P

Condiciones didácticas para un espacio de articulación entre prácticas aritméticas y prácticas algebraicas. Volumen 1

Autor:
Sadovsky, Patricia
Tutor:
Perrín, Marie-Jeanne

2003

Tesis presentada con el fin de cumplimentar con los requisitos finales para la obtención del título Doctor de la Universidad de Buenos Aires en Ciencias de la Educación.

Posgrado

Tesis de doctorado

Especialidad: Educación- Didáctica de la Matemática
Facultad de Filosofía y Letras. Universidad de Buenos Aires

Condiciones Didácticas para un Espacio de Articulación entre Prácticas Aritméticas y Prácticas Algebraicas

Presentada por Patricia Sadovsky

Directora: Marie-Jeanne Perrin Glorian

Codirectora: María Cristina Davini

Agradecimientos

Este trabajo ha sido posible gracias a la ayuda generosa que he recibido de mucha gente.

A Marie-Jeanne Perrin Glorian quiero agradecerle al mismo tiempo: su generosidad al aceptar dirigir un trabajo que agregaba a la ya dura tarea de orientar una tesis de doctorado, dos condiciones que la hacían más dificultosa aún, la distancia y el idioma; su agudeza intelectual para analizar los distintos problemas que iban surgiendo, su rigurosidad en la lectura de las diferentes versiones que compusieron este trabajo; su calidez humana, su sencillez, su respeto y apoyo constante, sus aportes que enriquecieron sustancialmente los análisis realizados. Quiero agradecerle además, su hospitalidad y la de toda su familia que me recibieron en todos los veranos de esta tesis.

María Cristina Davini me alentó, me acompañó y confió en mí. Tres condiciones que fueron de gran ayuda, sobre todo en los momentos de arranque de este trabajo.

Quiero agradecerle a Edith Litwin por su cálido apoyo y por haber sostenido la pertinencia de este trabajo en la Facultad de Filosofía y Letras.

Ana Espinoza, Delia Lerner y Carmen Sessa - mis amigas- estuvieron durante todo mi período de tesista *al pie del cañón*, en todos los sentidos posibles. Aunque toda la paciencia que me tuvieron no se puede agradecer en esta página, quiero acá reconocer el valor que para mí tuvieron las discusiones que fuimos teniendo en diferentes momentos, atravesadas por el calor reconfortante de la amistad entrañable.

Muchas de las cuestiones sobre Teoría de Situaciones que acá se sintetizan, se nutrieron de las discusiones del grupo de Seminario de Didáctica de la Matemática que se desarrolló en el Centro de Formación e Investigación en Enseñanza de las Ciencias de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la UBA. Agradezco la potencia de ese grupo y en particular, las discusiones con Gustavo Barallobres quien funcionó como un oponente agudo que me exigió constantemente precisar mis formulaciones.

Agradezco a todos las docentes que me ofrecieron sus aulas: Viviana Firbank, Silvia Altman, Claudia Comparatore, Claudia Avecilla y María Inés Garbinetti. Agradezco también a las respectivas escuelas que alojaron mi trabajo: Escuela Martín Buber, Escuela Despertar, Escuela Julio Cortázar y Escuela Municipal 19 del Distrito escolar 15.

Carolina Napp me acompañó en todas las observaciones de las clases. Su ayuda para organizar el material fue fundamental para concretar el trabajo.

Muchos colegas, considerando mi situación de tesista, han tolerado retrasos e impuntualidades de mi parte. Agradezco esas tolerancias, en particular las que provinieron de Silvia Mendoza y de Cecilia Parra.

Joos Heintz y Leopoldo Kulesz han tenido la generosidad de incluirme en su proyecto Ecos, con el cual pude afrontar los gastos de uno de mis viajes. Por la confianza que han depositado en mí, estoy muy agradecida.

Quiero agradecer finalmente, la calidez de Anni Sornaga, bibliotecaria del IREM de París, quien me ha acompañado con mucho afecto, durante todas mis visitas a ese Centro.

TESIS 10-5-3

0.1

Resumen

Esta tesis es el resultado de un trabajo de exploración acerca de la viabilidad de un espacio didáctico en el campo de la aritmética escolar, que pueda concebirse como una articulación entre prácticas aritméticas y prácticas algebraicas.

Tal exploración tiene como referencia teórica principal la Teoría de Situaciones de Guy Brousseau y la interpretación que se hace de la misma, es parte de este estudio. Pensar la articulación aritmética-álgebra obliga a analizar la complejidad del álgebra escolar. Para ello, este trabajo se apoya en – y discute con- la producción actual de la investigación en este área.

Las consideraciones acerca de la Teoría de Situaciones y de la Didáctica del Álgebra constituyen el marco a partir del cual se diseñan e implementan dos secuencias didácticas con el objetivo de enfrentar a los alumnos con rupturas esenciales, de cara a la prácticas algebraicas. El estudio del proceso de producción desencadenado a partir de estas secuencias, que permite identificar conocimientos pertenecientes al espacio posible que se explora, es un aspecto central de esta investigación. La pregunta por la producción de conocimientos por parte de los alumnos supone "mirar" la nuevas relaciones que ellos elaboran, las que resignifican o revisan, las transformaciones en su modo de abordar problemas, las consideraciones que hacen para dar por válido un procedimiento o una propiedad, las herramientas semióticas que producen para representar procesos y soluciones, las nuevas preguntas – que no eran antes siquiera concebibles- que se formulan.

Las dos secuencias desarrolladas fueron pensadas desde una idea básica: proponer problemas que exigieran a los alumnos tomar una posición reflexiva – necesariamente más general- respecto de algunos de los *viejos* objetos de la aritmética escolar.

La primera de las secuencias apuntó a que los alumnos comenzaran a conceptualizar la división entera como un "objeto" que relaciona números a través de condiciones, objeto que puede pensarse de manera independiente de su funcionamiento en la resolución de los conocidos problemas de *reparto*. El análisis de la producción en las clases se centra en las transformaciones en las conceptualizaciones de los alumnos relativas a la división entera, en la racionalidad matemática puesta en juego, y en las relaciones entre ambas.

La segunda secuencia está estructurada alrededor de problemas *de enunciado* que vinculan dos variables con un grado de libertad entre ellas. Los problemas plantean rupturas a nivel de las prácticas de los alumnos, al enfrentarlos con la necesidad de seleccionar variables, definir su dominio, decidir sobre la cantidad de soluciones y encontrar maneras de expresarlas. Algunas de estas rupturas llevan a revisar las normas que usan los estudiantes para abordar el trabajo matemático. El análisis realizado pone en evidencia la necesidad ineludible de las interacciones sociales para la emergencia de muchas de las cuestiones en juego en esta secuencia.

El estudio da cuenta de una trama compleja de producción de conocimientos en la que intervienen de manera inextricable las relaciones que los alumnos producen en su interacción personal con los problemas, las elaboraciones que hacen en conjunto grupos de alumnos, las intenciones didácticas del docente que se juegan implícitamente en sus intervenciones y la confrontación entre las producciones de los pares que "aloja" la posibilidad de plantear nuevos problemas que difícilmente surgirían sin dicha confrontación..

Índice

Introducción

La calle que une la aritmética y el álgebra muestra paisajes diferentes en sus dos extremos. Durante mucho tiempo, quienes constituimos el grupo de investigación en Didáctica de la Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires, estuvimos parados en una de sus esquinas: aquella en la que habitan alumnos que acaban de ingresar a la escuela media, que se "toparon" con las letras para representar variables e incógnitas, que constataron de una manera un poco drástica que junto con el cambio de institución, las viejas prácticas que los habían atravesado durante su tránsito por la matemática de la escuela primaria, estaban -por lo menos- en cuestión. Junto con ellos, veíamos también docentes "tironeando" a sus alumnos para que abandonaran sus viejos recursos aritméticos, sin que estuviera claro para los estudiantes que estos recursos fueran realmente inadecuados; docentes que percibían que en el intento de instalar nuevos objetos y nuevas formas de abordar, se producía una fuga muy grande de sentido para sus alumnos. Estábamos parados en la esquina del álgebra elemental. Estudiamos entonces los trabajos que numerosos investigadores de la comunidad internacional habían realizado sobre el pasaje de la aritmética al álgebra y sumamos nuestras preguntas para intentar conocer un poco mejor una porción de esta compleja problemática didáctica.

Cuando mirábamos la otra punta del camino, la de las prácticas aritméticas, veíamos – los distintos trabajos didácticos nos ayudaban a ver- la distancia que la separa del álgebra, pero sin considerar que esa distancia podría variar en función del tipo de trabajo que albergara la aritmética escolar.

Tanto en la cultura escolar como, más ampliamente, en el imaginario de nuestra sociedad, cuando se habla de "la aritmética" referida a la escuela primaria, se alude a un tipo de práctica centrada en la resolución de problemas "cotidianos"[1] y se le reconoce un valor fundamentalmente vinculado al cálculo. Sin embargo, este "estado" puede ser objeto de interrogación: no hay una única aritmética posible en la escuela primaria, no hay tampoco un único álgebra posible en la escuela media, no hay en consecuencia, una única transición – una única calle- posible.

El trabajo que presentamos aquí[2], es el resultado de habernos propuesto **explorar las posibilidades de un espacio didáctico en el campo de la aritmética escolar, que, por la naturaleza de los problemas a considerar, pudiera concebirse como un espacio de articulación entre prácticas aritméticas y prácticas algebraicas**.

Esta primera formulación del asunto que trataremos en este trabajo – por cierto completamente general - nos "obliga" a aclarar, por lo menos en una primera versión: a) qué tipo de "objetos" estábamos pensando en introducir en las aulas pobladas por niños que están terminando su ciclo primario (séptimo grado en la Ciudad de Buenos Aires), b) en qué sentido

[1] En el ámbito de la escuela suelen denominarse "problemas cotidianos" a aquellos problemas de enunciado que se refieren a situaciones de la vida cotidiana, y que son empleados como medio para "aplicar" operaciones aritméticas.

[2] Al enmarcar el origen de esta problemática, hacía referencia al grupo de la F.C.E.yN. Hablo entonces de un "nosotros" que engloba a las personas de nuestro equipo. A partir de este punto, el "nosotros" es una manera más aceptable para mí, de aludir a mi propio trabajo.

pensamos que esos "objetos" podrían considerarse pertenecientes a un espacio didáctico de articulación aritmética-álgebra y c) qué significa desde nuestro punto de vista explorar las posibilidades de un espacio didáctico. Vayamos por partes.

a) Acerca de los objetos matemáticos que habitan en " nuestro ensanche" de la aritmética

Palabras como "generalización", "variable", "relaciones", "dependencia", "infinitas soluciones", "argumentación", "escrituras simbólicas", todas ellas tomadas de los trabajos didácticos que se refieren al álgebra elemental escolar, aparecían como ideas todavía muy vagas que podrían tener un "lugar" en la aritmética que queríamos "encontrar" (inventar). Como hemos dicho, los niños a esa altura de su escolaridad, básicamente han realizado cálculos con números naturales y racionales no negativos, y han resuelto problemas de enunciado que requieren una o varias operaciones aritméticas, con datos determinados y, en general, con una única solución. Son prácticas tan centradas en lo particular de cada caso, que impiden tener una visión de conjunto respecto de la matemática involucrada en las mismas.

Efectivamente, haber resuelto miles de operaciones aritméticas, no significa haber trabajado **sobre** las operaciones aritméticas, ni haberlas concebido como relaciones entre elementos, ni como objetos en sí mismos. Por otro lado, enfrentar problemas de enunciado particulares, no alcanza para considerar la estructura que los mismos tienen, identificar las variables que intervienen, y establecer la manera en que se relacionan estas variables para "producir" soluciones. Ahora bien, estos dos aspectos –concebir las operaciones como relaciones e identificar la estructura de los problemas de enunciado- permiten considerar el trabajo aritmético como objeto de reflexión y ubicarlo en una perspectiva de generalización. Esto hace a la naturaleza del quehacer matemático en el que el sujeto define y redefine los objetos una y otra vez, reorganizándolos en cada "vuelta" con niveles crecientes de generalidad y, en consecuencia, con mayores posibilidades de acceder a una comprensión más profunda.

Estudiar las operaciones aritméticas en sí mismas, esto es analizar las relaciones que las caracterizan, "mirarlas" desde una perspectiva funcional que permita considerar las variaciones que se producen en el resultado al variar algunos de sus elementos, ofrecería la oportunidad de **construir un sentido más interno de las operaciones**, alrededor del cual se reorganizarían los viejos significados construidos a lo largo de años de trabajo y a propósito de problemas muy diversos.

Los problemas aritméticos que los niños están habituados a resolver, consisten –esquemáticamente- en elegir los datos para empezar a operar con ellos, eventualmente hallar incógnitas intermedias, operar con las mismas y arribar a la solución. La o las relaciones que allí intervinieron nunca se tratan "todas juntas" sino que se van utilizando "paso a paso" (Vergnaud, G. et al; 1987). ¿Qué cambia si el problema que se plantea relaciona dos variables pero no se determina ninguna de ellas? Al introducir un grado de libertad, es necesario identificar el dominio de variación, atribuir valores a una de las variables para obtener soluciones y, analizar si se han considerado todas las soluciones posibles.

Frente a la necesidad de describirlas, tarde o temprano se deberán recortar del problema las relaciones aritméticas que permiten hallar todas las soluciones. Las escrituras simbólicas que cada alumno pudiera proponer –no necesariamente próximas a las convencionales- cumplirían en este proceso no sólo una función comunicativa sino de sostén del pensamiento y de producción de nuevas relaciones. (*"La escritura no sólo nos ayuda a recordar lo pensado y lo dicho: también nos invita a ver lo pensado y lo dicho de una manera diferente"*. Olson, D.; 1998).

Poder sintetizar un conjunto de soluciones en una o varias relaciones entre variables que se vinculan a través de operaciones aritméticas, pone en evidencia más claramente el aspecto modelizador de la actividad matemática, aspecto que, si bien está en juego siempre que se resuelven problemas matemáticos, aparece más oculto en los problemas aritméticos de solución única, dado que el modelo utilizado –la o las operaciones aritméticas seleccionadas- se "esfuman" rápidamente en los resultados numéricos. El recorte de un problema en términos de la o las relaciones que caracterizan sus soluciones, estructura estas últimas y hace posible que pueda verse "algo común", donde antes se veían soluciones aisladas. Este proceso en el que los niños se enfrentan al desafío de comparar variaciones y de integrarlas en una o varias relaciones, configura un trabajo de generalización constructiva (García, R.; 2000).

Tanto el análisis de las operaciones aritméticas en el sentido mencionado más arriba, como el de las relaciones que "producen" las soluciones de un problema en el que se ha dejado un grado de libertad con respecto a la determinación de las variables que intervienen, exigen movilizar implícita o explícitamente la **noción de variable**. Aparece acá un punto de ruptura con las prácticas aritméticas usuales.

Considerar el dominio de una cierta variable y decidir sobre la cantidad de soluciones de un problema, requiere para quienes abordan estas tareas por primera vez, la producción de **criterios nuevos que les permitan "estar seguros de la validez de su trabajo"**. Surge entonces la posibilidad de reestructurar las normas que elaboran o aceptan los alumnos para validar las proposiciones que realicen, enriqueciendo y transformando el espectro de posibles que ellos conciben con relación al trabajo matemático.

Es así como las ideas iniciales comienzan a tomar una primera ubicación en este espacio de articulación que intentamos caracterizar. "Necesitamos" ahora, explicitar más claramente, por qué suponemos que estas cuestiones podrían constituirse en una posibilidad de articulación con las prácticas algebraicas.

b) Nuestra concepción de la articulación aritmética – álgebra

La relación entre la aritmética y el álgebra –numerosos autores han tratado el tema– es compleja. Básicamente, esta complejidad está dada por el hecho de que el álgebra escolar, en cualquier versión que se presente, se concibe como un instrumento que modeliza[3] la aritmética pero a la vez, las herramientas y los modos de abordar de la práctica algebraica suponen rupturas esenciales –e inevitables- con respecto a la aritmética[4]. Punto de apoyo (la aritmética) y ruptura (el álgebra), hacen difícil la relación entre viejos y nuevos objetos. Ahora bien, plantear

[3] Somos conscientes de que no siempre es "visible" en la institución escolar la potencia del álgebra como herramienta modelizadora de la aritmética.
[4] Pensamos que siempre existe una ruptura importante entre algo que se denomina "aritmética escolar" y algo que se alberga bajo el nombre de "álgebra", aún considerando que dichos nombres no definen, cada uno, de manera tajante un conjunto de objetos y prácticas.

una problemática que "obligue" a los alumnos a tomar una posición reflexiva respecto de las operaciones y los problemas aritméticos, abre una nueva posibilidad que es la de comenzar a problematizar la aritmética misma, una condición favorable –pensamos- para entrar en el "juego" que supone su modelización. En otros términos, concebir problemas internos de la aritmética, reorganiza enriquece y consolida aquello que se constituirá como punto de apoyo y objeto en las prácticas algebraicas, teniendo clara conciencia de que es justamente la herramienta algebraica la que permitirá una profunda reestructuración y un conocimiento más acabado de lo aritmético.

No hay desde nuestro punto de vista un "hecho" que marque el comienzo del álgebra escolar. Usualmente se señala el uso de las letras representando incógnitas, como el acontecimiento que inaugura lo algebraico en la escuela; pero suponer que las cosas comienzan "un día", el día en que aparecen las letras o cualquier otro día en el que aparece "algo", es reducir al máximo el alcance -las capacidades que exige desplegar, el tipo de problemas que permite resolver- del álgebra escolar. A su vez, esta reducción no ayuda a analizar –interrogar- la función de las prácticas anteriores (aritméticas) en la posibilidad de conocer "lo viejo" (la aritmética) con las nuevas herramientas (algebraicas). En este sentido, tomamos prestado de Bolea, P.; Bosch, M.; Gastón, J. (2001) la idea de concebir más que el comienzo del álgebra, un "proceso de algebrización" de las matemáticas escolares [5].

Un proceso de algebrización supone –es la idea de muchos autores aunque lo expresen de modos diferentes- un trabajo cada vez más explícito de generalización. En este sentido, pensamos que los problemas que hemos incluido en nuestro espacio, al plantear la exigencia de concebir las operaciones como relaciones, de recortar ciertos problemas "de enunciado" en términos de las relaciones que "producen" las soluciones y de estudiar el problema de la cantidad de soluciones que se obtienen, se ubican en una perspectiva de generalización cuya profundización desemboca o se aloja en los objetos del álgebra. Esta es la manera en la que pensamos la articulación. Hablamos de generalización explícita porque en realidad, las prácticas aritméticas usuales suponen también algún nivel de generalización. Efectivamente, cuando los niños aplican por ejemplo, el algoritmo de la multiplicación a dos números naturales para obtener un resultado, saben que ese mismo algoritmo se podría aplicar a cualquier par de números naturales. Pero este carácter general de los procedimientos que se utilizan, así como de las propiedades que los fundamentan, suele permanecer implícito y por lo tanto, no siempre presente en el campo de la conciencia de los niños.

Si bien nuestra formulación inicial era bastante imprecisa, rechazamos de entrada que nuestro trabajo se considerara perteneciente al ámbito de lo "pre algebraico". El prefijo alude a la existencia de "algo anterior al álgebra"[6]. Sin embargo, no estábamos pensando en un conjunto de requisitos previos para abordar las prácticas algebraicas, sino más bien en explorar la posibilidad de enriquecer las prácticas aritméticas a partir de trascender el nivel estrictamente calculatorio del que hablábamos antes, ofreciendo la posibilidad de que se desplieguen

[5] Dado que en el trabajo citado se utilizan indicadores de "grado de algebrización" que nosotros no hemos incorporado, no estamos seguros de la proximidad entre el sentido que le dan los autores y el que otorgamos nosotros a la noción de "proceso de algebrización". De todos modos, la denominación "calza bien" en lo que queremos expresar y por eso la tomamos y la agradecemos.

[6] Existen otras acepciones posibles: por ejemplo, en el artículo de Bolea, Bosch y Gascón al que nos referimos antes, se habla de "pre algebraico" como todavía no algebrizado.

capacidades y conocimientos que continuarán profundizándose a través de las prácticas algebraicas.

Digamos finalmente que hemos pensado siempre en **un** posible espacio de articulación suponiendo que hay –o habría- muchos otros posibles. **Nuestra hipótesis de trabajo ha sido establecer que dicho espacio contendría conocimientos que no son visibles ni desde la aritmética en su versión tradicional -porque allí no se ponen en juego- ni desde el álgebra -porque suelen tener allí un grado de naturalización tal que no los hace reconocibles como "asuntos" que valga la pena tratar específicamente**. Justamente nuestra exploración ha consistido en indagar acerca de esos posibles conocimientos. Precisemos ahora un poco más el tipo de exploración realizada.

c) La naturaleza de nuestra exploración

Nuestro trabajo ha consistido básicamente en explorar el tipo de conocimientos que producen alumnos de séptimo grado, cuando se enfrentan a problemas que suponen algún grado de ruptura con las prácticas aritméticas, ruptura que "empuja" hacia el trabajo algebraico. De las diversas maneras en que se podría hacer una indagación de este tipo, hemos elegido estudiar la producción de conocimientos en clase y a raíz de situaciones didácticas que nosotros hemos diseñado, teniendo en cuenta las dos grandes líneas explicitadas más arriba: la consideración de las operaciones aritméticas en tanto relaciones entre números y la resolución de problemas que relacionan dos variables que no están determinadas.

