schaposchnik, Eleonora Franco, Rosa A. Cicala y Bibiana Díaz. Editorial: Santillana S.A (Polimodal) Año de edición: Febrero de 1999 Primera edición Impreso en Argentina.	Capitulo 1: Números reales y Números Complejos. Capitulo 2: Números irracionales. Radicales. **Capitulo 3: Función lineal. Ecuaciones e inecuaciones lineales.** Capitulo 4: Función cuadrática y ecuación cuadrática I. Capítulo 5: Función cuadrática y ecuación cuadrática II. Capitulo 6: Función polinómica. Polinomios. Capitulo 7: factorización de polinomios. Capitulo 8: Función racional y ecuaciones racionales. Capitulo 9: Función exponencial y función logarítmica. Capitulo 10: Funciones trigonométricas. Capitulo 11: Vectores. Ecuaciones de la recta. Cónicas. Capitulo 12: Probabilidades y estadística.	**Capitulo 3:** Parte de un ejemplo en el que hace un gráfico cartesiano.(en donde se deben graficar dos funciones lineales). Da por sabido el tema recta. - Define función lineal: como una función del tipo **f(x) = ax + b** ; a , b $\in$ R. - Resalta que su gráfico es una recta no vertical. - Define "pendiente": es el aumento o disminución de la variable **y** por cada aumento unitario de la variable **x**. - Define "ordenada al origen": como a la imagen del cero. - Define rectas paralelas: cuando sus pendientes son iguales. Perpendiculares: si el producto de sus pendientes es igual a –1. No demuestra estas definiciones. - Define función escalonada: como toda función que presenta saltos con forma de escalones. - Define función valor absoluto y periódica. - Inecuaciones: a) Inecuaciones lineales b) Inecuaciones en el plano. - Sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas: Hace referencia al ejemplo que introduce el capitulo. "Resolver un sistema de ecuaciones lineales con 2 incógnitas, significa hallar, si es que existen todos los puntos que tienen en común las rectas del sistema". - Métodos de resolución: a) Igualación a través de 3 pasos. Da ejercitación. - Método de sustitución y método de reducción. - Clasifica a los sistemas en: i) Compatible determinado. ii) Compatible indeterminado iii) Incompatible Siempre relacionado con la gráfica.

		Observaciones: a) Al final del tema hace una síntesis teórica de todo lo estudiado. b) Las actividades planteadas son a través de problemas y ejercicios. c) Plantea un apartado que lo llama "Conexiones" , toma el tema Presión atmosférica; La recta de regresión (son situaciones en donde aparece la función lineal).
2- **Matemática I** ***Modelos matemáticos para interpretar la realidad*** Autores: María B. Camuyrano, Gabriela Net, Mariana Aragon Coordinación: Maria B. Camuyrano Editorial: Angel Estrada y Cia S.A. Primera edición – Febrero de 2000 Serie: Libros con libros	**BLOQUE 1: Funciones y Ecuaciones** Capitulo 1: Las funciones **Capítulo 2: Funciones lineales** Capitulo 3: Funciones cuadráticas Capitulo 4: Funciones polinómicas Capitulo 5: Funciones exponenciales y logarítmicas Capitulo 6: Funciones trigonométricas **BLOQUE 2: Números y Vectores** Capitulo 7: Números reales Capitulo 8: Números Complejos Capitulo 9: Vectores en el plano Capitulo 10: Operaciones con vectores: suma y producto **BLOQUE 3: Geometría en el plano** Capitulo 11: Geometría analítica Capitulo 12: Cónicas **BLOQUE 4: Estadísticas y probabilidades** Capitulo 13: Estadística Capitulo 14: probabilidades **BLOQUE 5: La Matemática como actividad humana** - La Matemática como ciencia	Capitulo 2: Funciones Lineales Parte con una situación de la realidad. Situación 1: Una represa con filtración de agua (Función lineal como modelo) - Define función lineal de la forma **f(x) = mx + b;** m y b números reales. - Introduce ecuación cuando se busca los ceros de la función. Así define ecuación lineal mx + b = 0 - Define ecuación equivalente cuando tienen el mismo conjunto solución. - Realiza la gráfica de una función lineal, es una recta y explica el significado de "m" y "b". - Analiza el signo de la pendiente: - creciente - decreciente - constante - Analiza la ordenada al origen: punto en que la recta corta al eje y. - Caracteriza la función lineal: f es lineal si y solo si las primeras diferencias de los valores de la función, que se obtienen a darle a x valores sucesivos que difieren en una constante cualquiera, son constantes. - Analiza las formas de la ecuación de una recta: a) si se conoce la pendiente y un punto b) si se conoce dos puntos c) si se conoce punto de intersección con los ejes. Situación 2: Rectas paralelas y perpendiculares - Da las siguiente condiciones: i) Dos rectas si tienen la misma inclinación, por lo tanto no se cortan, es decir son paralelas.