Nuestras preguntas iniciales respecto del proceso de producción de conocimientos que nos propusimos estudiar, abarcan i) cuestiones vinculadas a la relación entre viejos y nuevos conocimientos a propósito de las operaciones aritméticas, ii) cuestiones vinculadas a la emergencia de las escrituras en el contexto didáctico propuesto y iii) cuestiones vinculadas a la racionalidad matemática de los alumnos al entrar en contacto con los problemas que les planteamos.

i) ¿Cómo utilizan los alumnos los conocimientos aritméticos que tienen hasta el momento para enfrentar los nuevos problemas que les proponemos? ¿Qué rupturas supone la resolución de estos problemas? ¿Qué aspectos de la antigua relación con las operaciones, se revelan ahora frente a las rupturas que los nuevos problemas conllevan? ¿Qué nuevas cuestiones se elaboran? ¿Qué papel juega la introducción de la noción de variable en estas elaboraciones?

ii) La necesidad de representar varias o infinitas soluciones, ¿plantea exigencias con respecto a la producción de nuevas herramientas semióticas? ¿Proponen los alumnos el uso de letras para representar variables? ¿Qué función cumplen las escrituras que producen? ¿Cómo se validan? Si no proponen ellos mismos sus propias escrituras, ¿tiene sentido que sea el docente quien demande la producción de fórmulas? ¿Cuál es el sentido de dar lugar a dicha producción en el espacio de la clase? ¿ Qué articulación se podría establecer con las escrituras convencionales?

iii) ¿Cómo se posicionan los alumnos frente a la existencia de variables que son independientes de los datos del problema? ¿Qué criterios elaboran para "contar" la cantidad de soluciones de un problema? ¿Qué tipo de justificaciones proponen los niños? ¿Qué tipo de argumentos necesitan para considerar que algo es verdadero? ¿Qué papel juegan los ensayos en la producción de un procedimiento general?

Las cuestiones relativas a la racionalidad no están separadas de los conocimientos relativos a las operaciones aritméticas. Si bien en este trabajo no nos ocupamos de los procesos de construcción de las normas cognoscitivas específicas del trabajo matemático, sí pretendemos "mirar" de qué manera las normas que se dan o aceptan los alumnos para abordar los problemas que les proponemos nos permiten caracterizar mejor los conocimientos que elaboran y si, las resistencias que oponen los problemas planteados, llevan a producir cambios en las normas que constituyen la racionalidad matemática de los niños.

Decíamos antes que hemos optado por realizar el estudio analizando distintos procesos de producción en clases y a partir de situaciones diseñadas por nosotros. Si estamos centrados en la producción de conocimientos por parte de los alumnos, ¿por qué en clase y no en un pequeño grupo de niños que podría interactuar con un investigador en una situación más "reducida"?

Hay varias razones que nos decidieron por esta opción:

1) Una "apuesta fuerte" de nuestra exploración, ha consistido en pensar que muchos de los conocimientos que los niños producirían, serían el resultado de la interacción entre alumnos que se ubican en distintas lógicas: algunos más "aritméticos" y otros que dan cuenta de un pensamiento más "algebraico". La necesidad de saldar las discusiones acerca de producciones elaboradas desde racionalidades diferentes, daría lugar a la identificación de nuevos conocimientos que o bien pondrían en cuestión algo de las viejas prácticas aritméticas o bien dejarían "ver" nuevos aspectos. Esto nos llevó a considerar relevante "una diversidad cognitiva mínima", condición que es inherente al funcionamiento de una clase.

2) Un espacio de elaboración de conocimientos por parte de los niños, en el que uno de sus pilares es la producción que resulta de la interacción entre diferentes "lógicas", requiere desde su constitución la intervención de la función docente (aunque la misma sea realizada por un investigador) que, por lo menos, regule esas interacciones. En realidad, pensábamos que, tratándose de una situación de ruptura con viejas prácticas, los problemas que plantearíamos darían lugar a nuevos problemas que sólo podrían ser propuestos por un docente –o por alguien cumpliendo esa función- una vez que los niños hubieran desplegado cierta producción. En otros términos, las situaciones que estábamos elaborando no podían ser comunicadas "de entrada" a los niños pues contenían una parte que dependía de sus primeras producciones. Además, cuestiones como la producción de escrituras (nuevas para los niños), la elaboración de argumentos para decidir sobre la cantidad de soluciones de un problema o sobre el dominio de una variable, no pueden ser dirimidas en esta etapa sin la función de un docente que las regule.

Asumido esto, y considerando que nuestro proyecto pone en el centro de muchas de las cuestiones a trabajar la relación "viejo-nuevo", concluimos que el docente de los alumnos, por el hecho de tener con ellos una historia (aunque fuera pequeña) en común, estaría en muchas mejores condiciones que un investigador para conducir el proceso de producción de los niños.

3) Consideramos conveniente que nuestro estudio se desarrollara en condiciones en las que los alumnos pudieran visualizar claramente, que la propuesta que se les hacía formaba parte de los asuntos a tratar en la escuela. Aunque no iríamos a estudiar específicamente cuestiones como la legitimidad en la cultura escolar de los objetos producidos por los niños, las

condiciones de inserción de los mismos en un sistema más amplio de conocimientos, o su viabilidad en el sistema escolar, sí pretendíamos que nuestro estudio preservara las condiciones de complejidad de la clase de manera tal de poder vislumbrar una perspectiva para tales cuestiones.

¿Hasta qué punto un trabajo como el que hemos propuesto con los alumnos "mejora" sus condiciones de entrada en el mundo algebraico? No es esta una pregunta que podamos contestar tomando en cuenta los marcos y métodos usados en nuestra investigación.[7] No es, en todo caso, la pregunta que en nuestro trabajo se toma como "objeto". Sin embargo, por el tipo de actividad que los alumnos despliegan –profundización de las exigencias de generalización, producción de escrituras, elaboración de argumentos, manejo de conjuntos infinitos, uso de la noción de variable- ***creemos*** que un trabajo de este tipo mejora las condiciones en las que los alumnos abordarán el álgebra elemental. Y esa convicción, ha constituido para nosotros un motor esencial en el desarrollo de nuestro estudio.

La estructura de la tesis

Esta tesis está organizada en tres partes: una primera parte en la que explicitamos las referencias teóricas que hemos considerado y explicamos la metodología utilizada, una segunda en la que presentamos el trabajo experimental y una tercera en la que proponemos las conclusiones y perspectivas.

Haber hecho la opción de realizar nuestro trabajo empírico en aulas, nos "obliga" a precisar nuestro marco didáctico. La Teoría de Situaciones de Guy Brousseau, es nuestra referencia teórica central. Nos interesa explicar qué aspectos hemos tenido más en cuenta y en qué sentido nuevos aportes realizados por quienes se reconocen en ese marco, han enriquecido nuestra perspectiva.

Los trabajos vinculados a la problemática del pasaje de la aritmética al álgebra, han sido una fuente central a partir de la cual diseñamos el conjunto de situaciones que constituyen el núcleo de nuestro espacio didáctico de articulación. Comunicamos las reflexiones que dichos trabajos nos han suscitado.

Es difícil pensar en el álgebra elemental desde una perspectiva didáctica, sin considerar la cuestión de las escrituras. Presentamos las referencias que nos ayudaron a elaborar hipótesis de trabajo con relación a este punto.

Nuestro trabajo se inscribe en el marco metodológico de la ingeniería didáctica. Esta metodología es en nuestro medio, objeto de algunas sospechas que la alinean de una manera un tanto acusatoria, bajo el paradigma experimental. Al precisar la metodología, explicaremos nuestra posición al respecto.

Ya hemos explicado que hemos seguido dos grandes líneas para pensar las secuencias didácticas: la consideración de las operaciones aritméticas en tanto relaciones entre números y la resolución de problemas que relacionan dos variables ninguna de las cuales se ha determinado. De todas las operaciones aritméticas con las que podríamos haber trabajado, hemos optado, por razones que analizaremos al profundizar en la metodología utilizada, por diseñar una secuencia sobre la división entera. La segunda parte de esta tesis consta entonces de dos capítulos: uno estructurado alrededor de la secuencia sobre división entera y el otro sobre problemas aritméticos a dos variables.

La última parte de este trabajo se dedica a "pasar en limpio" las conclusiones que se fueron sembrando a lo largo del mismo, y a esbozar ciertas problemáticas que se ubicarían desde nuestro punto de vista en continuidad con el mismo.

[7] Aún si hubiésemos seguido a los alumnos que participaron de nuestro trabajo, en años posteriores, hubiese resultado muy difícil establecer que un mejor desempeño comparado con el de otros alumnos en el trabajo algebraico fue "causado" por su participación en nuestras secuencias.

Capítulo 1

Marco didáctico general

La Teoría de Situaciones

1. Introducción

La Teoría de Situaciones de Guy Brousseau (1986, 1988 a, 1988 b, 1995, 1998, 1999) es el marco didáctico principal desde el cual estudiamos y desarrollamos nuestra problemática. Planteamos a continuación nuestra interpretación global de la Teoría y nos detenemos más especialmente en aquellos conceptos que hemos considerado claves en esta investigación. Si bien la Teoría de Situaciones surge con el propósito de modelizar la enseñanza desde una cierta concepción –que precisaremos enseguida-, en los últimos años se ha realizado un trabajo teórico importante para extender sus conceptos de manera de poder adaptarlos al estudio de clases ordinarias[1]. Ahora bien, dado que nuestro trabajo se ubica en una perspectiva de ingeniería didáctica –diseñamos como parte de la investigación las secuencias que estudiamos- nuestra mirada se orientará a aquellos aspectos de la Teoría que se refieren a condiciones sobre las situaciones didácticas pensadas desde el propio marco teórico.

2. La Teoría de Situaciones: un modelo de las interacciones didácticas

Guy Brousseau propone un modelo desde el cual pensar la enseñanza como un proceso centrado en la **producción**, - lo cual implica la **transformación** y la **validación**- de los conocimientos matemáticos en el ámbito escolar.

Una hipótesis sobre la construcción de conocimientos, tomada de la epistemología genética de Jean Piaget, se coordina con una hipótesis sobre la naturaleza del conocimiento matemático y con una concepción de la matemática como conjunto organizado de saberes, producidos por la cultura[2].

La concepción constructivista lleva a Brousseau a proponer un modelo que llama **situación**, y que describe en términos de interacción entre un sujeto y un "medio" resistente, al que el sujeto se adapta, produciendo conocimiento. *"El alumno aprende adaptándose a un*

[1] Tomando la opción de muchos autores, llamamos clases ordinarias a aquellas en las que el investigador no interviene en el diseño del proyecto didáctico del profesor.

[2] Al poner el acento en "lo matemático" como la esencia de los fenómenos didácticos, desde nuestro punto de vista algunos autores desdibujan, en la interpretación que hacen de la perspectiva de Brousseau, la hipótesis constructivista que es "co-fundante" en la Teoría de Situaciones. Al respecto, en un texto en el que marcan los principios de constitución de la didáctica como disciplina científica, Bosch y Chevallard (1999) señalan : *"Pour expliquer les faits d'enseignement auxquels elle se voit confrontée, la didactique postule que le "mystère" est dans les mathématiques, et non pas dans les sujets qui ont à apprendre et à enseigner les mathématiques"*. Sin embargo, al ser concebida la matemática como una actividad de producción que se realiza en situación y contra un medio, pensamos que esta actividad incluye "en el misterio" a los sujetos que tienen que aprender y enseñar.

medio que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios, un poco como lo ha hecho la sociedad humana. Este saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje" (1986).

A la vez, Brousseau postula que **para todo conocimiento** (matemático) es posible construir una **situación fundamental**, que puede comunicarse sin apelar a dicho conocimiento y para la cual éste determina la estrategia óptima (1988 a).

La concepción de la matemática como un producto de la cultura hace visible la diferencia entre **conocimiento y saber** y lleva a la siguiente postulación: *"un medio sin intenciones didácticas es claramente insuficiente para inducir en el alumno todos los conocimientos culturales que se desea que él adquiera"* (1986).

Los elementos centrales de la teoría quedan esbozados a partir de estas tres hipótesis generales. El modelo describe la enseñanza de la matemática a partir de dos tipos de interacciones básicas: a) entre alumno y "medio" y b) entre docente y alumno a propósito de la interacción del alumno con el medio. El concepto teórico que describe las primeras se llama "situación adidáctica" y modeliza una actividad de producción de conocimientos por parte del alumno, que es independiente de la intención didáctica del docente. La noción de contrato didáctico describe y explica el segundo tipo de interacciones. Esta noción es una herramienta teórica que da cuenta de las elaboraciones con respecto al conocimiento matemático que se producen cuando cada uno de los interlocutores de la relación didáctica interpreta las intenciones y las expectativas –explícitas e implícitas- del otro, en el proceso de comunicación. Estos dos tipos de interacciones no suponen recorte temporal de algún tipo y pueden incluso, superponerse.

Nos interesa llamar la atención sobre la necesidad teórica de "atrapar" tanto las interacciones entre el alumno y el docente como las interacciones del sujeto que aprende con un "medio resistente", de manera independiente de la mediación docente.

Guy Brousseau plantea que la necesidad teórica de un "medio" *("milieu")* está dada por el hecho de que la relación didáctica va a extinguirse y el alumno deberá hacer frente a situaciones desprovistas de intenciones didácticas (1986).

Desde nuestro punto de vista, diríamos además que un proceso de enseñanza basado exclusivamente en interacciones sociales, sin la confrontación del alumno con una porción de la "realidad"[3] que puede conocerse –y por lo tanto modificarse- a través de las herramientas que ofrece la matemática, deja muy poco espacio para que el alumno confronte sus anticipaciones con las respuestas de la "realidad" con la que interactúa, y aprenda en esa confrontación a controlarla por un lado y a reconocer el alcance de las relaciones utilizadas, por otro. En otros términos, en la producción de significados intervienen, además de las respuestas de los otros sujetos que participan de una misma cultura, las respuestas "matemáticas"[4] de un "medio" que informa respecto de la pertinencia de los conocimientos utilizados en la resolución de cierto

[3] Estamos pensando en una realidad en la que se ha recortado un problema a resolver, lo cual supone ya un sistema de conocimientos interactuando con la misma.

[4] Entendemos por respuesta matemática del "medio", la interpretación que un sujeto puede hacer en términos de sus conocimientos matemáticos, sobre el efecto de una acción realizada por él, tendiente a resolver un problema.

problema. Sin este último tipo de interacciones se desdibuja, desde nuestro punto de vista, tanto el papel de la matemática como medio de resolución de problemas como los sistemas de validación propios de la disciplina.

En el otro extremo, una visión de la enseñanza que se centra exclusivamente en los procesos de producción de conocimientos en interacción con un problema particular, sin las retroacciones de quienes comparten la misma comunidad, ni la mediación de quienes representan el saber cultural (los docentes) desconoce que las respuestas a problemas particulares no se insertan de manera automática en un sistema organizado de conocimientos que permitiría abordar cuestiones que van mucho más allá del contexto que las hizo observables.

Los dos tipos de interacciones básicos a los que nos hemos referido, conforman en la Teoría de Situaciones un sistema, es decir que no pueden concebirse de manera independiente unas de las otras. Este sistema es la situación didáctica. Las relaciones entre los sub-sistemas son complejas y están sujetas permanentemente a re-elaboraciones teóricas.

Guy Brousseau ha insistido una y otra vez en el carácter modélico de su formulación. Su teoría no se propone como una descripción de la enseñanza "ideal", ni tiene una conexión *inmediata* con los hechos "reales" de la clase, aunque sí constituye una herramienta para conocer, explicar y ofrecer elementos para intervenir en la realidad de las clases de matemática. Pensar *"como si algo fuera"* aún sabiendo *"que no es"* puede resultar un camino fértil cuando se busca precisar condiciones que den lugar a un proceso de producción de conocimiento matemático en el aula. Desde esta perspectiva, pierde sentido señalar lo que le "falta" al modelo –no hay pretensión de "atrapar" todos los asuntos relativos a una clase de matemática- o invalidarlo ofreciendo una especie de contraejemplo experimental en el cual *"bajo ciertas condiciones acordes con el modelo, alguien no aprendió"*. Tampoco tiene interés considerar que las respuestas de la realidad inesperadas según los análisis teóricos, son desvíos respecto de una norma. Sí en cambio resulta relevante contornear qué cuestiones describe y explica la teoría, bajo qué condiciones son válidas esas explicaciones y cuáles son los aspectos de los cuales no se ocupa. Aunque recién podremos ir explicando la potencia que para nosotros tiene el modelo de Brousseau en la medida en que vayamos desplegando los elementos del mismo, quisiéramos que la lectura que sigue se realice sin perder de vista esta cuestión.

3. Acerca de la noción de situación adidáctica

Una situación a-didáctica es **una interacción** entre un sujeto y un medio, a propósito de un conocimiento. Esta noción aparece en muchos de los textos de Guy Brousseau, en algunos casos en un lenguaje formal, en términos de "juego" y en otros, en una versión menos formalizada que desde nuestro punto de vista, no pierde en precisión. Veamos. *"Una situación es una asociación "interacción Juego-Jugador, Conocimiento S(I(X,J), C)"*(1988 a)"[5] *"Hemos*

[5] Brousseau define juego formal como una 7-upla: un conjunto X de jugadores, un conjunto E de estados posibles, una relación que asocia a cada estado del juego un conjunto de estados permitidos, un estado inicial, un conjunto de estados terminales, una relación en la que a cada estado terminal le corresponde una evaluación de ganancias y pérdidas con relación a lo invertido, y una función del conjunto X en el conjunto X, que designa al jugador que sucede a aquel que acaba de jugar (1988 a). Pocos trabajos operan

llamado situación a un modelo de interacción de un sujeto con cierto medio que determina a un conocimiento dado como el recurso del que dispone el sujeto para alcanzar o conservar en este medio un estado favorable. Algunas de estas "situaciones" requieren de la adquisición "anterior" de todos los conocimientos y esquemas necesarios, pero hay otras que ofrecen una posibilidad al sujeto para construir por sí mismo un conocimiento nuevo en un proceso "genético". Notemos que la misma palabra "situación" sirve, en su sentido ordinario, para describir tanto al conjunto (no necesariamente determinado) de condiciones que enmarcan una acción, como al modelo teórico y eventualmente formal que sirve para estudiarla". (1999).

Esta doble acepción de la palabra "situación" a la que se refiere Brousseau, ha llevado en algunos casos a identificarla con el problema matemático que constituye el núcleo del medio con el que interactúa el sujeto. La confusión no es menor justamente porque, en el modelo brousseauniano, no es solamente el problema el que "*determina*" la producción de conocimientos, -interpretación que daría lugar a poner la teoría bajo sospecha de una suerte de empirismo- sino la interacción que puede entablarse entre el sujeto y un "medio resistente", interacción que supone que el sujeto actúa sobre el medio (elige, decide, poniendo en juego conocimiento) y es capaz de leer en el mismo las retroacciones (informaciones sobre los resultados de sus acciones) que se le ofrecen. Es esa lectura la que lo lleva a modificar sus decisiones o, en otros términos, a transformar los conocimientos en juego.

El carácter de "adidáctico" remite a un tipo de vínculo con el medio, en el que el sujeto compromete esencialmente su sistema matemático de conocimientos. *"Entre el momento en que el alumno acepta el problema como suyo y aquél en el que produce su respuesta, el maestro rehusa intervenir proponiendo los conocimientos que quiere ver aparecer. El alumno sabe bien que el problema ha sido elegido para hacerle adquirir un conocimiento nuevo, pero debe saber también que este conocimiento está enteramente justificado por la lógica interna de la situación y que puede construirlo sin atender a razones didácticas."*(Brousseau, G; 1986). Como lo han señalado muchos autores, por ejemplo Margolinas (1993) la noción de "adidáctico" –digamos de paso que ha sido objeto de interpretaciones muy diversas- se refiere al tipo de compromiso que el alumno tiene con el medio y no alude al "silencio" del maestro sino al hecho de que, para dar lugar a la producción de conocimientos, el docente no explicita cuáles son los conocimientos que el alumno debe movilizar.

---

con esta formalización y en general, los distintos autores aluden a ella como metáfora. Ahora bien, la formulación en términos de juego "contiene" algunas claves del modelo: a) el hecho de que a cada estado le corresponda un conjunto de estados posibles y no uno solo, muestra la necesidad de que el "jugador" tome decisiones para continuar y resalta el hecho de que ningún estado queda automáticamente seleccionado por lo que se ha realizado previamente; b) dado que cada "jugada" modifica el conjunto de estados posibles, el jugador puede evaluar su jugada (su decisión), analizando los efectos de la misma sobre el conjunto de estados. Necesidad de decidir, necesidad de leer las retroacciones que se ofrecen como producto de las decisiones y transformación (evolución) de los conocimientos a partir de dichas lecturas, son a nuestro juicio, tres ideas "fuertes" del modelo "situación". Ahora bien, muy lejos de la noción de "juego", estas ideas se encuentran en la descripción que hace Piaget (1975) respecto de la especificidad del método genético: *"lo específico del método genético consiste, por el contrario, en considerar lo virtual, o lo posible, como una continua creación perseguida por la acción actual y real: toda nueva acción, al mismo tiempo que realiza una de las posibilidades generadas por las acciones precedentes, inaugura a su vez un conjunto de posibilidades, hasta entonces inconcebibles."* (pag.49). Con esta cita queremos resaltar las raíces en la Epistemología genética de Jean Piaget, que tiene el modelo "situación".

La interacción con el medio puede ser tal que sea suficiente que los conocimientos que utiliza el alumno queden en el terreno de lo implícito. Se trata en ese caso de una situación de acción. Si la interacción con el medio requiere de intercambios de informaciones entre dos sujetos que cooperan en una tarea y para la cual no disponen de los mismos recursos –es decir hay una asimetría entre ellos que los "obliga" a intercambiar la información- estamos ante una situación de formulación. Por último, las situaciones de validación son aquellas en las que hay un intercambio entre los sujetos, acerca del valor de verdad de proposiciones que conciernen al "medio". Notemos que las situaciones de formulación y de validación comportan una dimensión social en el sentido en que la realización de la situación requiere de la presencia de "otros". De alguna manera, las interacciones relativas a las situaciones de formulación y de validación representan la naturaleza social de los saberes matemáticos (Laborde, C; 1991).

¿Quién es el sujeto de este modelo "situación"? Pensando en el tipo de interacción que se describe, aceptemos por el momento que el sujeto es un "sistema de conocimientos" (Perrin-Glorian, M.J; 1999), y veremos más adelante cómo se vincula este sujeto con el alumno.

Dos condiciones son inherentes a la noción de situación adidáctica:

1) el sujeto debe poder elegir entre varias estrategias, entendiendo que cuando se hace una opción, rechaza en simultáneo, otras alternativas;

2) la situación tiene una finalidad[6] que puede identificarse de manera independiente del conocimiento a producir.

¿Por qué Brousseau "pide" estas condiciones para las situaciones a didácticas?

La idea de elección múltiple está sustentada en la "necesidad" de provocar un juego entre anticipaciones y decisiones, a partir del cual el sujeto va modificando sus esquemas y produciendo conocimiento. La posibilidad de elegir –y esto también ha sido objeto de malentendidos desde nuestro punto de vista- se va construyendo en las sucesivas instancias (jugadas) de la situación, es decir, en la medida en que el alumno al interactuar una y otra vez con el mismo tipo de problema, va modificando su sistema de decisiones gracias a las lecturas que hace de las retroacciones del medio. Las nuevas relaciones que va incorporando amplían el espectro de posibles que el alumno puede concebir y dan lugar al rechazo consciente de las decisiones erróneas.

Señalemos además, que desde el punto de vista del investigador que diseña y estudia una situación didáctica, esta condición teórica que le exige identificar un conjunto de posibles para la situación, ofrece elementos para interpretar que, en la situación real, el alumno no es conducido *"como por un carril"* a la solución del problema. *("La situación debe conducir al alumno a hacer lo que se busca, pero al mismo tiempo no debe conducirlo."* (Brousseau, G; 1988 b).

Concebir una finalidad para la situación, ofrece un espacio para la validación. Efectivamente, la lectura de las retroacciones del medio en términos de "distancia" a la finalidad buscada, habilita al sujeto para conocer la pertinencia de sus decisiones, incorporando la

---

[6] El término "finalidad" alude a un cierto objetivo de la tarea a realizar, que puede identificarse en términos de acción.

aceptación o el rechazo de las mismas con la consiguiente evolución de los conocimientos[7]. Señalemos sin embargo, que esta lectura de las retroacciones no es mecánica sino que supone una confrontación entre la anticipación y la constatación, que da lugar a un proceso de análisis de las relaciones puestas en juego y de búsqueda de elementos que ayuden a modificar las decisiones sancionadas como erróneas. En otros términos, las respuestas positivas o negativas del medio, serán retroacciones solamente si son interpretadas por el sujeto en relación con los conocimientos que dieron lugar a las acciones.

Es claro que estas condiciones no "garantizan" que un alumno aprenda, ningún modelo teórico podría garantizar el trabajo personal que supone aprender. Sin embargo, para el investigador que diseña y estudia una situación didáctica, tener presente el modelo requerirá

- hacer un análisis que implique pensar qué motivación cognitiva conduce a producir tal o cual estrategia como la solución del problema propuesto (1986);
- analizar por qué una solución al problema puede leerse en términos de un conjunto de conocimientos puestos en juego;
- explicar por qué la producción de un cierto conocimiento sería un medio más económico o más ajustado que otro para resolver un cierto problema;
- identificar los elementos de una situación que devolverían al alumno información sobre los resultados de su producción y concebir a partir de los mismos cómo podrían evolucionar los conocimientos iniciales puestos en juego en la situación.

Todos estos análisis dan un conocimiento a priori de la situación que se va a estudiar, que permite construir un conjunto de observables[8] que se tornarán esenciales para interpretar los datos del trabajo experimental. O sea, las situaciones que se diseñan no pueden determinar el proceso de aprendizaje, pero en el momento de la elaboración de las mismas, es fértil pensarlas como si realmente lo determinaran, porque de esa manera el investigador se ve exigido a producir análisis que lo lleven a considerar tres aspectos esenciales del proceso de aprendizaje como son la **producción**, las **transformaciones** y la **validación** de los conocimientos.

3.1 Acerca del alcance de la noción de situación fundamental

Señalábamos en la introducción que Brousseau postula que **para todo conocimiento** existe una situación fundamental que de alguna manera representa la problemática que permite la emergencia de dicho conocimiento. Esto significa que el conocimiento en cuestión aparece

[7] En situaciones complejas en las que hay muchos pasos para lograr la finalidad, no siempre es posible evaluar las decisiones intermedias en términos de esta finalidad. A raíz de un problema en el que había que identificar cuestiones intermedias, Marie-Jeanne Perrin (1999) señala justamente que el objeto "identificar cuestiones intermedias" es un objeto de la situación que, en la medida en que no puede ser descontextualizado, no es fácilmente asimilable al aprendizaje de otros conocimientos más estrictamente matemáticos.

[8] En Piaget, J. (1978) se plantea que el observable es aquello que el sujeto cree comprobar en el objeto y no simplemente aquello que es comprobable. Esto equivale a decir que una comprobación nunca es independiente de los instrumentos de registro de los que dispone el sujeto.

como la estrategia óptima para resolver el problema involucrado. *"Cada conocimiento puede caracterizarse por una o más situaciones adidácticas que preservan su sentido y que llamaremos situaciones fundamentales."* (Brousseau, G; 1986).

Quisiéramos detenernos en tres cuestiones: a) el hecho de que Brousseau plantee la existencia de una situación fundamental como axioma, (Brousseau, G; 1988 a), b) la cuantificación que hace de su axioma *(para todo conocimiento)* y c) la noción de estrategia óptima.

a) Pensamos que la utilización de la palabra "axioma" que Brousseau toma prestada de la matemática, de alguna manera "protege" al enunciado tanto de sus posibles detractores que afirmarían "que no es verdadero" como de sus adherentes ciegos que dándolo por verdadero no podrían plantearse la pregunta acerca de su dominio de validez. Al proponerlo como axioma, ya no tendría sentido estar o no estar de acuerdo con el enunciado, sino que se trataría de trabajar en una teoría que lo considera una condición de partida. Eventualmente, el trabajo teórico daría cuenta del dominio de validez de este "axioma", o sea del conjunto de conocimientos para los cuales existe una situación fundamental o, en otros términos, el axioma estaría definiendo cuáles son los conocimientos de los que se "ocupa" la Teoría: aquellos para los cuales existe una situación fundamental.[9] Es claro para nosotros que la Didáctica de la Matemática no está "sometida" a las mismas reglas metodológicas que la Matemática, razón por lo cual, lo que estamos diciendo tiene un sentido metafórico y no estricto.

b) Aunque Brousseau utiliza un cuantificador universal, *(para todo conocimiento)* él mismo advierte que no cualquier situación adidáctica característica de un conocimiento puede ser objeto de trabajo de un alumno: *"Pero el alumno no puede resolver de golpe cualquier situación adidáctica, el maestro le procura entre las situaciones adidácticas, aquellas que están a su alcance. Estas situaciones adidácticas, ajustadas a fines didácticos, determinan el conocimiento enseñado en un momento dado y el sentido particular que este conocimiento va a tomar, debido a las restricciones y deformaciones aportadas a la situación fundamental".*(1986). A propósito de esta cuestión, M.J. Perrin (1999) señala: *"l'identification abusive entre situation adidactique représentative d'un savoir et situation adidactique permettant une première rencontre avec ce savoir, dans une institution donnée, me paraît une cause de malentendus à l'intérieur de la communauté des chercheurs en didactique des mathématiques, y compris en France, et une difficulté dans l'articulation des divers cadres théoriques"*[10].

Pensamos que estas consideraciones abren espacio para pensar, sin entrar en contradicción con la Teoría de Situaciones, que para algunos conocimientos no sería factible (ahora sí en términos de realidad) concebir su entrada a la enseñanza a través del canal de situaciones adidácticas. Así, Aline Robert (1998) establece relaciones entre el tipo de conocimiento al que se apunta y el tipo de escenario didáctico "adaptado" a esos conocimientos. Esta investigadora plantea que es difícil "inicializar" una secuencia a través de un "buen"

[9] Discutido con Carmen Sessa, en conversaciones telefónicas y tempraneras.

[10] La identificación abusiva entre situación adidáctica representatitva de un saber y situación adidáctica que permite un primer encuentro con ese saber, en una institución dada, me parece una causa de malentendidos en el interior de la comunidad de investigadores en didáctica de la matemática, inclusive en Francia, y una dificultad en la articulación de los diversos marcos teóricos.

problema que lleve a los alumnos "cerca" [11] de los conocimientos a los que se apunta, cuando existe una gran distancia entre lo viejo y lo nuevo. Más específicamente, ella señala esta dificultad para introducir nociones generalizadoras, unificadoras y formalizadoras. Dado que la relación viejo-nuevo atraviesa nuestro trabajo y que la cuestión de la producción de escrituras próximas a las algebraicas supone un trabajo de formalización y forma parte de nuestra indagación, hemos tomado en cuenta estas reflexiones para nuestro estudio y las retomaremos para fundamentar algunas hipótesis de trabajo más locales.

c) Quisiéramos señalar finalmente que apoyados en la idea de que la situación es una interacción, concebimos que la noción de estrategia óptima es relativa a un sistema de conocimientos (un sujeto) y no puede ser considerada independientemente del mismo. Sin embargo pensamos que en algunos textos se la considera como inherente al problema, olvidando justamente el hecho de que la situación es una interacción. La perspectiva que estamos planteando abre la posibilidad de concebir en el marco de la Teoría que, para un mismo problema, pueden considerarse diferentes situaciones que dependen del sistema de conocimientos que entra en interacción con el problema.[12]

Hemos analizado el modelo "situación adidáctica" que describe las interacciones entre un sujeto y un medio que dan lugar a un proceso de producción de conocimientos matemáticos por parte del sujeto. ¿Cómo se vincula esa producción con aquello que la escuela señala como saberes a ser enseñados? Nos ocuparemos a continuación de la relación entre conocimiento y saber, para plantear luego la cuestión de la transformación de los conocimientos en saberes, trabajo que desde la Teoría de Situaciones se "controla" a través de la interacción entre alumno y docente, en la relación didáctica que ambos sostienen.

4. Acerca de la relación entre conocimiento y saber

Brousseau marca una relación, pero también una distancia, entre el conocimiento producto de la interacción con un medio resistente y el saber matemático: *"Les connaissances sont les moyens transmissibles (par imitation, initiation, communication, etc.), mais non nécessairement explicitables, de contrôler une situation, et d'y obtenir un certain résultat conformément à une attente et à une exigence sociale. Le savoir est le produit culturel d'une institution qui a pour objet de repérer, d'analyser et d'organiser les connaissances afin de faciliter leur communication".*[13] (Brousseau y Centeno, 1991, citado por Bloch, I; 1999).

Parece quedar claro en esta cita, que el sujeto en interacción con un medio resistente obtiene conocimientos que le permiten controlar la situación y que tienen una referencia en el

[11] Si bien no es una cita textual, las comillas se extraen del original.

[12] La idea de considerar diferentes situaciones en función de los conocimientos de los alumnos, fue planteada por Marie-Jeanne Perrin Glorian (1999).

[13] Los conocimientos son los medios transmisibles (por imitación, iniciación, comunicación, etc.) pero no necesariamente explicitables, de controlar una situación y de obtener de ella un cierto resultado conforme a una expectativa y a una exigencia social. El saber es el producto cultural de una institución que tiene por objetivo identificar, analizar y organizar los conocimientos a fin de facilitar su comunicación.

saber matemático. Sin embargo, en la medida en que estos conocimientos se producen en un contexto particular y están dirigidos a cumplir una finalidad, no es reconocible de manera inmediata su pertenencia al discurso de la disciplina. La posibilidad de hablar de ellos sin referirse al contexto en el que se producen, de reconocer otras posibles utilizaciones, de establecer el ámbito de validez, de realizar conexiones con otros conocimientos próximos con los que podrían formar un sistema organizado, son asuntos que no emergen de manera automática como producto de la interacción con una situación específica sino que requieren un trabajo de reflexión sobre las situaciones –sobre las acciones realizadas a propósito de las mismas-. Según G. Lemoyne (1997) este trabajo de conversión de conocimientos en saberes, se controla desde la Teoría de Situaciones a través de procesos colectivos de debates gestionados por el docente, pero que suponen siempre reconstrucciones personales de cada uno de los alumnos.

Pensamos que la diferenciación entre conocimiento y saber es uno de los elementos constitutivos del proyecto de la didáctica como disciplina autónoma de la psicología cognitiva y se remonta en Guy Brousseau a momentos anteriores a la formulación de la Teoría de Situaciones, en los que él mismo fue alumno de psicología cognitiva:

"En los años 60, siendo todavía estudiante de matemáticas, y al mismo tiempo alumno de Pierre Gréco en Psicología cognitiva, me impresioné por su habilidad para concebir dispositivos experimentales destinados a poner en evidencia la originalidad del pensamiento matemático de los niños en las etapas de su desarrollo. Sin embargo, me daba cuenta de que no se hacía ningún esfuerzo por analizar los dispositivos mismos y por hacer explícita la relación entre éstos y la noción matemática cuya adquisición era estudiada. Asimismo, cuando Piaget utilizaba los axiomas de Peano para identificar EL desarrollo de EL conocimiento de EL número en EL niño, estos singulares me parecían apuestas interesantes pero arriesgadas, más que evidencias. Yo podía producir "definiciones" de números naturales, matemáticamente equivalentes a los axiomas de Peano, pero de complejidades cognitivas muy diversas. La equivalencia matemática no tiene como consecuencia la equivalencia cognitiva. Igualmente, bastaba con variar un poco los números propuestos para ver que el conocimiento DEL número era de hecho el conocimiento de algunos números. ¿Qué es lo que nos permitiría declarar que es exactamente este conocimiento matemático el que el sujeto conoce y no otro más general o más particular? Estas observaciones no eran objeciones a los trabajos de Piaget, sino al uso muy preciso que se quería hacer de los estudios piagetianos para hablar de las adquisiciones de un alumno particular en una situación particular y para inferir prescripciones didácticas".[14] (1999)

Aunque el texto citado no hace referencia explícita a la diferencia entre conocimiento y saber, - no con esas palabras al menos- interpretamos que sí se refiere a la misma, al señalar por un lado la distinción entre equivalencia matemática y equivalencia cognitiva, y, por otro lado, al poner el acento en la necesidad de considerar la relación entre el contexto (los dispositivos, para

[14] En Piaget (1975) se establece un cierto paralelismo entre la construcción axiomática del número natural (considerando los axiomas de Peano) y la construcción genética, paralelismo que no implica ni identificación ni divergencia. El problema de la transformación de unas construcciones en otras no está planteado en este texto.

el caso aludido) y la noción matemática que se estudiaba. Justamente esta relación, entre las situaciones y los significados matemáticos, es un objeto central de la Teoría de Brousseau.

Estudiar a partir del análisis de un saber, condiciones sobre las situaciones que den lugar a la elaboración de conocimientos referidos a dicho saber y plantear la cuestión de la transformación de dichos conocimientos en saberes, son dos "asuntos" del modelo teórico de Brousseau. Estas cuestiones son sintetizadas en la siguiente afirmación (1999): *"la enseñanza se convierte en una actividad que no puede más que conciliar dos procesos, uno de aculturación y el otro de adaptación independiente".*

La enseñanza en tanto proceso de aculturación plantea la necesidad de conceptualizar teóricamente las interacciones entre el docente, representante del saber cultural y los alumnos que constituyen con el docente un espacio social de producción de conocimientos. Como hemos señalado en la introducción, Brousseau modeliza estas interacciones a través de la noción de **contrato didáctico**, que desarrollaremos a continuación.

5. La noción de contrato didáctico

La noción de contrato didáctico incorpora al análisis de los fenómenos relativos a la enseñanza y al aprendizaje de la matemática un aspecto esencial: la intención de que el alumno aprenda un saber cultural, intención que tiene el docente y que –veremos- necesariamente el alumno debe compartir. *("Qu'est-ce que le didactique? Il est consubstantiel à l'existence d'une intention"*, Chevallard, Y.;1991, citado por Sensevy, G.; 1998).

Es en la relación que sostienen el docente y el (los) alumno(s) a propósito de la situación adidáctica, o, más en general, a raíz de cierto objeto matemático, –esta es la relación didáctica- que el docente va comunicando, a veces explícitamente, pero muchas veces de manera implícita, a través de palabras pero también de gestos, actitudes y silencios, aspectos vinculados al funcionamiento del asunto matemático que se está tratando en la clase. Este juego sutil, muchas veces difícil de atrapar, en el que a raíz del trabajo en clase con respecto a cierto objeto matemático, se negocian significados, se transmiten expectativas mutuas, se sugieren o se infieren modos de hacer, se comunican o se interpretan (explícita o implícitamente) normas matemáticas, es el contrato didáctico.

¿Por qué el término "contrato"? Las interacciones entre docente y alumno en la clase, están muy marcadas por lo que cada uno de los actores espera del otro a propósito de un cierto conocimiento. Efectivamente, las prácticas cotidianas del aula llevan a los alumnos a hacerse una representación interna acerca de aquello que está permitido y aquello que no es posible, con relación a cierta cuestión matemática. De esta manera los alumnos elaboran un conjunto de normas que monitorean su accionar, en el sentido de que habilitan ciertas posibilidades e inhiben otras. Por ejemplo, hemos encontrado en nuestro trabajo, que a propósito de los problemas en los que hay un grado de libertad entre las variables, muchos alumnos no se atrevían a atribuir ellos algún valor a una de las variables para comenzar a operar a partir de ese valor, porque pensaban que eso era obtener un número al azar, lo cual "no está permitido en matemática" (*"no se puede poner un número al azar, siempre te preguntan de dónde salió ese número"*).

El docente por su parte, tiende a suponer que controla las elaboraciones del alumno a través de lo que se va haciendo explícito en la clase. Es en el momento en que el estudiante pone en juego una conducta inesperada por el docente, en el que este último toma conciencia de que muchas de las construcciones del alumno escapan completamente a su control.

Cuando uno de los dos actores de la relación didáctica (docente o alumno) hace algo con respecto al conocimiento que es inesperado por el otro, se produce una ruptura, y todo ocurre como si hubiera habido un contrato que regulara las conductas permitidas: *"...las cláusulas de ruptura y de realización del contrato no pueden ser descritas con anterioridad. El conocimiento será justamente lo que resolverá la crisis nacida de estas rupturas que no pueden estar predefinidas. Sin embargo en el momento de estas rupturas todo pasa como si un contrato implícito uniera al profesor y al alumno: sorpresa del alumno que no sabe resolver el problema y que se rebela porque el profesor no le ayuda a ser capaz de resolverlo, sorpresa del profesor que estima sus prestaciones razonablemente suficientes..., rebelión, negociación, búsqueda de un nuevo contrato que depende del "nuevo" estado de los saberes...adquiridos y apuntados"*(Brousseau, G.; 1986).

En tanto la noción de contrato didáctico es la herramienta teórica que modela las interacciones entre el docente y el alumno, para avanzar en la comprensión de dicha herramienta debemos detenernos en la conceptualización que se hace en la Teoría de Situaciones, respecto del papel del docente, en función de las diferentes intencionalidades didácticas.