ii) Dos rectas forman, al cortarse, un ángulo recto por lo tanto son perpendiculares.

Demuestra la condición de perpendicularidad (geométricamente : semejanza de triángulos).

<u>Situación 3</u>: Un recipiente con agua para calentar

Introduce una función por trazos, es decir

$$T(t) = \begin{cases} 15\,t + 10 & \text{si } \; 0 \leq t \leq 6 \\ 100 & \text{si } \; t > 6 \end{cases}$$

Da ejercitación

<u>Situación 4</u>: Ingresos y costos

(Para estudiar sistema de ecuaciones de 2x2)

Presenta una situación de economía que se resuelve hallando el punto de intersección de las rectas.

Define sistema: cuando se consideran varias ecuaciones simultáneamente.

La solución son los puntos que verifican todas las ecuaciones.

En sistemas de ecuaciones lineales: analiza a partir de las rectas, y de ahí deriva el tipo de solución. Da ejemplos que lo resuelve por el método de igualación (NO HAY OTRO METODO)

Presenta tres tipos de sistemas: a) compatible determinado
b) compatible indeterminado
c) incompatible

A la ejercitación la realiza a través de:

i) tablas
ii) gráficos
iii) problemas

<u>Observaciones:</u> En el bloque 5 "La Matemática como actividad humana", define lo que es modelo matemático: **" un modelo es un objeto, un concepto o un conjunto de relaciones que se utilizan para representar y estudiar, en forma simple y comprensible, una**

		situación o un fenómeno de la realidad". - Habla de grafos y los fractales como modelos matemáticos - Al final del libro tiene las respuestas a los ejercicios de síntesis. - Este libro viene con una cartilla en donde relaciona distintas situaciones a distintos temas.
3- **Matemática 1** Autores: Susana Etchegoyen; Enrique Fagale; Silvia Rodriguez; Marta Avila de Kalan y Maria R. Alonso Editoria: Kapelusz S.A Febrero de 1999	Modulo 1: Mundos de números Modulo 2: Números reales Modulo 3: La función de las funciones Modulo 4: ¿Son complejos los complejos? **Modulo 5: De ecuaciones y funciones** Modulo 6: De las expresiones algebraicas a las funciones polinómicas Modulo 7: Funciones trascendentes Modulo 8: Locus... o lugar geométrico Modulo 9: Lo que ocurre, lo posible, lo probable	Modulo 5: De ecuaciones y funciones I.- Función lineal 2.- Sistemas de ecuaciones lineales 3.- Ecuación de segundo grado 4.- Funciones cuadráticas A las funciones se las utiliza como modelo para situaciones del mundo real. Función lineal se la expresa y = ax + b Y sus gráficas están formadas por puntos que se encuentran en una recta. En cuanto a la ejercitación, presenta distintas expresiones en donde se debe distinguir cuales son funciones lineales. Explica lo que es la pendiente y la ordenada al origen. Define ecuación: *una igualdad en la que aparecen números y letras ligados mediante operaciones algebraicas.* *Los valores desconocidos representados por letras se llaman incógnitas.* Trabaja con tablas, gráficos y problemas En sistemas de ecuaciones de 2x2: representa en el plano cartesiano y a partir de ahí clasifica a los sistemas en: Compatible determinado; compatible indeterminado e incompatible. En cuanto a los métodos de resolución dice que no hay un único método, conviene elegir en cada caso el que juzguemos mejor. Trabaja con el método de sustitución y el de reducción. A este modulo termina con el estudio de la ecuación y función de segundo grado. **Observaciones**: - presenta poca ejercitación de los temas. - Al final de cada modulo presenta "Para seguir pensando": son ejercitaciones que relaciona todo el modulo.