5.1 La conceptualización de la acción docente: devolución e institucionalización

Como venimos diciendo, el modelo "situación adidáctica" da cuenta de la interacción autónoma por parte del alumno con un cierto medio resistente cuyo núcleo es un problema matemático. Recordemos que Brousseau señala la necesidad de adaptarse a un medio como condición de aprendizaje y define como uno de los roles del docente el de *devolver* al alumno la responsabilidad de hacerse cargo del problema que le propone, olvidando –o por lo menos no poniendo en primer plano- la intencionalidad didáctica del mismo (1988 b): *"El trabajo del docente consiste pues, en proponer al alumno una situación de aprendizaje para que produzca sus conocimientos como respuesta personal a una pregunta y los haga funcionar o los modifique como respuesta a las exigencias del medio y no a un deseo del maestro. Hay una gran diferencia entre adaptarse a un problema que plantea el medio, insoslayable, y adaptarse al deseo del docente. La significación del conocimiento es completamente diferente. Una situación de aprendizaje es una situación donde lo que se hace tiene un carácter de necesidad en relación con obligaciones que no son arbitrarias ni didácticas.(...) No basta "comunicar" un problema a un alumno para que ese problema se convierta en* ***su*** *problema y se sienta el único responsable de resolverlo. Tampoco basta que el alumno acepte esa responsabilidad para que el problema que resuelva sea un problema "universal" libre de presupuestos didácticos. Denominamos "devolución" a la actividad mediante la cual el docente intenta alcanzar ambos resultados."*

Por otro lado, Brousseau atribuye al docente un papel esencial en el proceso de transformación de los conocimientos en saberes: *"Fue así como "descubrimos"(¡!) lo que hacen todos los docentes en sus clases pero que nuestro esfuerzo de sistematización había* *hecho inconfesable: deben tomar nota de lo que han hecho los alumnos, describir lo que ha sucedido y lo que tiene una relación con el conocimiento al que se apunta, dar un estatuto a los acontecimientos de la clase, como resultado de los alumnos y como resultado del docente, asumir un objeto de enseñanza, identificarlo, relacionar esas producciones con los conocimientos de los otros (culturales o del programa), indicar que ellos pueden ser reutilizados .(...) La consideración "oficial" del objeto de enseñanza por parte del alumno y del aprendizaje del alumno por parte del maestro, es un fenómeno social muy importante y una fase esencial del proceso didáctico: ese doble reconocimiento constituye el objeto de la INSTITUCIONALIZACIÓN."*(1988 b).

Pensamos que a través de las nociones de devolución e institucionalización Brousseau define lo esencial del trabajo del docente. Ahora bien, aparece nuevamente a propósito de estas cuestiones el problema de la relación entre la teoría y la realidad. Efectivamente, los textos de Brousseau, señalan desde nuestro punto de vista, marcas teóricas que definen funciones del docente, pero no nos dicen –no pretenden decirnos, creemos- cuáles son los gestos efectivos del docente que "harían" que el alumno asumiera la responsabilidad matemática del problema que se le plantea ni a través de qué tipo de discurso el docente "lograría" que el alumno articule su producción con el saber cultural. Una primera lectura de los textos que hemos citado, nos llevó, hace ya bastante tiempo, a una interpretación que hoy es para nosotros completamente esquemática y poco interesante para comprender los hechos de las clases: existirían algunos actos puntuales por los cuales el docente devolvería al alumno el problema, el alumno lo resolvería y el docente institucionalizaría los conocimientos producidos en la situación adidáctica. Sin embargo, esta manera de concebir las cosas no nos satisfacía ya que entendíamos que ningún acto del docente puede garantizar que el alumno se haga cargo del problema en el sentido en que lo plantea Brousseau, aunque sí pueden generarse mejores o peores condiciones para que ello ocurra.

5.1.1 Devolución e institucionalización concebidos como procesos

Dos trabajos que avanzan en la conceptualización del rol del docente y en el análisis de los conceptos de devolución e institucionalización fueron para nosotros importantes para revisar esa primera lectura que recién mencionábamos. Tanto Marie-Jeanne Perrin Glorian (1993), como Claire Margolinas (1993) conciben la devolución como un proceso de negociación con el alumno, que se sostiene durante todo el transcurso de la situación adidáctica. En realidad Perrin Glorian va un poco más allá y sostiene la posibilidad de una devolución *"après coup"* a través de un retorno reflexivo sobre la acción, para aquellos alumnos que han funcionado de manera no científica en la situación adidáctica.

Por otro lado, podría ocurrir que los alumnos dispusieran de ciertos conocimientos necesarios para la situación, pero que no los activaran en el momento en el que interactúan con la misma. El docente debería intervenir en ese caso para activar dichos conocimientos, y estas intervenciones, en la medida en que intentan sostener al alumno en la situación entran también en el marco de la devolución (Perrin, M.J; 1999).

Perrin Glorian (1993) plantea que para que la devolución sea posible y para que el alumno pueda articular los conocimientos producidos en la situación adidáctica con la institucionalización que realiza el docente, es necesario que el alumno tenga un proyecto de aprendizaje que le permita iniciar desde el vamos un proceso de descontextualización de los conocimientos que va a producir. La elaboración de este proyecto es una construcción del alumno con la que el docente colabora, lo cual lleva a pensar en la institucionalización y en la devolución como procesos imbricados e incluso contemporáneos. En el artículo ya citado, M.J. Perrin Glorian propone (1993):

"l'institutionnalisation des connaissances commence pour nous dès le tout début de la dévolution puisqu'il faut déjà que le maître donne à l'élève, s'il ne l'a pas, le projet d'acquérir ces connaissances, d'où l'imbrication des processus de dévolution et d'institutionnalisation qui sont de plus, dans une certaine mesure, contemporains"[15].

De una manera que consideramos próxima a la noción de "proyecto del alumno", A. Mercier (1998) plantea que, aunque no se trabaje sobre situaciones adidácticas en el sentido en que se describen en la Teoría de Situaciones, para que haya aprendizaje debe existir una dimensión adidáctica en la relación didáctica, que define como *"la part irréductible de l'élève dans le partage de l'intention d'enseigner*[16]. Estos aportes amplían la noción de "intencionalidad didáctica" incluyendo en ella no sólo al docente sino también al alumno. En este sentido, nos parece que para tener una definición del alumno, a la concepción del sujeto que interactúa con la situación adidáctica en tanto sistema de conocimientos, deberíamos "agregar" que se trata de un sistema de conocimientos con intención de conocer. Esta intención debería incluir también la consideración de las expectativas que el sujeto piensa que se tienen sobre él. Un sistema de conocimientos, con intención de conocer que incluye la consideración de lo se supone que debe aprender en la escuela, es entonces para nosotros, una buena definición del alumno.

5.1.2 La comunicación de normas de trabajo matemático como parte de la devolución

En nuestro trabajo hemos observado, a propósito de los problemas que les proponíamos a los alumnos, una serie de intervenciones docentes que apuntaban a sostener una interacción adidáctica con esos problemas y que, desde nuestro punto de vista pueden "alojarse" en el concepto de devolución. Estas intervenciones, basadas en las producciones de los alumnos, apuntaban a coordinar distintas propuestas de los integrantes del grupo, a señalar eventuales contradicciones, a lograr que los alumnos explicitaran lo que acababan de realizar para ayudarlos a reorientar su trabajo, a indagar las razones por las cuales los alumnos habían elegido cierto camino, a demandar formas de validación si las mismas no se habían puesto en juego en la interacción con el problema.

Notemos que lograr que los alumnos asuman la responsabilidad matemática de los problemas, -esto es la devolución- es también lograr que acepten una serie de normas matemáticas de trabajo, que los alumnos van aprendiendo en un período largo que excede en

[15] La institucionalización de los conocimientos comienza para nosotros desde el momento mismo de la devolución porque ya ahí es necesario que el maestro de al alumno, si no lo tiene, el proyecto de adquirir esos conocimientos; en ese sentido los procesos de devolución y de institucionalización se imbrican y son, en cierta medida, contemporáneos.
[16] La parte irreductible del alumno en el reparto de la intención de enseñar

mucho el tiempo con el que trabajan sobre un concepto específico, y que el docente debe actualizar a raíz de una tarea particular. Por ejemplo, cuando el docente identifica que dos alumnos tienen puntos de vista contradictorios y les señala que deben ponerse de acuerdo, está comunicando implícitamente que *"no se pueden plantear afirmaciones contradictorias"*, cuando demanda explicaciones está diciendo que *"es necesario argumentar a favor de lo que se propone"*, etc. La devolución exige entonces que el docente garantice también ciertas condiciones sobre el plano de las normas, necesarias para el trabajo de los alumnos en el problema, condiciones que en muchos casos no podrían establecerse a priori porque dependen del tipo de enfoque que hacen los alumnos y del tipo de interacciones que se producen entre ellos.

El problema de la elaboración de las normas está atravesado por las interacciones que se generan en la clase orientadas y conducidas por el docente. Dado que se trata de una cuestión que no sólo está ligada a la problemática de la devolución, la retomaremos al sintetizar nuestra perspectiva sobre la noción de contrato didáctico y mencionaremos otros aportes que, fuera del marco de Teoría de Situaciones, proponen ideas que nos parecen muy próximas.

5.2 Las elaboraciones del alumno: entre las resistencias del medio y el deseo del docente

Quisiéramos retomar la oposición que hace Brousseau entre adaptarse al medio y adaptarse al deseo del maestro. Pensamos que la misma podría dar lugar a una visión según la cual se considerara como un conocimiento degradado aquello que el alumno elabora al tratar de interpretar los gestos del docente en términos de *"lo que se puede o no se puede"*, *"lo que es o lo que no es"*, con relación a cierta cuestión matemática. Como si la interacción adidáctica garantizara una construcción genuinamente matemática y aquello que el alumno aprende interpretando lo que el maestro espera de él, tuviera un estatuto menor. En realidad, en el modelo de Brousseau, la interacción adidáctica ofrece formas de validación de la producción matemática a través de las propiedades matemáticas del medio, validación que es mucho más brumosa cuando el alumno accede a algún aspecto del conocimiento a través de la interpretación que hace de la intención del docente. (De hecho el alumno establece muchas veces reglas falsas como producto de esas interpretaciones).

Sin embargo, no compartimos ese modo de ver las cosas que divide aguas atribuyendo "lo genuinamente matemático" a lo adidáctico y lo "externo al saber" a lo que es de naturaleza didáctica. En primer lugar, porque como lo expresa Brousseau, el alumno no podría aprender si no se jugara la intencionalidad del docente en la relación didáctica. Por otro lado, los conocimientos que el alumno necesita sobrepasan completamente lo que pudo haber construido como producto de sus interacciones adidácticas. Sin esa relación contractual que lo une al docente a propósito de los objetos matemáticos, la escena didáctica -que eventualmente pusiera en funcionamiento una interacción adidáctica- ni siquiera podría arrancar.

Al analizar los registros de las clases de nuestro trabajo experimental, hemos encontrado que algunos alumnos producen cambios significativos en sus conocimientos, a partir de interpretar no tanto el contenido de una intervención docente, sino más bien la intencionalidad de la misma. Tomemos un ejemplo: en una de las clases en las que trabajamos, un grupo de alumnos, a raíz de un problema de división entera, había encontrado que en el caso particular con el que trataban en ese momento[17], se cumplía que "(divisor + cociente) x resto = dividendo" y propusieron esa relación como un procedimiento para hallar el dividendo, dados el divisor, el cociente y el resto. Algunos de los niños del grupo pusieron en cuestión la pertinencia de la relación utilizada, en tanto que otros la aceptaron sin más. Cuando la maestra observó la producción de los niños, les planteó: *"fíjense si esto se vuelve a dar"*. Esta intervención que implícitamente está comunicando que para que la regla sea válida debe cumplirse en todos los casos, desencadenó en algunos de los alumnos de ese grupo –formado tanto por niños que inicialmente habían dudado como por otros que estaban seguros de su descubrimiento- un proceso de búsqueda que los llevó a modificar su primera postura para comenzar a comprender que una cierta regla en un dominio, para ser tal, debe cumplirse para todos los elementos de dicho dominio. Pensamos que en un caso como éste, los alumnos, por la autoridad en tanto representante del saber que le confieren al docente, interpretan y asumen el contenido implícito que tiene su intervención y reorganizan sus conocimientos a partir de dicha interpretación. En algún sentido hay una adaptación social (los niños se apoyan en la autoridad de la maestra) que es al mismo tiempo cognitiva (se desencadena un proceso de reorganización de conocimientos).

En este caso, el medio no ha sido suficiente para sostener el funcionamiento adidáctico de los alumnos, la intervención de la maestra tiene una intencionalidad que, al ser interpretada por los niños, les permite agregar una nueva regla a partir de la cual se relanza una interacción adidáctica de los alumnos con el medio. Pensamos entonces que se trata de un momento en el que es muy difícil separar lo didáctico de lo adidáctico. El alumno capta una nueva cláusula del contrato didáctico ligado al conocimiento que está en la escena, pero lo hace revisando sus propios esquemas de conocimiento y no de una manera formal. ¿Son estos elementos suficientes para relativizar la contraposición tan tajante entre adaptarse al "medio" y adaptarse al deseo del docente y, para revalorizar la consideración por parte del alumno de los deseos del docente, como un motor de avance en su aprendizaje? Pensamos que sí, y creemos que nuestro trabajo experimental abona esta afirmación.

5.2.1 La adaptación social y cognitiva desde otro marco teórico

Además del soporte teórico que ofrece la noción de contrato didáctico, las reflexiones anteriores han estado nutridas por un trabajo sobre el análisis de conversaciones en la relación tutorial (Trognon, A; 1999). Este autor toma como objeto de análisis secuencias de conversaciones en tanto realizaciones de acontecimientos sociales y cognitivos. Identifica tres propiedades fundamentales de las conversaciones: la localidad, la sobredeterminación y la procesualidad. La noción de localidad da cuenta de que las cuestiones que emergen de una conversación surgen como una composición gradual más que como un plan previamente establecido. La noción de sobredeterminación significa que todo elemento conversacional es al mismo tiempo un acontecimiento social y cognitivo y que estos dos aspectos no son separables o independientes: lo social contribuye a lo cognitivo y recíprocamente. La noción de

[17] Los alumnos debían hallar el dividendo dado el divisor, 18; el cociente, 34 y el resto 12. En este caso 18 x 34 + 12 da el mismo resultado que (18 + 34) x 12. El ejemplo será analizado en el capítulo 4.

procesualidad, que de alguna manera sintetiza las anteriores, da cuenta de que los elementos de una secuencia conversacional son progresivamente elaborados a medida que se desarrolla la secuencia. Un intercambio está compuesto por actos de lenguaje, que son definidos como la aplicación de una *fuerza* sobre un *contenido* proposicional. La fuerza define el tipo de acción (asertiva, directiva, expresiva, declarativa, etc.) que realiza el acto de lenguaje. El contenido proposicional define la representación (o la cognición) con relación a la cual la fuerza se pone en juego. Es esta doble composición de cada uno de los elementos de una conversación (la intención o fuerza y el contenido) la que nos resulta emparentada con la noción de contrato didáctico, ya que pone en evidencia que en una conversación siempre interviene la interpretación de ambos componentes.

El autor señala que en una conversación entre personas que mantienen una relación tutorial, como es el caso del maestro y el alumno, los participantes tienen roles complementarios: para el novicio se trata de aprender, para el tutor se trata de hacer aprender un saber. Si bien la conversación tiene una finalidad, esta finalidad no determina el transcurso de la conversación, que se desplegará a través de todo un abanico de actos de lenguaje. Estos actos de lenguaje darán lugar a que los participantes manifiesten sus intenciones explícita o implícitamente de manera tal que pueden encontrarse en la conversación, intervenciones que tienen el mismo contenido pero que difieren en su fuerza. Es justamente gracias a este fenómeno que se constituye la relación tutorial y en particular la asimetría que la caracteriza. Efectivamente, en el diálogo hay reglas implícitas como por ejemplo: "cuando el novicio declara que no ha logrado realizar aquello que se consideraba que debía lograr, el experto interpreta su afirmación como un pedido de explicación o como un requerimiento de ayuda". En tanto relación social de dos personas que tienen una tarea en común, la relación tutorial sobredetermina las enunciaciones tanto a nivel de su producción como de su interpretación. Trognon utiliza una técnica para el análisis de las conversaciones, que le permite estudiar cómo la dinámica de la interlocución produce conjuntamente lo social y lo cognitivo.

La idea de que la intencionalidad del tutor da lugar a una interpretación por parte del novicio que va provocando modificaciones en su producción que pueden considerarse adaptaciones cognitivas, nos llevó a tratar de identificar en nuestros registros la "fuerza" de algunas intervenciones docentes y a analizar las respuestas del alumno en función de la interpretación que éste hacía de dicha intencionalidad. A partir de estos análisis reafirmamos la posibilidad de que se realice en simultáneo una adaptación social y cognitiva o, en términos de Teoría de Situaciones, que lo didáctico y adidáctico sean contemporáneos.

5.2.2 Las retroacciones de los pares: un espacio entre lo adidáctico y lo didáctico

Al plantear las interacciones básicas que se modelizan en Teoría de Situaciones, hemos considerado las del alumno con un medio y las del docente con el alumno. Las interacciones entre los pares, aunque están presentes en casi todos los análisis de distintos trabajos experimentales realizados en el marco de la teoría, no están desde nuestro punto de vista suficientemente conceptualizadas.

Las situaciones de formulación y de validación –lo hemos señalado- proponen un tipo de organización en la que la interacción entre los pares es una condición necesaria para resolver el problema en cuestión. De alguna manera el problema matemático se instala en una organización social, con el objeto de provocar la producción de informaciones o proposiciones referidas al objeto con el que se trabaja. (Laborde, C; 1991).

¿Qué sucede cuando los alumnos colaboran entre sí para resolver un problema aunque la organización de la situación no requiera de esta interacción de manera ineludible? Este es el asunto sobre el que desde nuestro punto de vista hace falta conocer un poco más. Si bien son numerosos los trabajos que dan cuenta de la producción en colaboración –muchos provenientes de la psicología social genética, otros que toman como referencia las ideas de Vigotsky y de la escuela soviética, otros que se refieren al análisis interlocutorio, otros de la corriente del interaccionismo simbólico, etc- pareciera que es necesario avanzar en el estudio de estas interacciones en el marco específico de la clase de matemática. Efectivamente, en las fases adidácticas –por lo menos así hemos organizado nuestra experimentación- los alumnos trabajan generalmente en pequeños grupos. Los aportes de unos pueden modificar el sistema de decisiones de otros. ¿Cómo se consideran las intervenciones de un alumno que cuestiona o contradice la producción de un par que participa junto con él en la obtención de la misma finalidad? Dado que el planteo de un alumno hacia la producción de otro no tiene en principio la atribución de autoridad que tiene el docente, y dado que tampoco este alumno que ha hecho alguna objeción puede tener respuestas matemáticas (en el sentido en que antes definimos las respuestas matemáticas del medio) porque está elaborando junto con los otros compañeros algún conocimiento en común, nos parece que las interpretaciones que hace quien recibe las objeciones, son de tal naturaleza que no pueden asimilarse ni a las retroacciones del medio ni a las intervenciones del docente.

Al analizar los registros de las clases en las que hemos trabajado, aparece un abanico muy amplio de interacciones entre los alumnos, que en general tienden a la colaboración mutua, pero con estrategias muy diversas. En algunos casos, frente al bloqueo de un compañero, quien ya ha elaborado cierta aproximación a un problema puede ayudar a que se termine de comprender cuál es la tarea (el alumno que ha comprendido estaría colaborando en el proceso de devolución del otro), puede dar la solución sin explicar las razones (estaría ayudando a su compañero a 'tener éxito tal vez resignando la comprensión) o puede apuntar a que el compañero comprenda de una manera más profunda. En las situaciones en las que no hay bloqueo, puede ocurrir que existan estrategias diferentes que responden a distintos implícitos, que haya posiciones contradictorias, que haya abordajes equivalentes, que haya construcción cooperativa. La consideración de todas esas intervenciones puede requerir la movilización de relaciones nuevas, la modificación de las decisiones, la producción de argumentos, la elaboración, en fin, de nuevo conocimiento. También puede ocurrir que un alumno responda a un criterio de autoridad de un compañero o que desestime su contribución por la posición social que éste tiene en la clase. En este sentido habría efectos de las interacciones más asimilables a efectos de contrato didáctico que a adaptaciones cognitivas.

Nos parece que estas ideas pueden encontrar un anclaje teórico en la conceptualización que hace A. Mercier (1998) de la clase como un espacio de producción cooperativa. Este autor identifica en el espacio de la relación didáctica, episodios en los que algunos alumnos tienen un funcionamiento adidáctico (los llama episodios biográficos). Estos episodios se hacen posibles en el marco de una interacción en la que participan otros alumnos: *"la relation didactique est le fait de plusiers partenaires qui partagent l'intention d'enseigner, relativement à un objet* *identifié en commun. Ces partenaires partagen aussi certaines actions d'enseignement relatives à cet objet. Car, identifier des episodes biographiques amène à observer l'action enseignante des élèves, envers eux –mêmes comme envers leurs condisciples.. "*[18]

Por otro lado, en algunos de los problemas que hemos planteado, la interacción con "los otros" si bien no es necesaria por la organización social de la situación, lo es por la naturaleza del problema que se resuelve. Por ejemplo, cuando los alumnos tienen que establecer la cantidad de soluciones de un problema que tiene varias o infinitas soluciones: para quienes sostienen la unicidad, el "medio" puede ofrecer retroacciones sobre la pertinencia o no de esa única solución encontrada, pero no puede aportar una conclusión respecto de la exhaustividad de la estrategia puesta en juego. Es en la interacción con otras soluciones, que se podrá objetar la idea de solución única. Notemos que ahora nos estamos refiriendo a la interacción entre pares posterior a una primera interacción de cada alumno con el problema. Es decir, se trata de la interacción con las relaciones ya establecidas por otro, a raíz del problema que se está resolviendo.

Agreguemos aún otra cuestión: esa interacción entre soluciones diferentes, puede ser fuente de nuevos problemas, algunos de los cuales sólo podrán ser planteados por el docente que es el único que los reconoce como tales. Por ejemplo, hemos encontrado que los alumnos pueden pensar que dos procedimientos de un mismo problema son ambos correctos pero que no "producen" las mismas soluciones. En tanto esto no es fuente de conflicto para los alumnos, sólo el docente podrá problematizar esta cuestión, pero podrá hacerlo una vez que hayan emergido las diferencias como producto de la interacción mencionada. En otros términos la norma según la cual dos procedimientos son equivalentes si y sólo si llevan al mismo conjunto solución, "necesita" tanto de la interacción entre pares (para que emerja la cuestión) como de la intervención del docente (para que la plantee como problema a discutir).

A partir de estas reflexiones, nos parece que sería importante avanzar en la identificación de tipos de cuestiones cuya emergencia requiere de la interacción con "otros" y de tipos de problemas para los cuales la validación solamente puede construirse cooperativamente.

5.3 La noción de contrato didáctico y la construcción de normas

Así como los procesos de producción científica están marcados por lo que J. Piaget y R. García denominan marco epistémico, (Piaget, J. y García, R.; 1982, García, R.; 2000, Castorina, J. A.; 2000) los procesos de producción de conocimientos en el aula están también atravesados por un sistema de normas y creencias que de alguna manera orientan el tipo de exploración, abordaje, búsqueda y validación que los alumnos están dispuestos a poner en juego. Utilizaremos las nociones de marco epistémico y de sistema cultural (Wilder, 1981, citado por Sierpinska, A; 1989) como referencias que si bien dan cuenta de fenómenos que ocurren en el ámbito de la producción científica y a una dimensión mucho mayor que la de un aula, son para nosotros útiles para explicar nuestra interpretación del proceso de construcción de normas en la

[18] La relación didáctica consiste en el hecho de varias personas involucradas unas con otras que comparten la intención de enseñar, con relación a un objeto identificado en común. Estas personas comparten también ciertas acciones de enseñanza con relación a este objeto. Identificar episodios biográficos lleva pues a observar la acción de enseñanza de los alumnos tanto con relación a ellos mismos como con relación a sus pares.

clase. Consideraremos también los trabajos de E. Yackel y P. Cobb (1996) sobre la construcción de normas sociomatemáticas y vincularemos esta producción con la noción de contrato didáctico.

Según R. García (2000): *"el marco epistémico representa un sistema de pensamiento, rara vez explicitado, que permea las concepciones de la época en una cultura dada y condiciona el tipo de teorizaciones que van surgiendo en diversos campos de conocimiento".*

En Piaget y García (1982) se propone: *"En la interacción dialéctica entre el sujeto y el objeto, este último se presenta inmerso en un sistema de relaciones con características muy diversas. Por una parte la relación sujeto-objeto puede estar mediatizada por las interpretaciones que provienen del contexto social en el que se mueve el sujeto (relaciones con otros sujetos, lecturas, etc.). por otra parte, los objetos funcionan ya de cierta manera –socialmente establecida- en relación con otros objetos o con otros sujetos. En el proceso de interacción, ni el sujeto ni el objeto son, por consiguiente, neutros. Y éste es el punto exacto de intersección entre conocimiento e ideología".*

Estas citas dan cuenta de la posición de los autores, según la cual el proceso de producción de conocimientos se despliega en un marco social en el que intervienen aspectos ideológicos (concepciones del mundo, valores, creencias, etc.) que condicionan el proceso de producción y atraviesan los instrumentos de conocimiento del sujeto.

Si bien la noción de marco epistémico se refiere a las concepciones que condicionan la producción científica de toda una época y trasciende el ámbito de una disciplina específica, podemos pensar que, en una escala social mucho menor como la que constituye el caso de una clase, las elaboraciones que hacen los alumnos como producto de sus prácticas, respecto del modo de abordar cuestiones matemáticas, van constituyendo "un modo natural de trabajo" compartido por un lado y, generalmente implícito por otro, que condiciona sus producciones aunque no llegue a determinar el contenido de las mismas. En ese sentido pensamos que algunas de esas elaboraciones podrían considerarse como formando parte del marco epistémico del alumno.

Hay en este punto un "parentesco" con la noción de contrato didáctico, aunque éste último abarca cuestiones que no son solamente del orden de lo normativo o de lo ideológico. Como señala Schubauer- Leoni (1988), citada por Sensevy (1998), : *"en tant que génerateur de sens et de pratiques le contrat didactique prend place à 'intérieur des individus qui y son soumis et peut étendre sa législation au-delà des frontières de l'institution qui le crée. Ce qui veut dire qu'il intervient comme element constitutive de la pensée chez les individus qui en interprètent les lois et qui transportent avec eux, dans d'autres circonstances les constructions opérées en son sein, les dispositions structurantes qu'il comporte".*[19]

Es claro que no todas las reglas que construyen los alumnos en la práctica de las aulas tienen la misma fuerza epistémica. Diferenciar matices para los distintos tipos de elaboraciones con respecto a esta cuestión, es un proceso harto complejo que requeriría indagaciones que

[19] En tanto que generador de sentido y de prácticas el contrato didáctico toma lugar en el interior de los individuos que están bajo su régimen y puede extender su legislación más allá de la institución que lo crea. Esto quiere decir que interviene como elemento constitutivo del pensamiento de los individuos que interpretan sus leyes y que transportan con ellos, en otras circunstancias las construcciones operadas en su seno, los dispositivos estructurantes que el contrato comporta.

exceden los análisis que pueden hacerse a partir del registro de una clase. Al hacer esta reflexión, estamos queriendo resaltar dos cuestiones: 1) la diferenciación entre "alumno" y "sujeto epistémico" es para nosotros teóricamente interesante porque advierte sobre el peligro de cargar en la cuenta del sistema de conocimientos del alumno, cuestiones que este último pone en juego cuando trata de interpretar lo que se espera de él en tanto alumno de la clase, pero acerca de las cuales no tiene necesariamente una convicción profunda y 2) tanto para el investigador como para el docente, es difícil jugar la diferencia teórica entre "alumno" y "sujeto epistémico" en el proceso de interpretación de las producciones de los estudiantes.

En un trabajo sobre la utilización de la noción de obstáculo epistemológico en didáctica de la matemática, A. Sierpinska (1989) cita a Wilder quien concibe la matemática como un sistema cultural que evoluciona. Este autor define que un sistema cultural está compuesto por 1) una estructura de convicciones, creencias, actitudes, valores, normas, ritos; 2) reglas y esquemas inconscientes de pensamiento y de comportamientos, de manera de comunicarse con los otros y 3) conocimientos explícitos, lógicamente justificados, necesarios. Los elementos del nivel 1, se trasmiten a los jóvenes en un proceso de comunicación que no incluye explicaciones ni justificaciones. Contiene actitudes filosóficas hacia la matemática, por ejemplo la concepción de la matemática como abstracción de la realidad. Contiene también ideas sobre los métodos que son aceptables y sobre la evolución de la disciplina. Los elementos del nivel 2 son en general inconscientes: nos damos cuenta de la existencia de reglas de pensamiento recién cuando dejamos de respetarlas. El nivel 2 se aprende por imitación y práctica. A menudo ni el que ofrece un modelo de trabajo, ni quien lo imita, saben que este aprendizaje tiene lugar. El nivel 3 es el de los conocimientos científicos, que se explicitan y se validan. Desde nuestro punto de vista, puede establecerse un paralelismo entre los niveles 1 y 2 de la noción de sistema cultural, y el concepto de contrato didáctico en tanto modelo de negociación de significados que se realiza en la práctica que une al docente y a los alumnos a propósito de los objetos matemáticos.

Desde otra perspectiva teórica, E. Yackel, y P. Cobb (1997) plantean que el aprendizaje en matemática es tanto un proceso de construcción individual como un proceso de enculturación hacia las prácticas matemáticas de una sociedad más amplia[20]. Estos autores se centran en el estudio del proceso de elaboración de los aspectos normativos específicos de la actividad matemática en una clase. Para dar cuenta del origen social de estas normas y de su especificidad con respecto al conocimiento matemático, ellos hablan de normas sociomatemáticas. Es interesante ver que Yackel y Cobb consideran una normativa que excede las reglas del trabajo matemático más reconocibles desde la comunidad matemática "sabia". Por ejemplo, es una norma sociomatemática aquello que permite establecer que dos procedimientos son matemáticamente diferentes, o el proceso por el cual se establece que algo es "matemáticamente elegante", o "económico". También incluyen en las normas sociomatemáticas a aquello que se considera una explicación matemática aceptable o una justificación. Este proceso de construcción de normas evoluciona para cada grupo y para cada individuo, a medida que se avanza en la elaboración de conceptos y en la relación con los mismos. Así, por ejemplo, aquello que se considera "matemáticamente diferente" tendrá significados distintos en dos puntos distanciados de la escolaridad.

[20] En Brousseau (1999) se plantea una definición muy similar. Ver página 18.

La construcción de normas sociomatemáticas es el resultado de las interacciones en la clase entre el docente y los alumnos, en un trabajo en el que muchas veces los estudiantes reelaboran las normas a partir de la interpretación de gestos sutiles del docente que legitiman o no ciertos procedimientos. En otro trabajo P. Cobb (1996), tomando como referencia a Bauersfeld, plantea que *"communication is a process of often implicit negotiations in which subtle shifts and slides of meaning occur outside the participants' awareness. (...) Bauersfeld uses an interactionist metaphor and characterizes negotiation as a process of mutual adaptation in the course of which the teacher and students establish expectations for others' activity and obligations for their own activity"*[21] Nos pareció interesante hacer referencia a la producción de estos autores que, desde otro marco teórico, plantean ideas que consideramos muy próximas a la de contrato didáctico.

Más en general, el proyecto de Cobb (1996) de explorar maneras de coordinar las perspectivas constructivista y sociocultural dentro de la enseñanza de la matemática, nos parece cercano al de Teoría de Situaciones, aunque desde nuestro punto de vista, los trabajos de Cobb se centran mucho más en los procesos de elaboración de conocimiento como producto de las interacciones sociales que en la búsqueda de condiciones sobre los problemas que ofrezcan "respuestas matemáticas" a partir de las cuales los alumnos podrían producir conocimientos. En algún sentido, al no establecer dichas condiciones, se podría correr el riesgo de un desdibujamiento del objeto de enseñanza.

Los trabajos a los que hemos hecho referencia, nos hicieron tomar conciencia de que entre las normas que los niños elaboran, hay algunas que pueden reconocerse como reglas del trabajo matemático, otras que son necesarias para que los alumnos construyan una representación de la actividad matemática y que pueden estar en la conciencia del docente como reglas útiles para el trabajo en el aula aunque no serían fácilmente reconocibles por una comunidad matemática externa a la clase (*un procedimiento que tiene menos pasos que otro, es en general más económico)*, y un tercer grupo de normas que surgen de la interpretación que los niños hacen de las prácticas en las que participan *(no se pueden atribuir valores libremente)*, sin que puedan en muchísimos casos -por el estatuto implícito que tienen- someterlas a la discusión del conjunto de la clase. Esta puntualización de tipos de normas no es una clasificación y podría ser que una norma que el alumno elaboró de manera implícita y que no se discute en la clase, sea una norma "matemática".

En este conjunto de normas que, como vimos, no puede ser controlado totalmente por la enseñanza, habrá algunas que los alumnos irán justificando y otras que los niños aceptarán *"porque la matemática es así"*. La resolución de la tensión entre lo que se acepta y lo que se puede fundamentar, habla también del tipo de práctica que se despliega en el aula.

[21] la comunicación es un proceso de negociaciones a menudo implícitas, en el que tienen lugar una serie de cambios y deslizamientos sutiles, muchas veces sin que los participantes tengan conciencia de ello.(...) Bauersfeld usa una metáfora interaccionista y caracteriza la negociación como un proceso de adaptación mutua en el curso del cual el maestro y los alumnos establecen expectativas de la actividad del otro y obligaciones para con la propia actividad".

5.4 Acerca de la transición de pruebas pragmáticas hacia la elaboración de argumentos deductivos

Como ya hemos enunciado, nuestro trabajo se ubica en una perspectiva de generalización de las prácticas aritméticas de los alumnos. Los problemas que hemos planteado a los alumnos exigían el tratamiento de relaciones cuyo dominio de validez era necesario establecer. Ésta es una cuestión nueva para los niños ya que la resolución de problemas que vienen tratando hasta el momento hace transparente el hecho de que las propiedades y los algoritmos funcionan en cierto conjunto. En particular, los algoritmos de cálculo, están ahí, se aplican a todos los números posibles, las operaciones se extienden de los naturales a los racionales sin hacer explícito el hecho de que se trata de una extensión y sin proponer problemas que "muestren" que no toda resta ni toda división exacta son posibles en el conjunto de los naturales.

La necesidad de determinar el dominio de validez –además de plantear un avance en el grado de algebrización como lo señalan P.Bolea, M. Bosch y J. Gascón (2001)- exige la producción de argumentos que permitan validar dicho dominio. Esta ha sido para nosotros una entrada posible para que los alumnos transformaran los criterios que ponen en juego para encontrar "la verdad" a propósito de los problemas que deben enfrentar.

Para "mirar" estas cuestiones, esto es para pensar las situaciones y para analizar las producciones de los alumnos, hemos usado como marco el trabajo de N. Balacheff (1987) en el que estudia condiciones didácticas para una génesis cognitiva de la demostración en matemática. El punto particular que hemos tomado de este trabajo se refiere a la distinción entre un *sujeto práctico* que valida su producción a través de *pruebas pragmáticas* (ligadas a la acción efectiva sobre los objetos) y un *sujeto teórico* que al utilizar el conocimiento como objeto de discusión, de discurso y de debate, puede realizar *pruebas intelectuales* (excluyen la acción efectiva sobre los objetos). Ahora bien, se pueden identificar tipos de pruebas que aunque no se independizan completamente del contexto, dan cuenta de un encadenamiento de relaciones que pueden considerarse del orden de lo deductivo; serían por ese motivo, jalones en el camino hacia producción de demostraciones.

Si bien en nuestro trabajo no apuntábamos a la producción de demostraciones, sí queríamos estudiar distintos tipos de validaciones y analizar en particular, la producción de argumentos deductivos.

Balacheff señala que el estudio de los procesos de prueba debe realizarse en referencia simultánea al sujeto que conoce y a la situación en la cual él los pone en juego y, en este sentido, queda claro en su trabajo que las situaciones pueden o bien tolerar la ausencia de un trabajo de validación o bien propiciar dicho trabajo, pero no pueden determinar el comportamiento de los alumnos.

Con relación al sujeto, este autor considera que el pasaje de pruebas pragmáticas a pruebas intelectuales, descansa sobre tres polos que interactúan fuertemente: la naturaleza de los conocimientos del sujeto, el lenguaje y el tipo de racionalidad que subyace a las pruebas producidas. Para que los alumnos puedan producir pruebas intelectuales, es necesario que puedan concebir que los conocimientos requeridos forman parte de una organización teórica. Además, es necesario que el estudiante acceda a un uso del lenguaje que no se limita a la descripción de acciones u operaciones sino que resulta una herramienta de cálculo intelectual y para ello, son necesarias una progresiva descontextualización, despersonalización y destemporalización. Estos tres últimos rasgos nos han ofrecido un marco interesante para el análisis de las producciones de los alumnos.

Entre las situaciones que favorecen los procesos de prueba, Balacheff distingue las situaciones de validación y las de decisión. Las primeras son aquellas en las que *"L'objectif est la production d'une preuve (de la vérité ou de la fausseté) d'un énoncé."*[22]. Al referirse, por ejemplo, a la situación de "carrera al 20"[23], Balacheff señala que la misma contiene *orgánicamente* la exigencia de que se pongan en juego procesos de prueba. Desde nuestro punto de vista, esta "organicidad" es teórica ya que como el mismo autor sostiene, dichos procesos no pueden independizarse nunca de la racionalidad del sujeto. De todos modos, -ya hemos dado nuestra posición respecto de la utilización de modelos teóricos- considerar la existencia de situaciones que contienen orgánicamente una condición referida al tipo de validación, resulta una hipótesis fértil para el diseño de situaciones didácticas que "empujen" hacia la producción de pruebas intelectuales.

La exigencia de anticipar y decidir antes de actuar, esto es lo que Balacheff llama una situación de decisión, *"demande la mobilisation de moyens de decisión et donc de moyens de validation, sans que pour autant soit exigée la production explicite de* ***preuves.*** *C'est une proposition vraie et non la preuve de cette proposition qui doit être produite. Dans la situation de décision, les opérations intellectuelles du raisonnement hypothético-déductif (en tant que système légitime et fiable de production d'informations) peuvent être mises en œuvre sans que pour autant une preuve soit produite.(...) Eventuellement, en tant que mathématiciens, nous reconnaîtrons dans ce processus une organisation qui est de l'ordre de la démonstration..."*.[24] Balacheff distingue tres tipos de funciones que podría cumplir un proceso de prueba: para decidir, para convencer, para saber. La prueba para decidir se inserta en el funcionamiento del "práctico" en tanto que la prueba "para saber" requiere un funcionamiento teórico. El autor puntualiza que no se trata de una clasificación, dado que "saber" puede ser cómo decidir el valor de verdad de una proposición y "decidir" puede ser la fuente de un nuevo saber.

En nuestro trabajo, hemos encontrado alumnos que, habiendo constatado la "verdad" de una proposición de manera pragmática, toman conciencia de que su "método" no les aporta una explicación convincente y, frente a la distinción que pueden hacer entre "verdad" y "razones de la verdad" se "mueven" hacia argumentos deductivos. Es decir, el deseo de explicarse un hecho, aunque no esté en juego la verdad del mismo, podría resultar un motor para que algunos alumnos construyan nuevos criterios de validación, más próximos a la actividad matemática.

---

[22] El objetivo es la producción de una prueba (de la verdad o falsedad) de un enunciado.

[23] Situación didáctica diseñada por Guy Brousseau, que funciona de alguna manera como un ejemplo que ilustra el tipo de intercambios con el medio que se conciben desde la Teoría de Situaciones.

[24] Exige la movilización de medios de decisión y entonces de medios de validación, sin que se exija por eso la producción explícita de pruebas. Es una proposición verdadera y no su prueba, la que debe producirse. En la situación de decisión, se pueden poner en juego las operaciones intelectuales del razonamiento hipotético deductivo (en tanto sistema legítimo y fiable de producción de informaciones) aunque no se realice una prueba.(..) en tanto matemáticos podríamos reconocer en este proceso una organización que es del orden de la prueba."

Nos parece que el deseo de obtener una explicación se englobaría, en términos de Balacheff, en las pruebas "para saber", entendiendo que saber es comprender las razones.

Quisiéramos finalmente señalar que Balacheff considera la interacción social como un motor de los procesos de prueba: *"el debate de las decisiones, la necesidad de garantizar su validez o de denunciarla, permite transformar la situación de decisión en una situación de validación".* El autor da cuenta, de todos modos, de la complejidad que presenta la interacción social: el hecho de que se confronten universos de lenguaje diferentes, sistemas de conocimientos no necesariamente comunes, podría dar lugar a malentendidos, a interpretaciones sobredeterminadas, a validaciones que conforman a los interlocutores pero que no son compatibles con los conocimientos en cuestión, etc.

6. . La memoria didáctica. La relación viejo nuevo en Teoría de Situaciones. Las situaciones de evocación

Nuestro trabajo está atravesado por la relación entre viejos y nuevos objetos de enseñanza. Efectivamente, tal como lo expresamos en la introducción, nuestro proyecto ha consistido en explorar qué tipo de conocimientos producen los alumnos cuando son enfrentados a situaciones en las que se toma como "objeto" aquello que ha sido instrumento durante muchos años de trabajo. Por ejemplo, resolver problemas en los que es necesario concebir que la división entera está caracterizada por las relaciones *Dividendo = divisor x cociente + resto, 0 ≤ resto < divisor*, exigirá a los alumnos referirse a significados construidos, a propósito de la división entera, a través de toda la escolaridad. El trabajo que proponemos requiere entonces una vuelta atrás para reorganizar viejos significados desde una nueva perspectiva. Es por eso que hemos tomado como referencias algunas contribuciones que en el marco de la teoría de situaciones –o en sus vecindades- de alguna manera plantean los inconvenientes de un sistema que funciona bajo la ilusión de una progresión lineal y acumulativa del tiempo didáctico y proponen herramientas para pensar esta cuestión.

G. Brousseau y J. Centeno (1991) introducen el concepto de memoria didáctica al preguntarse sobre la influencia en el aprendizaje de las referencias, en un momento dado, al pasado común de los alumnos. Ellos trabajan bajo la hipótesis de que la evocación de hechos del pasado de los alumnos –algunos de los cuales no fueron objeto de enseñanza- es importante para el aprendizaje.

Cuando las cuestiones que se trabajan en un cierto momento,- es el caso de los objetos de enseñanza que hemos puesto en juego en nuestra experimentación- requieren de conocimientos que se han elaborado mucho tiempo atrás, el docente no tiene posibilidades de apelar a las situaciones de aprendizaje efectivamente vividas por los alumnos para activar dichos conocimientos, dado que no ha sido testigo de su elaboración; debe entonces enseñar las articulaciones necesarias, a la manera de saberes. En esos casos, las referencias que el docente puede hacer al pasado de los alumnos, se basan mucho más en los usos culturales que en las condiciones en las que los estudiantes aprendieron. Estas ideas han resultado interesantes para nosotros como marco para analizar más en fino en qué medida los niños apelaron espontáneamente a significados anteriormente elaborados sobre los objetos con los que trabajaban, en qué casos esos antiguos significados fueron útiles, cuáles fueron las estrategias de los docentes para activar aquello que se consideraba necesario pero que no era puesto en juego por los niños, y en qué medida los alumnos respondieron a dichas estrategias.

Retomando las ideas contenidas en la noción de memoria didáctica, Marie-Jeanne Perrin Glorian (1993) identifica un tipo de situaciones que llama "de evocación" (*'de rappel')* que apuntan a fortalecer los procesos de despersonalización y descontextualización de conocimientos. Se trata de evocar una o varias situaciones ya tratadas sobre un tema y de reflexionar sobre ellas sin realizarlas nuevamente. Los alumnos tendrían a través de estas instancias la oportunidad de volver a discutir el sentido y el estatuto de los conocimientos en juego en las situaciones realizadas. M.J.Perrin Glorian distingue dos tipos de situaciones de evocación: las que evocan una situación de acción, no inmediatamente después de realizada sino otro día, y las que se refieren a una serie de problemas sobre un tema, que ha abarcado un período prolongado de tiempo.

Al verse confrontados a la necesidad de hablar sobre lo hecho sin volver a realizarlo, las situaciones del primer tipo, ofrecen la oportunidad de reconstruir, para quienes no lo han hecho en el momento de la acción, el papel que tienen para el aprendizaje los problemas abordados. La reflexión que se realiza contribuye a la despersonalización de las soluciones en la medida en que éstas son retomadas y expuestas por alumnos que no necesariamente intervinieron en su producción; también se favorece un proceso de descontextualización dado que al retomar en frío la situación, comienzan a dejarse de lado los detalles para centrarse en las cuestiones más importantes.

Las situaciones del segundo tipo, apuntan a integrar una serie de problemas en un proceso que se interioriza con un nuevo sentido. Al establecerse relaciones entre diferentes situaciones, se produce una articulación entre viejos y nuevos conocimientos.

Muchos de los problemas que hemos propuesto en nuestra experimentación, en la medida en que apuntan a objetivar las operaciones aritméticas, podrían constituirse en situaciones de evocación de un período bastante largo (tres o cuatro años) en las que se recuperan y al mismos tiempo se modifican antiguos significados.

Por otro lado, las reflexiones acerca de la inserción de los conocimientos producidos en un sistema más amplio, abre interrogantes con respecto a nuestro estudio, dado que plantea la cuestión de la legitimidad cultural de aquello que es nuevo –es el caso de muchas de las cuestiones identificadas en este trabajo- para la cultura escolar.

Como plantea G. Sensevy (1998) al reflexionar sobre el funcionamiento del tiempo didáctico en el sistema de enseñanza: *"un rapport à un objet (de savoir) donné repose sur une antériorité, qui dépasse la seule antériorité séquentielle. Ceci parce que l'objet nouveau, le plus souvent, ne peut s'apprécier comme tel qu'à travers les interrelations qu'il va modifier dans le réseau du déjà constitué, de la même manière qu'un accord de résolution va nous obliger à entendre d'une autre manière ce que pourtant nous avions déjà entendu d'une certaine façon"*.[25]

[25] Una relación con un objeto (de saber) dado reposa sobre una anterioridad que sobrepasa la anterioridad secuencial. Y esto ocurre porque el objeto nuevo, muy a menudo, sólo puede apreciarse como tal, a través

Conclusión

La Teoría de Situaciones ha sido para nosotros un marco fecundo para pensar e interpretar las situaciones diseñadas, en términos de decisiones que los alumnos debían tomar, evoluciones que se podrían producir, de validaciones y producción de argumentos.

El trabajo experimental que hemos realizado ha sido muy rico en interacciones tanto entre los alumnos como con el docente. Los elementos delineados más arriba nos han ayudado a estudiar esos procesos y nuestros análisis nos han permitido resignificar los aportes de la Teoría.

Las reflexiones sobre el alcance de la Teoría de Situaciones, han constituido un fundamento para aceptar que, en algunos casos, la naturaleza del objeto en cuestión requería el auxilio de hipótesis de trabajo más locales, que salen tal vez un poco del marco de la teoría. Esto será más claro, cuando explicitemos las referencias más específicas que hemos considerado del campo de la didáctica del álgebra. Es el tema que trataremos a continuación.

---

de las interrelaciones que va a modificar en el tejido de lo ya construido, así como un acorde nos va a obligar a escuchar de otra manera, aquello que no obstante, habíamos ya escuchado de un cierto modo".

La didáctica del álgebra elemental como marco de referencia

1.Introducción

Al intentar situar nuestro estudio en el conjunto de trabajos sobre la problemática didáctica del pasaje de la aritmética al álgebra, nos vemos necesitados de explicitar en primer término, a qué nos estamos refiriendo cuando hablamos de álgebra elemental escolar. Para ello nos apoyaremos en los trabajos de Y. Chevallard (1985, 1989, 1996) y los aportes de P. Bolea, M. Bosch y J. Gascón (2001). El papel de las herramientas semióticas será considerado también en este punto para lo cual tomaremos en cuenta la perspectivas desarrolladas en los trabajos de Y. Chevallard (1996), de Y. Chevallard y M. Bosch (1999), de D. Olson (1998) y de R. Duval (1995).

Nos centraremos luego en algunos trabajos que tratan la relación aritmética-álgebra y que han nutrido la formulación de nuestra problemática. Los hemos organizado según dos grandes temáticas:

- Las estrategias de control que se ponen en juego. Analizaremos para esto las producciones de R. Campos Lins (2001) y de N. Balacheff (2001).
- El cálculo relacional necesario para el desempeño en uno y otro dominio. Consideraremos los aportes de G. Vergnaud (1987), Brigitte Grugeon (1995) y Nadine Bednarz y Bernadette Janvier (1996).

Como lo hemos señalado en la introducción, los dos ejes que hemos considerado para la experimentación en las aulas –concebir las operaciones como relaciones e identificar la estructura de algunos problemas de enunciado- suponen un trabajo cada vez más explícito de generalización. Incluimos entonces como referencia un trabajo de J. Mason (1996) que plantea cuestiones didácticas vinculadas al problema de la generalización.

Finalmente, a la luz de los trabajos que tomamos como referencia, estaremos en condiciones de precisar mejor las opciones que hicimos para proponer los asuntos matemáticos que tratamos en las clases en las que desarrollamos nuestro trabajo experimental.

2. Breve caracterización de la actividad algebraica

2.1El lugar de la modelización en la actividad algebraica

Partimos, -ya lo hemos señalado al presentar el marco general de Teoría de Situaciones- de describir la **matemática como una actividad** de producción de conocimientos. Y. Chevallard (1989) la caracteriza como una actividad de modelización. Si bien este término se ha reservado tradicionalmente para el estudio matemático de sistemas no matemáticos (del ámbito de la física, de la biología, de las ciencias sociales, etc.), este investigador engloba bajo la misma categoría la actividad de producción de conocimientos sobre un sistema matemático a través de otro sistema, también matemático. Llama a este último proceso de modelización intra-matemática. Chevallard designa al sistema sobre el cual se produce conocimiento como "matematizado" (cumple la función de objeto de estudio) y aquel en el que se lleva a cabo la modelización es nombrado como "matemático" (cumple la función de herramienta de estudio)[1]. En los procesos de modelización intra-matemática, lo "matemático" y lo "matematizado", podrían a veces intercambiarse[2].

Chevallard (1989) plantea que la noción de modelización permite "mirar" globalmente la actividad matemática desde la escuela hasta la universidad y suministra un marco de referencia a partir del cual es posible reconocer diferencias significativas entre "aritmética" y "álgebra". Interpretamos que esta idea ofrece elementos para estudiar la relación entre estos dos dominios considerando el tipo de problemas que pueden modelizarse en cada uno, los modelos que toleran, las herramientas que ofrece el álgebra para modelizar la aritmética y los aportes de esta última para justificar el trabajo algebraico.

2.2 Las herramientas semióticas en la aritmética y el álgebra

La actividad algebraica supone un uso reglado de sistemas de signos. Chevallard (1989) plantea que en toda actividad humana se utiliza una pluralidad coordinada de registros semióticos pero que entre ellos, algunos son dominantes y de alguna manera subordinan a los otros. La articulación de este conjunto de registros forma un complejo semiótico en el que siempre está presente la lengua natural.

Ahora bien, la actividad matemática reduce el espesor semiótico alrededor de códigos específicos y de esta manera gana en potencia. Chevallard compara la aritmética y el álgebra desde el punto de vista de los instrumentos semióticos. Al respecto sostiene que en la aritmética se razona sobre lo oral y se le atribuye al cálculo un valor mecánico. El álgebra en cambio es sólo escritura, ella rompe la filiación del pensamiento a la palabra y de ésta a la escritura (1996). El álgebra ofrece un medio más potente que la aritmética, esencialmente ligado al uso de las letras para designar las variables y a la posibilidad de calcular sobre las expresiones literales. (*"Le raisonnement se fait calcul"*,1989). Efectivamente, al transformar una expresión

[1] La caracterización de un proceso de modelización matemática ha sido considerada en muchos trabajos. Muy sucintamente diremos que un proceso de modelización supone identificar un conjunto de variables sobre el sistema que se pretende estudiar, producir relaciones entre las variables tomadas en cuenta, transformar esas relaciones utilizando algún sistema teórico matemático que se usa para modelizar, con el objetivo de producir conocimientos sobre el sistema modelizado.

[2] Aunque Chevallard no lo hace explícito, la noción de modelización intramatemática es desde nuestra perspectiva, próxima a la de "juego de marcos", propuesta por R. Douady (1986). Un *marco* según R. Douady, está constituido por objetos de una rama de la matemática (el álgebra, la geometría, etc.), por relaciones entre esos objetos, por formulaciones diversas y por imágenes mentales asociadas a estos objetos y relaciones. Estas imágenes juegan un rol esencial en el funcionamiento instrumental de los objetos del marco. La autora sostiene que, para abordar un problema matemático, cambiar de marco es un medio de obtener formulaciones diferentes de un problema que sin ser completamente equivalentes, permiten un nuevo acceso a las dificultades encontradas y dan lugar a la puesta en juego de herramientas y técnicas cuyo uso no surgía de la primera formulación.

algebraica en otra equivalente, se hacen observables nuevas relaciones, que no estaban visibles en la expresión original.

Este "poder" del lenguaje algebraico de mostrar aspectos diferentes de un mismo objeto fue considerado por muchos autores como un asunto central del cual debía ocuparse la enseñanza. Por ejemplo Drouhard, J.P. et al.(1995) distingue entre denotación, sentido e interpretación de una escritura simbólica del álgebra elemental. Las ideas de sentido y denotación son tomadas de Frege: por ejemplo, las escrituras $(x - 1)^2$ y $x^2 - 2x + 1$, denotan el mismo objeto pero, al mostrar aspectos diferentes del mismo, tienen distinto sentido. La elección de las transformaciones a realizar sobre las expresiones en función de la tarea que debe hacerse, depende del sentido de las expresiones. A la vez, una expresión se interpreta en un cierto marco[3]: por ejemplo la expresión $2x-3$, en el marco de las funciones de R en R, tiene por interpretación la función que a cada valor de x, número real, le asigna otro número real cuyo valor es el doble de x disminuido en 3 (Drouhard, J.P., citado por B.Grugeon, 1995).

Ahora bien, aunque Chevallard destaca la potencia del álgebra a partir de la utilización de letras para representar las variables y los parámetros, considera también que existe una dialéctica entre lo numérico y lo algebraico, anterior a la construcción del lenguaje algebraico (1985). Remite para fundamentar esta idea a la distinción que hacían los griegos entre aritmética vulgar y aritmética de los filósofos (teoría de números). *"Les calculateurs calculent. Les arithméticiens étudient la structure du numérique. Tous manipulent, pour cela, un langage du numérique, mais tous ne l'emploient pas aux mêmes tâches, et ne lui reconnaissent pas les mêmes valeurs"* (1985) [4]. En la aritmética práctica el análisis de lo numérico que ofrece el lenguaje que se utiliza, es un medio orientado a efectuar cálculos. Por ejemplo, en nuestro sistema de numeración, la información que se requiere para hacer una multiplicación, está dada en la misma escritura (unidades, decenas, etc.). Justamente uno de los efectos de la actividad matemática es el de proponer para su uso social, procedimientos que al estar tan algoritmizados, requieren cada vez menos matemática[5]. Si, en cambio, para hacer una multiplicación no se dispusiera de un sistema de numeración posicional que informara de manera inmediata las relaciones necesarias para efectuarla, se requeriría un análisis más profundo de los números en cuestión. Tal es el caso cuando se desea realizar una multiplicación a partir de duplicaciones sucesivas, como lo hacían los egipcios (Chevallard, Y.; 1985).

El cálculo numérico está regido por la ley de simplificación una de cuyas cláusulas es el "principio de finalización del cálculo": la expresión 4+8, por ejemplo, no podría ser una respuesta, sólo una forma transitoria, lábil, porque cuatro más ocho es [6] doce. En cambio, en la aritmética algebraica, puede tener sentido analizar por ejemplo las expresiones 12 y 2^2+2^3 que designan el mismo objeto, pero no muestran la misma información. En el corazón mismo del lenguaje numérico se insinúa una tensión entre dos modos de funcionamiento: la eficacia

[3] La idea de "marco" es utilizada en el sentido en el que la considera Douady (1986), y al que hemos hecho referencia en la nota al pie anterior.

[4] Los calculadores calculan, los aritméticos estudian la estructura de lo numérico. Todos manipulan para esto un lenguaje de lo numérico, pero no lo emplean para las mismas tareas ni le reconocen los mismos valores.

[5] Tal vez esto podría explicar por qué las expectativas de los padres con respecto a la escuela primaria están en general centradas en que se garantice a los niños una gran habilidad algorítmica y muchos menos en un aprendizaje de una matemática más fundamentada.

[6] Esta idea está tomada del texto de Chevallard (1985), pero la negrita es nuestra.

designativa, propia del uso calculatorio del lenguaje numérico y la información mostrativa (Chevallard, Y.; 1985). Notemos que la distinción entre "designación" e "información mostrativa" es muy próxima a la distinción entre denotación y sentido, que hemos citado más arriba.

El surgimiento del álgebra permite dominar mejor la dialéctica de lo numérico y lo algebraico, conducida hasta ese momento con medios matemáticos insuficientemente adecuados: lo algebraico es un instrumento de estudio de las propiedades de los números, y recíprocamente, las propiedades de los números son los instrumentos que permiten transformar las expresiones algebraicas, para que estas últimas puedan "mostrar" nueva información.

El funcionamiento del cálculo numérico permite explicar muchas de las conocidas dificultades de los alumnos al entrar en el mundo algebraico, que numerosos investigadores han identificado (Vergnaud, G. et al.; 1987; Kieran, C. et al.; 1989). Reseñémoslas brevemente:

- Los alumnos interpretan el signo igual como la traducción de "es el resultado de". (Notemos que es también la función que tiene el signo igual en la calculadora.). Esto lleva a los alumnos, frente a la necesidad de realizar dos cálculos encadenados, a la siguiente notación: 23+31=54-14=40 (Vergnaud, 1987). Cuando los estudiantes se enfrentan con la tarea de resolver ecuaciones, intentan trasladar este uso, que hasta el momento no les ocasionaba problemas. Así por ejemplo, para resolver la ecuación 2x+3=5+x, suelen producir expresiones de este tipo: 2x+3=5+x-3. Para lograr un buen desempeño con las ecuaciones, los alumnos deberán aprender que en las mismas, el signo igual representa una condición sobre un cierto dominio. En la tesis de B. Grugeon (1995) hay numerosos ejemplos de resoluciones de ecuaciones que se interpretan a la luz de este modo encadenado de hacer los cálculos.

- El principio de "finalización del cálculo" propio del funcionamiento calculatorio del que habla Chevallard, llevaría a algunos alumnos a rechazar, en el momento en comienzan a trabajar en álgebra, que una expresión puede ser un resultado y consideran que una respuesta bien formada debe necesariamente ser un número (Kieran, C; 1989).

2.3El uso de parámetros en álgebra

Chevallard (1989) destaca que la potencia del álgebra radica en el hecho de que, al representar con letras no sólo las incógnitas de un problema, sino también los datos (parámetros), se hace posible tratar con tipos generales de problemas.

Retomando esa idea, P.Bolea, M. Bosch y J. Gascón (2001) señalan que la posibilidad de estudiar la estructura global de los problemas –aspecto que se ve favorecido por el uso de parámetros- es un indicador del grado de algebrización de una organización matemática[7]. Estos

[7] En el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico cuya referencia principal es Y. Chevallard, el saber matemático se describe en términos de organizaciones matemáticas institucionales. P. Bolea, M. Bosch y J. Gascón (2001) plantean : "una organización matemática surge como respuesta a una cuestión o a un conjunto de cuestiones. No se dice qué es una organización matemática, pero se da un esbozo de su estructura postulando que está constituida por cuatro componentes principales: tipos de problemas, técnicas, tecnologías y teorías". Los autores enfatizan la relación dinámica entre estas componentes, y reconocen dos aspectos inseparables: la práctica matemática o praxis (formada por tareas y técnicas) y el discurso razonado o logos sobre dicha práctica (formado por tecnologías y teorías). Al unir las dos caras

autores, señalan además otros indicadores que también están vinculados a la utilización de parámetros. En particular, por las "resonancias" que tiene con nuestro proyecto, nos interesa destacar que en el trabajo citado, se considera que una organización matemática algebrizada debe permitir describir los tipos de problemas resolubles con determinadas técnicas, estudiar en qué condiciones un determinado tipo de problema tendrá o no tendrá solución, en qué casos la solución será única, etc. [8]

Esta reflexión sobre el uso de parámetros coloca, en una perspectiva escolar, en un lugar central la noción de fórmula (tanto su producción como su ejecución), y puede conducir a una familiarización precoz con la noción de función. Chevallard (1989) propone como ejemplo el de la fórmula del área del rectángulo: la medida ***b*** del lado de un rectángulo de área ***S***, en el que el otro lado mide ***a***, está dado por la fórmula ***b=S/a***. Si se supone ***S*** fijo y se hace variar ***a***, la medida del otro lado es una función de ***a***.

De manera próxima, Vergnaud (1987), "se queja" porque los docentes y los textos de matemática escolares, dan poco lugar a la lectura de fórmulas de geometría o de física en términos de relaciones entre variables. Raramente se encuentra una lectura del volumen del prisma, por ejemplo, que ponga el acento sobre las relaciones de proporcionalidad entre el volumen y el área de la base cuando la altura es constante, o la relación entre el volumen y la altura cuando el área es fija. Sin embargo –plantea Vergnaud- ahí reside la razón profunda de la fórmula y una posibilidad temprana de acceso a la representación algebraica como instrumento y como objeto de conocimiento.

2.4 El papel de las herramientas semióticas en la actividad matemática

Los trabajos de M. Bosch e Y. Chevallard (Bosch, M.; 1994; Chevallard, Y.; 1996; Bosch, M. y Chevallard, Y.; 1999) plantean la necesidad de estudiar la manera en que la actividad matemática está condicionada por los medios escritos, gráficos, orales, gestuales y materiales. Estos autores distinguen dos tipos de objetos que intervienen de manera dialéctica en el trabajo matemático: los ostensivos y los no ostensivos. Los objetos ostensivos son aquellos que tienen una cierta materialidad y que adquieren para el sujeto una realidad perceptible. Los no ostensivos están constituidos por ideas, intuiciones, conceptos, que existen institucionalmente (dado que se les atribuye una existencia) sin poder ser vistos, dichos, escuchados, percibidos o mostrados por sí mismos. Son evocados o invocados por la manipulación de ostensivos asociados.

La dialéctica entre los ostensivos y no ostensivos es tal que los no ostensivos son emergentes de la manipulación de los primeros y al mismo tiempo son medios de guía y control

de la actividad matemática se obtiene la noción de praxeología matemática. Una organización praxeológica es entonces un complejo de técnicas tecnologías y teorías organizadas alrededor de un tipo de tareas (Bosch, M. y Chevallard, Y.; 1999).

[8] Otros indicadores que se consideran en el trabajo son: la posibilidad de unificar y reducir los tipos de problemas, técnicas y tecnologías y la emergencia de problemas independientes del sistema modelizado. Dado que estos indicadores están lejos de los aspectos que desarrollamos en nuestra experimentación, no nos explayamos acerca de los mismos.

de esta manipulación. Hay entonces en la actividad matemática una coactivación de objetos ostensivos y no ostensivos. Unos y otros intervienen tanto en el plano del hacer como en el de la explicación y justificación de lo que se hace. Los ostensivos constituyen la parte perceptible de la actividad, es decir aquella que en la realización de la tarea, se muestra, tanto para el observador como para los actores. La presencia de los nos ostensivos en una práctica determinada sólo puede ser inducida o supuesta a partir de manipulaciones de ostensivos institucionalmente asociados.

La relación con los ostensivos no es puramente empírica ni es trans institucional. Los ostensivos no son puros datos aunque sean accesibles a los sentidos. Tanto los objetos ostensivos como los no ostensivos y nuestra relación con ellos son el producto de una construcción institucional y por lo tanto fruto de un aprendizaje. Resulta entonces que no hay una asociación de objetos ostensivos y no ostensivos que sería necesaria, natural e intrínsecamente determinada.

Estas ideas permiten a los autores tomar distancia de la posición según la cual la actividad matemática necesita discurso, figuras, símbolos, pero lo que es importante está más allá de las palabras y las escrituras. En otros términos la concepción dialéctica entre ostensivos y no ostensivos cuestiona la separación que suele hacerse entre concepto por un lado y representación del concepto por otro. Cuando se habla de "ausencia de un concepto" no es sólo ausencia de una idealidad, sino también de un complejo de instrumentos de trabajo, la mayoría de naturaleza material cuya disponibilidad o ausencia podría modificar de manera crucial el desarrollo de la actividad.

Un objeto ostensivo es considerado como un instrumento posible de la actividad humana, es decir como una entidad que permite en asociación con otras, conformar técnicas que permiten realizar ciertas tareas, llevar a cabo un cierto trabajo. Esto es la **valencia instrumental**. Hay una potencialidad instrumental, pero es en su funcionamiento institucional que será un instrumento determinado, en función de las prácticas de la institución, que incluyen un conjunto de otros objetos e interrelaciones, además del ostensivo. La potencialidad instrumental es abierta. La instrumentalidad depende de las técnicas en las cuales puede intervenir. Un ostensivo puede estar privado de parte de su instrumentalidad debido a que no se disponen de ciertas técnicas o de otros ostensivos.

Los objetos ostensivos en prácticas institucionales determinadas, tienen el poder de evocar complejos de objetos ostensivos y no ostensivos con los cuales entran en relación. Este funcionamiento del ostensivo como signo, constituye su semioticidad o **valencia semiótica**. Al igual que la valencia instrumental, la valencia semiótica es abierta y depende de las prácticas de la institución. Cuando se dice que una cierta notación "no tiene sentido", se infiere que en esa institución no existen organizaciones praxeológicas que incluyan técnicas de manipulación de este conjunto de ostensivos y sobre todo, no existen tecnologías ni teorías que permitan justificarlas.

Al analizar los objetos ostensivos movilizados en la actividad matemática, Bosch y Chevallard señalan que algunos de estos objetos – como por ejemplo las notaciones, los simbolismos- tienen un estatuto de instrumentos, en tanto que otros, aunque resultan indispensables para el trabajo matemático, son considerados como "acompañantes" de la actividad, sin que se les atribuya un carácter instrumental. Hay un privilegio de los ostensivos que pertenecen al registro de lo escrito por sobre los registros gráfico y oral. Ahora bien, se crea una situación paradojal: la matematización tiende a reducir los registros utilizados, pero, al mismo tiempo, se visualiza en la cultura que los registros poco matematizados parecen restituir el sentido que se perdió a partir de la reducción ostensiva. Esto plantea el problema didáctico de la gestión de medios ostensivos, necesarios para la actividad pero a los que no se les puede dar un estatuto matemático claro.

Aunque no podemos asegurar que Chevallard y Bosch autorizarían las relaciones que nosotros establecemos, nos ha parecido pertinente situar en una línea próxima a las ideas desarrolladas en los párrafos anteriores, el trabajo de D. Olson (1998) quien en un ensayo sobre el impacto de la escritura y la lectura en la estructura del conocimiento, sostiene el papel constitutivo que tienen las escrituras en el conocimiento. Este autor cita a Bellone, a propósito de la formalización de leyes físicas: *"un proceso de matematización no es una traducción, fiel o infiel, ni una sustitución puramente formal de la lógica preexistente en leyes empíricas ...[sino más bien] la estructura lógica establecida entre afirmaciones descriptivas respecto de hechos.... está sujeta a modificaciones a veces radicales, que no cambian solamente la forma de la teoría, sino que también afectan la prueba empírica misma, y de este modo nos fuerzan a dar una interpretación diferente a las observaciones y a las relaciones entre mediciones* ". Olson, al describir la manera en que Galileo demuestra proposiciones sobre el movimiento uniformemente acelerado señala que cuando Galileo se apoya en conocimientos geométricos y en relaciones algebraicas para demostrar sus proposiciones, no está simplemente poniendo por escrito lo ya sabido, sino que está reconstruyendo esas propiedades en términos de las estructuras de conocimientos disponibles. Aclaramos nosotros: esta reconstrucción supone la constitución de un sistema organizado de conocimientos y aporta una explicación que los datos empíricos por sí mismos, no pueden ofrecer (García, R; 2000). El trabajo de Olson, -que no trata específicamente la matemática ni los lenguajes formalizados- se inscribe en una concepción general según la cual la escritura no es la transcripción del habla sino que proporciona un modelo para ella.

R.Duval (1995) ha estudiado el papel de las representaciones semióticas en la elaboración de un concepto. En el marco de una hipótesis general según la cual no hay noesis sin semiosis[9], - o más fuertemente, la semiosis determina las condiciones de posibilidad y ejercicio de la noesis- el autor sostiene que a través del tratamiento de las representaciones semióticas y de la conversión de las mismas de un registro a otro, es posible "ver" distintos aspectos, significaciones, propiedades de los objetos. Las representaciones semióticas –las que emplean signos- son específicas de cada sistema particular de signos y para un mismo objeto puede haber representaciones en distintos sistemas, que muestran diferentes aspectos de ese objeto. Un registro de representación semiótica da lugar a tres actividades cognitivas fundamentales: de formación, de tratamiento y de conversión. La formación es la constitución de una traza identificable como la representación de algo, el tratamiento supone la transformación de una representación dentro del mismo registro de representación mediante el uso de sus propias reglas y la conversión es la transformación de la representación de un objeto,

[9] Duval plantea que la noesis está ligada a la formación y adquisición de un concepto y la semiosis está dada por el recurso a una pluralidad al menos potencial de sistemas semióticos que son coordinados por el sujeto.

situación o información dados en un registro, en una representación del mismo objeto, situación o información, en otro registro.

El tratamiento de una representación semiótica permite acceder a distintas informaciones sobre un objeto y está ligado a un cierto problema que proporciona un criterio para saber dónde detenerse en la serie de transformaciones efectuadas.

La conversión implica una cierta selección en el contenido de la representación de partida y una reorganización de sus elementos en la representación de llegada.

Notemos que a través del tratamiento de una cierta representación en un registro dado, el objeto se va transformando y la representación "terminal" obtenida puede referirse a un objeto diferente del correspondiente a la representación inicial. En la conversión, se trata siempre del mismo objeto que, al ser representado en otro registro, pone de relieve aspectos diferentes de los inicialmente destacados.

Dos ideas son centrales en el análisis de Duval: 1) las representaciones semióticas no cumplen sólo una función de comunicación, sino también de tratamiento y objetivación y, 2) la conversión entre registros de representación no es una operación cognitivamente neutra. Efectivamente, el rol principal que cumple la semiosis en el funcionamiento del pensamiento y en el desarrollo de los conocimientos, está ligado a la diversidad de sistemas de representación , las relaciones entre ellos y la conversión de representaciones semióticas de un sistema a otro.

Bosch y Chevallard (1999), en el artículo al que nos hemos referido en los párrafos anteriores, señalan sus propias diferencias con respecto al trabajo de R. Duval. Según Bosch y Chevallard, en el estudio del funcionamiento cognitivo que hace Duval, quedan sin problematizar las tareas matemáticas que propone una cierta institución. En consecuencia, -argumentan los autores- las dificultades que se ponen en evidencia en el trabajo en un registro o en la coordinación entre registros, son consideradas como dificultades cognitivas, *es decir*[10], no matemáticas. Bosch y Chevallard interpretan que Duval se refiere al funcionamiento cognitivo por oposición al tratamiento matemático. En la perspectiva en la que nos ubicamos nosotros –la de estudiar la producción de conocimientos matemáticos por parte de un sujeto en tanto sistema de conocimientos, en interacción con una problemática en el marco de una cierta comunidad – ambos recortes muestran aspectos que enriquecen la comprensión de los procesos de elaboración de conocimiento matemático, sin que la centración en lo cognitivo niegue - necesariamente como lo sugieren Bosch y Chevallard - el papel que juegan la tarea matemática y sus condiciones de posibilidad en una cierta institución.

Los distintos trabajos que hemos citado a propósito de la utilización de las herramientas semióticas, están desde nuestro punto de vista "conectados" por un supuesto: la representación de un objeto a través de ciertas herramientas semióticas –esto implica tanto la construcción de la representación como su transformación utilizando las reglas del registro en el que se representa-no es una simple traducción de dicho objeto sino que cumple una función de producción tanto de nuevas relaciones como de nuevas significaciones de relaciones ya conocidas. Por ejemplo, consideremos la expresión $n^3 - n$ (en la que n representa un número entero); al transformar la expresión en su equivalente $n\ (n-1)\ (n+1)$, se hace observable que se trata del producto de tres

[10] La itálica es nuestra e intenta objetar la relación implicativa que establecen Bosch y Chevallard.

enteros consecutivos, lo cual permite a la vez realizar un análisis que lleva a establecer una nueva relación (el cubo de un número entero menos dicho número es múltiplo de 6). Al mismo tiempo, al poner en juego técnicas de factorización al servicio de este problema particular, resulta posible elaborar una nueva significación de dichas técnicas (permiten resolver problemas de divisibilidad).

2.5El uso en nuestro proyecto de las ideas anteriores

¿Cómo hemos considerado las ideas anteriores para concebir nuestro proyecto en las aulas? ¿Qué reflexiones nos han suscitado?

1) **La idea de modelización interna** de Chevallard, nos llevó pensar que un trabajo sobre las operaciones aritméticas como relaciones entre números apuntaría a que los alumnos elaboraran un sentido más interno (a la matemática), respecto de las conceptualizaciones en tanto instrumentos de cálculo que pudieron haber elaborado al usarlas en problemas particulares.

Por ejemplo, -lo hemos mencionado ya- hemos propuesto una secuencia sobre división entera en la que los alumnos debían tratar problemas que les exigieran usar las relaciones *Dividendo = divisor x cociente + resto; 0 ≤ resto < divisor.* Apuntábamos a que pudieran comprender que dichas relaciones caracterizan la división entera y que se puede operar con ellas, de manera independiente de la realización efectiva del algoritmo de la división. A lo largo de la secuencia, esperábamos que los alumnos apelaran a nuevas relaciones (para ellos) como por ejemplo, *"si se suma un número natural n al dividendo y el resto es menor que la diferencia entre el divisor y el número n, el cociente no cambia y el resto aumenta n"*[11], para resolver los problemas que les proponíamos. Al cabo del trabajo, las condiciones *Dividendo = divisor x cociente + resto; 0 ≤ resto < divisor*, en tanto portadoras de nuevas relaciones, funcionarían entonces como un modelo del objeto "división"[12]. De esta manera se profundizaría la comprensión de la operación a través de la emergencia de nuevos aspectos que difícilmente se pondrían en juego si la misma fuera sólo un instrumento de cálculo. No fue nuestro objetivo que relaciones como las anteriores se produjeran sin apelar a los contextos de utilización de la operación que los alumnos conocían (por ejemplo, situaciones de reparto) –cuestión que por otra parte no podríamos haber controlado- sino que en el proceso, y en un juego entre lo externo y lo interno, se produjeran nuevas relaciones sobre otras ya conocidas.

Como veremos al analizar la secuencia en el capítulo 4, las condiciones *Dividendo = divisor x cociente + resto; 0 ≤ resto < divisor*, pueden tener diferentes interpretaciones para los alumnos y nuestra idea fue que a través de los problemas propuestos, ellos pudieran ir

[11] No era este el nivel de formulación esperado por parte de los alumnos.

[12] No se nos escapa que las condiciones *Dividendo = divisor x cociente + resto; 0 ≤ resto < divisor* definen la división entera y desde esa perspectiva sería objetable decir que son un modelo de la operación. Sin embargo, para los alumnos con los que trabajamos, que conceptualizan la operación casi exclusivamente como un algoritmo de cálculo, la "definición" es portadora de nuevas relaciones. Por esta razón, consideramos que para ellos funciona como un modelo, en el sentido en el que lo plantea Chevallard.

transformando los significados atribuidos a estas condiciones. Entre pensarlas como un algoritmo de cálculo para verificar el resultado de una cuenta ya realizada, y concebirlas como la caracterización de la división entera, hay un complejo proceso de transformaciones que la secuencia debía ayudar a promover.

2) En las dos secuencias desarrolladas, los alumnos debieron establecer el dominio de las variables en juego, y analizar la cuestión de la cantidad de soluciones. **Estudiar condiciones sobre las variables supone tomar el problema como objeto de análisis**, tarea que puede pensarse como un primer acercamiento a la práctica de estudio de tipos de problemas. Por ejemplo, los alumnos debieron resolver el problema de encontrar cuentas de dividir, dados el dividendo y el resto. Si bien el problema no fue dado en forma genérica sino que se trataron distintos casos con datos determinados, los niños enfrentaron ejemplos en los que no había ninguna cuenta, otros en los que había una única cuenta y otros en los que había varias. Esto dio lugar a un análisis sobre las condiciones sobre los datos que llevan a cada caso.

3) La concepción de la matemática como actividad modelizadora y **el papel que allí cumplen las escrituras**, también estuvo presente en el momento de optar por una secuencia sobre problemas de enunciado verbal en los que hay un grado de libertad entre las variables[13]. A propósito de estos problemas los alumnos debían producir soluciones y explicar cómo se obtienen y luego, en una segunda etapa, discutir la cantidad de soluciones, definir el dominio de las variables y proponer una fórmula para producir soluciones. Nos interesa detenernos ahora en la manera en que concebimos la producción de fórmulas y el valor en cuanto al aprendizaje de los alumnos que le estábamos atribuyendo.

Si bien no esperábamos escrituras convencionales –salvo en lo relativo a fórmulas sobre áreas de figuras planas, los alumnos no tenían experiencia al respecto- pensamos que la escritura de una fórmula les exigiría modelizar el problema a través de una relación entre las variables del mismo. En este proceso, se explicitarían relaciones que podrían quedar en un nivel muy implícito si los alumnos expresaran las soluciones anotándolas en una tabla completada usando relaciones de covariación –fue la opción de muchos alumnos- o si sólo produjeran algunas soluciones sueltas.

4) Al concebir esta secuencia, nos preguntamos **cómo podrían validarse las fórmulas** que produjeran los alumnos. Hay en esa producción un aspecto convencional que no puede validarse a partir de propiedades matemáticas. Al respecto pensamos que las interpretaciones que los alumnos pudieran hacer de una cierta producción (distinta de la propia), darían sentido a considerar las escrituras como objeto de reflexión, creando un espacio para la introducción de las convenciones, que el docente debería establecer. Como veremos al analizar la secuencia, esta opción dio lugar a la producción de escrituras muy personales y cuya interpretación sólo era posible si se completaba con una explicación oral que cada productor debía agregar. Justamente poner a prueba las producciones a partir de la interpretación que otros pudieran hacer, fue una forma de ajustarlas y de comenzar a independizarlas de lo oral. La relación entre lo escrito y lo oral que los textos de Bosch y Chevallard proponen, nos ayudó a visualizar esta posible gestión de las escrituras y a interpretar los hechos de las clases.

[13] Por ejemplo, uno de los problemas propuestos fue: Marisa tiene 20 pesos en monedas de 10 centavos y de 50 centavos. ¿Cuántas monedas de cada clase puede ser que tenga?

La cuestión de la modelización nos conduce a la siguiente reflexión: una vez que se dispone de un modelo, las operaciones que en él se efectúen se validan a través de propiedades matemáticas. Pero la validación del modelo mismo, puede requerir cuestiones algunas de las cuales no son estrictamente matemáticas: no hay teoremas que permitan establecer que una fórmula describe un enunciado, por ejemplo. La validación del modelo requiere una fuerte interacción con el contexto modelizado. Si este contexto es exterior a la matemática, suele agregar conocimientos que la matemática no puede aportar. Dado que el papel del contexto en el proceso de validación ha sido objeto de reflexión en otros trabajos que consideramos, dejamos pendiente la cuestión para retomarla más adelante.

Los problemas que hemos propuesto no exigían transformar las fórmulas que los niños producirían. Esa hubiera sido una opción que nos hubiera hecho entrar de lleno en la problemática algebraica. Recordemos que nuestro trabajo, se reivindica a sí mismo como perteneciendo al campo de la aritmética. La relación aritmética-álgebra es, ya lo hemos dicho, su marco de referencia. Nos ocuparemos a continuación de algunos trabajos que la tratan específicamente.

3. Los trabajos referidos a la relación aritmética-álgebra

3.1 La relación aritmética álgebra desde la perspectiva de los instrumentos de control

a) El papel del contexto en la atribución de significados: el trabajo de R. C. Lins

Romulo Campos Lins desarrolla un marco desde el cual interpretar la producción de significados en Álgebra y realiza un aporte respecto del papel de los contextos específicos en el proceso de significación. El trabajo que analizaremos a continuación – aunque se ubica en una perspectiva que en algunos puntos se aleja bastante de nuestro marco didáctico general- nos ha provocado muchas reflexiones que nos han ayudado a comprender mejor nuestra posición con respecto a la introducción del álgebra en el ámbito escolar. Este autor analiza además, la cuestión del tratamiento de las operaciones aritméticas como objeto, en una perspectiva próxima a la que desarrollamos a propósito de la división entera. Coincidir y polemizar con un trabajo, es siempre estimulante para precisar la propia posición, es por eso que nos hemos detenido en este texto tal vez un poco más que lo que es usual en una reseña bibliográfica.

Una definición de conocimiento

Como decíamos, el trabajo que analizamos se refiere al proceso de producción de significados para quienes no están inmersos aún en el mundo del álgebra[14]. Este autor señala tres cuestiones con relación a un "texto" algebraico, por ejemplo la ecuación $3x + 10 = 100$:

1) la ecuación puede ser concebida de diferentes formas (puede evocar una condición que debe cumplir un cierto número, o puede hacer pensar en una balanza en la que 100 kilos pesan lo mismo que tres objetos iguales y una pesa de 10 kilos, o puede pensarse como una "cuenta" que da como resultado 100, etc.);

2) estas diferentes significaciones no son distintas interpretaciones de un mismo objeto sino que constituyen en realidad diferentes objetos ya que orientan las operaciones que se pueden o no se pueden hacer en cada caso;

3) la manera de concebir el objeto limita el conjunto de "textos" sobre lo cuales se puede producir un significado similar (por ejemplo, si se piensa en una balanza, no será posible atribuir en ese contexto alguna significación a la ecuación $3x + 100 = 10$).

Para entender por qué Lins considera que las distintas formas de significar la expresión constituyen en realidad diferentes objetos, es necesario señalar que este autor establece que un conocimiento es, para un sujeto, **un par** constituido por una declaración que el sujeto considera verdadera (*statement-belief*) y por una justificación que el sujeto hace para sostener esa verdad. De esta manera, si con respecto a una misma declaración, distintos sujetos dan justificaciones diferentes, poseen de hecho diferentes conocimientos. Las justificaciones son entonces constitutivas de los objetos. Es por eso que en el ejemplo dado, al cambiar las justificaciones que se dan respecto de cómo operar con el texto "$3x + 10 = 100$", cambia el objeto. Desde esta perspectiva, producir conocimiento no es solamente producir nuevas declaraciones, sino también proponer nuevas justificaciones para las "mismas" declaraciones.

Nos interesa llamar la atención sobre el hecho de que Lins está excluyendo de su definición los conocimientos que se ponen en juego en la acción para tomar una decisión, pero que el sujeto no explicita.[15] Lins rechaza explícitamente la noción de conocimientos implícitos y para ello argumenta que en realidad cuando se habla de conocimientos implícitos, es un tercero (por ejemplo un investigador) quien interpreta en términos de conocimientos las decisiones tomadas por el sujeto que las puso en acto. Desde nuestro punto de vista, es claro que siempre es un investigador u otro sujeto el que hace una interpretación de lo implícito en términos de conocimiento, pero esto no niega –pensamos– el hecho de que para tomar una decisión muchas veces se ponen en acto relaciones que el sujeto no es capaz de explicitar y cuya naturaleza es muy diversa. Para abundar en su argumentación, Lins sostiene que el funcionamiento humano supone muchos procesos que ponemos en práctica y de los que no tenemos conciencia (por ejemplo procesos químicos del organismo); no tendría sentido decir en esos casos que se trata de conocimientos implícitos. Pensamos que este argumento es un poco tramposo porque cuando se habla de conocimiento implícito se habla de un conocimiento que se pone en acto en un contexto, a raíz de una tarea finalizada, y con el objetivo de tomar una decisión para cumplir la finalidad. Es en la interacción con un objeto y a partir de la intención de actuar que puede ponerse en juego un conocimiento implícito. Convengamos que no es para nada el caso de los procesos químicos del organismo humano.

Lins advierte sobre el riesgo que comporta interpretar que un sujeto ha puesto implícitamente en juego una relación cuando en realidad ha puesto otra. Si bien ese riesgo existe

[14] Si bien el autor no lo explicita en su texto, interpretamos que se trata de un estudio de condiciones de entrada al álgebra.
[15] Podría ser que el sujeto no explicitara sus conocimientos porque la situación no se lo exige o porque no es capaz de hacerlo. Nos referiremos ahora al caso en el que el sujeto no es capaz de explicitar las relaciones que ha utilizado.

y la manera en que lo describe Lins nos recuerda al "efecto Jourdain"[16] identificado por Brousseau (1986), pensamos que el hecho de que los investigadores suelan sobre-interpretar las producciones de los sujetos, no constituye una razón suficiente para despreciar la noción teórica de conocimiento implícito. Por el contrario, desde nuestro punto de vista, se trata de una noción que obliga al investigador a hacer el esfuerzo de reconstruir un modelo acerca de los conocimientos del alumno, bajo el supuesto de que las decisiones que éste toma en tanto sujeto epistémico forman parte de un sistema organizado que le permite conocer. Se trata siempre de una interpretación que aporta explicaciones posibles, del tipo *"todo ocurre como si"* y no de sentencias del tipo *"es así"*. La noción de conocimiento implícito tiene un valor teórico y la cuestión de la interacción con el alumno a partir de haber interpretado sus acciones en términos de conocimientos implícitos, es otro asunto.

A pesar de esta distancia con respecto a la concepción de conocimiento que nos separa de Lins, la idea que este autor propone, de concebir el conocimiento explícito ligado indisolublemente a la justificación que se pueda hacer de él, nos ha ayudado a mirar más finamente el grado de contextualización de las justificaciones dadas por los alumnos, lo cual ha resultado fértil para la interpretación de nuestros datos.

La producción de significados a la luz de la idea de modelización

Retomemos la idea de que un mismo "texto" puede constituirse en diferentes objetos en función de los significados que se movilicen para operar con él (por ejemplo, la resolución de la ecuación $3x + 10 = 100$, a partir de considerarla como la representación de una balanza en equilibrio). En términos de modelización, pareciera que Lins hace intercambiables el sistema modelizado (matemático o extra matemático) y el sistema que se usa para modelizar. Así, por ejemplo, la ecuación puede servir como modelo de la balanza pero también la balanza puede funcionar como modelo para la resolución de una ecuación lo cual, desde la concepción de Lins, significa que aporta elementos de justificación extra matemáticos.

Sin embargo desde nuestra perspectiva, las dos situaciones son bien diferentes: pensar la ecuación como modelo de la balanza, es pensar en un instrumento matemático de producción de conocimientos sobre un objeto exterior a la disciplina y esta actividad recupera el sentido que tiene la matemática como actividad científica; pensar en la balanza como modelo de la ecuación es una estrategia didáctica destinada a quien tiene que aprender el uso de la herramienta matemática. Es usual que en nuestro sistema de enseñanza, docentes y textos hagan una analogía entre el objeto "balanza" y el objeto "ecuación" bajo el supuesto de que operar sobre el primero informa sobre el modo de operar con el segundo. Justamente el trabajo de Lins advierte sobre la distancia entre ambos objetos y aporta un fundamento que pone en tela de juicio el funcionamiento de la enseñanza usual.

Las consideraciones anteriores nos llevan a reflexionar sobre la pertinencia (o no) de un contexto extra matemático muy familiar cuando se busca la emergencia de justificaciones matemáticas. Por ejemplo, para el problema de las monedas al que nos hemos referido, hemos encontrado que una alumna, obviando la cuestión de las unidades, escribe en su carpeta:

[16] Se trata de uno de los efectos del contrato didáctico analizados por Brousseau: frente a la necesidad de asegurar su éxito, puede ocurrir que el docente reconozca en una acción banal del alumno, un conocimiento "sabio".

"necesito 20 monedas de 50 para obtener 10 pesos, entonces 20 x 50 = 10" Este pequeño hecho da cuenta de dos cuestiones en tensión: por un lado, la modelización algebraica obligaría a precisar aquello que puede sobreentenderse apelando al contexto, para lo cual es necesario que el contexto sea conocido; por otro lado si el contexto aporta mucha información, ¿hasta qué punto se estará dispuesto a entrar en la "dureza" del álgebra y apreciar su potencia como herramienta de modelización? En otros términos, un contexto muy familiar pareciera desmatematizar la situación, un contexto muy alejado, haría perder de vista referencias necesarias para la producción. Si bien la resolución de esta tensión no es objeto de nuestro trabajo, nos parece que es necesario profundizar en esta cuestión dado que el pasaje de la aritmética al álgebra es también el pasaje de problemáticas más contextualizadas afuera de la matemática a cuestiones más contextualizadas en el interior mismo de la disciplina.

La caracterización del álgebra según Lins

Sobre la base de las ideas del conocimiento como un par formado por una declaración y una justificación, Lins sostiene que no es muy razonable definir el álgebra como un conocimiento, ya que justamente puede haber muchas maneras de producir significados para las sentencias del álgebra. *"Instead of saying that algebra is knowledge, we would do better saying that it is a set of statements with the characteristics described above. Notice, however, that we know nothing about the meanings which will be produced for them by a given person, in a given situation; they may well be related to a scale-balance or to a function machine. That characterization of algebra is operational for the purposes of research; I will show that it is also operational for the purposes of development"*[17].

"Filtrando" el planteo de Lins a través de la "lente" que proponen Bosch y Chevallard, no queda claro cuál es el papel que el autor le otorga a las escrituras mismas en el proceso de significación. Al respecto podríamos decir que hay un aspecto en el que las perspectivas se aproximan y otro en el que se alejan. Se aproximan, porque en ambos marcos queda establecido que las escrituras no determinan significados únicos, sino más bien evocan ciertas ideas que dependen de las prácticas del sujeto con respecto a dichas escrituras. Se alejan, porque Lins parece separar la escritura (el texto) de los posibles significados que se le podrían atribuir, como si la escritura misma evocara una idea ya establecida pero no interviniera en la producción de esa idea. Por otro lado, Lins no hace referencia al aspecto instrumental de la escritura algebraica (y al de sus transformaciones) que da un sentido interno a dichas escrituras.

Quisiéramos resaltar otras dos cuestiones a propósito de la cita de Lins: 1) decir que el álgebra es un conjunto de sentencias, puede hacer perder de vista el proceso de producción de dichas sentencias, ligado a una cierta finalidad de modelización; 2) la caracterización que propone Lins, se refiere al álgebra como un asunto que ya está en la cultura y debe ser aprendido por un alumno. Desde nuestro punto de vista, Lins no define el álgebra sino a un

[17] En lugar de decir que el álgebra es un conocimiento, diríamos más bien que es un conjunto de sentencias con las características antes descriptas. Notemos de todos modos, que no sabemos nada respecto de los significados que serán producidos por una cierta persona en una situación dada. ellos pueden relacionarse tanto con una balanza como con una función en tanto "máquina", Esta caracterización del álgebra es operacional para la los propósitos de investigación. Mostraré que también es operacional para el desarrollo.

proceso de construcción de significados para el álgebra, en el ámbito escolar. En este sentido, pensamos que la perspectiva del autor, según la cual diferentes justificaciones para un "texto algebraico" suponen diferentes objetos, es interesante para quien está aprendiendo pero, quien ya ha "entrado" en el mundo del álgebra, es capaz de sintetizar en una cierta escritura múltiples significados ligados a cierto objeto que la escritura representa [18]. Esta es justamente una característica de los procesos de generalización, como lo veremos un poco más adelante. Veamos ahora el ejemplo prometido.

R. Campos Lins desarrolla una actividad que se refiere a un contexto particular (un dibujo de dos tanques y explicaciones a propósito de la cantidad de líquido contenida en cada uno). Les propone a los alumnos producir "frases" referidas a la situación y para escribirlas, utiliza letras como abreviaturas. Las expresiones que se van obteniendo deben ser vistas como descripciones y no como ecuaciones[19]. Una vez producidas una serie de declaraciones que se refieren al contexto y que se justifican a través de él, se les propone a los alumnos explorar otra manera de producir declaraciones correctas sobre la situación, examinando relaciones entre sentencias ya establecidas; por ejemplo se les pregunta cómo se podría llegar a la frase (establecida anteriormente) $x+4\ l = y$, a partir de la frase (también establecida anteriormente) $x + 9\ l = y+5\ l$. Esta propuesta involucra dos pasos esenciales: 1) las sentencias se transforman ellas mismas en objetos y, 2) esto es posible si el pensamiento del alumno se aparta de manera abrupta de la situación de los tanques. Lins señala que se les propone a los alumnos decir algo sobre un objeto que todavía no existe para ellos (las sentencias como objetos) y dice que hay acá una paradoja epistemológica. Sin embargo, el mismo autor plantea que se trata de producir un nuevo significado para una sentencia a la cual ya se le había atribuido un significado. En este sentido decir que se invita a los alumnos a trabajar sobre algo que no existe para ellos, nos parece exagerado. Los alumnos deben cambiar de perspectiva, de alguna manera cambiar de "marco" (en el sentido de R. Douady), pero pueden hacerlo porque hay una atribución inicial de significación que les permite alguna interpretación de la sentencia con la que interactúan.

Por otro lado, Lins se pregunta: ¿por qué el alumno tomaría en cuenta el nuevo significado, en lugar del -o además del- que había elaborado originalmente? Considera que esto es una paradoja didáctica.

La resolución de estas paradojas es posible según Lins gracias a la presión, que podrá ejercer el investigador que tiene la clara intención de que el alumno produzca nuevos significados re-interpretando sentencias que se habían producido en referencia a un contexto, como transformaciones de otras sentencias que el alumno también ya había producido. El factor clave es la intención de comprometer al alumno en una nueva actividad y en ese momento, la autoridad del investigador juega un papel esencial. El autor resalta la ruptura que esto supone -por oposición a la idea de transición- ruptura que se promueve en una interacción en la que uno de los interlocutores (el alumno) se involucra en una acción que no comprende de entrada, a

[18] Es claro que una escritura puede representar también diferentes objetos.

[19] La situación presenta el dibujo de dos tanques, uno al lado del otro, y en cada uno se marcan diferentes niveles de líquido. Al lado del dibujo hay un texto que indica que el tanque de la izquierda se llenaría con 9 litros más, mientras que el de la derecha quedaría lleno con 5 litros más. Una descripción posible es $x + 9\ l = y + 5\ l$.

partir de atribuirle al otro (el investigador que está cumpliendo en este caso una función docente) el conocimiento de las razones por las cuales vale la pena entrar en esa propuesta.

Este modo de concebir el cambio de perspectiva a partir de la interpretación que pueda hacer el alumno de la intención que tiene quien ejerce la autoridad del conocimiento, nos parece próximo al tipo de interacción que hemos descripto al tratar la noción de contrato didáctico (hay una adaptación social, que podría provocar una adaptación cognitiva). En definitiva, la ruptura de la que habla Lins, es una ruptura cognitiva pero también una ruptura de "contrato" (se esperaba del alumno que produjera significados directamente a partir del contexto y ahora se espera que transforme una sentencia en otra).

Si "miramos" las ideas recién expuestas desde nuestro marco de Teoría de Situaciones[20], podríamos decir que la interacción con un medio (el contexto particular) favorece la producción de conocimientos, pero la reinterpretación de los significados producidos a la luz de propiedades matemáticas sólo podrá ser motorizada a partir de la clara intención del docente, en tanto representante del saber cultural. Sin embargo, en el marco de la teoría de Lins no queda claro el papel de algo equivalente a un "medio" y, como lo hemos señalado en el capítulo anterior, un proceso de aprendizaje basado solamente en interacciones sociales, puede hacer perder de vista –pensamos- el objeto matemático en juego.

Una indagación de Lins sobre las operaciones como objeto

En una indagación a través de entrevistas con alumnos de 12 años, Lins propone problemas en los que de alguna manera los estudiantes se enfrentan a la división y a la multiplicación en tanto algoritmos de cálculo y en tanto relaciones. Su objetivo es conocer sobre qué clase de objetos operan los alumnos y el papel de los interlocutores en el proceso de producción relacionado con la búsqueda de la solución. Uno de los problemas planteado fue el siguiente:

> Para calcular cuántas naranjas cabrán en cada caja, se divide el total de naranjas por el número de cajas:
>
> $$\text{Naranjas por caja} = \frac{\text{Total de Naranjas}}{\text{Cantidad de cajas}}$$
>
> a) Si hay 1715 naranjas, y quiero ubicar 49 naranjas en cada caja, ¿cuántas cajas se necesitan?
>
> b) Si te digo el número de naranjas que hay en cada caja, y el número de cajas, ¿podrías calcular el número total de naranjas?

[20] Aunque no siempre tiene sentido mirar un marco desde otro, en este caso pensamos que la mirada es lícita y que nos permite reafirmar el papel ineludible del docente en el proceso de inserción de los conocimientos producidos en un sistema organizado de conocimientos o, en otros términos, en el proceso de transformación de los conocimientos en saberes.

R. Lins plantea que al dar la fórmula, se proponía indagar si la misma podría constituirse para los alumnos en un objeto útil para enfrentar el problema o para ofrecer justificaciones. Aunque las maneras de abordar son diferentes entre sí, ninguno de los alumnos entrevistados hace referencia a dicha fórmula.

Desde nuestro punto de vista, consideramos que es difícil que la sola presencia de la fórmula en el problema, lleve a los alumnos a usarla como medio de resolución o de justificación. En primer lugar, el ítem a) puede ser pensado por alumnos de esta edad, como un problema de división de los que están acostumbrados a resolver, sin apelar a ninguna fórmula. En términos de Bosch y Chevallard, la fórmula no aportaría en este caso un valor instrumental, en el sentido en que no optimizaría las resoluciones a los que los alumnos están habituados. Notemos además que la fórmula debería invertirse para resolver el problema planteado ya que la misma está dada para buscar el "*valor de una parte*" y se pide para hallar "*la cantidad de partes*". Para resolver el segundo ítem, también se requeriría una inversión de la fórmula. Digamos finalmente que usar una fórmula como medio de justificación es un conocimiento del orden de lo metamatemático, que difícilmente se adquiera de manera espontánea, con lo cual hay muy pocas chances de que los alumnos lo pongan en juego si no fue un asunto tratado explícitamente en la enseñanza (cuestión que desconocemos).

..El análisis de las entrevistas lleva R. Lins a concluir que para cada alumno, los números fueron "objetos" diferentes, tuvieron diferentes propiedades y jugaron diferentes papeles. En ninguno de los casos informados, intervinieron las propiedades de las operaciones y en todos hubo dificultades para tratar con cantidades genéricas. Amparado en estos hechos, el el investigador plantea que las operaciones no funcionaron como "objetos" para los alumnos entrevistados. Desde el marco que R. Campos Lins propone[21], su objetivo es analizar el proceso de producción de significados y no establecer jerarquías en el desarrollo cognitivo. A través de su estudio, Lins hace la hipótesis de que puede haber una relación entre la habilidad para operar con cantidades genéricas y la posibilidad de construir un significado para las operaciones aritméticas independiente del hecho de calcular con valores reales.

A la opción que plantea Lins, de proponer un contexto extramatemático en el que se trata con cantidades genéricas, nuestro trabajo suma la posibilidad de plantear problemas en un contexto intra-matemático como medio de favorecer un proceso de objetivación de las operaciones aritméticas.

¿En qué sentido el trabajo que acabamos de analizar "se encuentra" con nuestro proyecto?

---

[21] R. Campos Lins propone un marco que denomina Modelo Teórico de los Campos Semánticos. Hemos considerado posible exponer las ideas del autor con relación a la producción de significados, sin desarrollar su teoría. De todos modos, damos algunos elementos. Lins define que un campo semántico es la actividad de producción de conocimiento con relación a un núcleo (kernel) dado. Un núcleo puede ser el contexto parte-todo, o la balanza, o la función como máquina, o el dinero. Frente a la tarea de resolver un problema, lo que determina el campo semántico no es el contenido al que se refiere el problema, sino los objetos que se movilizan para resolverlo y justificar dicha resolución. No siempre es posible resolver dentro de un cierto campo semántico, todos los problemas de una misma clase. Estos límites deben ser ineludiblemente discutidos en un proceso de aprendizaje.

1) Si bien Lins usa la idea de operaciones "como objetos" para ejemplificar acerca del proceso de atribución de significados, pensamos que de la lectura del trabajo se infiere que el autor ubica la conceptualización de las operaciones aritméticas en tanto relaciones entre cantidades genéricas, en el ámbito de la transición (ruptura) aritmética-álgebra.

2) Ya hemos relatado que, propósito de la secuencia sobre división entera, nuestro análisis a priori nos llevó a identificar diferentes significados para la expresión (para el texto, en términos de Lins) *Dividendo = divisor x cociente + resto* y a considerar el problema didáctico de la transformación de dichos significados. El análisis de Lins nos permite justificar mejor el hecho de que una misma expresión puede tener significados diferentes en función del uso que se le dé y de las justificaciones que se produzcan sobre ella y ofrece elementos para pensar que el paso de un significado a otro implica producción de nuevo conocimiento. Nos interesa resaltar que, en la medida en que la indagación de Lins se basa en entrevistas individuales, y entonces situaciones puntuales en las que no se puede ver la dinámica de una situación de clase, queda afuera de su trabajo la cuestión de la evolución de la conceptualización de las operaciones hacia una objetivación de las mismas, cuestión que sí exploramos en nuestro trabajo. Notemos además que la idea de diferentes significados para una misma expresión está también presente en el análisis que hacen Bosch y Chevallard acerca de la coactivación de ostensivos y no ostensivos en el trabajo matemático, pero estos autores se centran en el funcionamiento institucional de los objetos y Lins se sitúa en el estudio de la cognición de los sujetos.

3) Dado que en la secuencia de problemas de enunciado verbal, los alumnos debían establecer el dominio de validez de las variables y producir justificaciones al respecto, el trabajo de Lins nos confirma la necesidad de poner una lupa sobre el tipo de explicaciones que producen los alumnos, sobre todo en cuanto al grado de contextualización que las mismas tienen.

b) La cuestión de las estrategias de control como divisoria entre la aritmética y el álgebra. La perspectiva de Balacheff.

El trabajo de N. Balacheff que citamos, es el posfacio de un libro que reúne diversos textos –entre otros el de R. Lins, recién reseñado- sobre la cuestión didáctica de las relaciones entre aritmética y el álgebra. Es por esto un texto que resume la perspectiva de diferentes autores. Balacheff sostiene, de manera próxima a la que plantea Lins, que el control es parte del conocimiento. Más específicamente, dominar un conocimiento supone dominar un sistema de representación, un conjunto de operadores y una estructura de control, para monitorear la actividad de resolución de problemas. La concepción personal asociada a un conocimiento supone estas tres dimensiones, junto con una caracterización del dominio de problemas en el cual el conocimiento es eficiente.

Balacheff, citando diversos trabajos, considera que la mayoría de los alumnos pretenden usar el contexto extra-matemático al que se refiere el problema, en lugar de aceptar renunciar al significado original para validar el trabajo en el marco estrictamente algebraico. El autor señala que los contextos extra-matemáticos no ofrecen, en el caso de problemas de cierta complejidad, elementos para probar ya sea la existencia de una solución, ya sea que se han agotado todas las soluciones. Es aquí donde el álgebra aparece como necesaria.

Según Balacheff, si el sujeto que resuelve un problema referido a un contexto extra-matemático, hace uso de las herramientas simbólicas del álgebra, pero controla su producción a través del contexto al que se refiere el problema, por ejemplo haciendo evaluaciones numéricas, no está inmerso en el álgebra sino en algo que denomina "aritmética simbólica". Más allá de un asunto de nombres en el que no nos interesa profundizar, la separación que establece el autor pone el acento en la cuestión de las herramientas que se usan para validar la resolución de un problema.

Tomamos de este trabajo dos ideas:

1) la posibilidad de que los alumnos avancen hacia la producción de argumentos apoyados en propiedades de las operaciones, frente a la necesidad de decidir sobre la cantidad de soluciones (ese ha sido uno de los asuntos en las dos secuencias que hemos diseñado) y,
2) la necesidad de favorecer un trabajo de validación con los alumnos, que sobrepase las constataciones empíricas que suponen las evaluaciones numéricas.

3.2 La relación aritmética álgebra desde la perspectiva del cálculo relacional

"Mirando" la relación aritmética álgebra a través de los problemas de enunciado que se tratan en uno y otro dominio, G. Vergnaud, A. Cortés y P. Favre Artigue (1987) señalan que mientras la resolución aritmética de un problema en lenguaje natural consiste en buscar las incógnitas intermedias en un orden conveniente y elegir los datos y las operaciones adecuadas para calcular estas incógnitas, el álgebra consiste en escribir relaciones explícitas entre incógnitas y datos para luego hacer un tratamiento relativamente automático hasta llegar a la solución. Es necesario así renunciar a calcular las incógnitas auxiliares y evitar preocuparse por la significación en términos de enunciado del problema, de los pasos intermedios que se realizan en la resolución de la ecuación. En la tesis de B. Grugeon (1995) hay diferentes ejemplos de resoluciones realizadas por alumnos con experiencia en álgebra elemental, que intentan conservar el sentido de cada paso, para problemas que requieren operar con una ecuación.

Profundizando esta perspectiva, Nadine Bednarz y Bernadette Janvier (1996) estudian el tipo de relaciones que se espera que los alumnos pongan en juego a propósito de los primeros problemas algebraicos que se les proponen y analizan las distancias entre estas relaciones y las que los alumnos utilizan en las prácticas aritméticas. Para esto, las autoras realizan un análisis a priori de los problemas "aritméticos" y "algebraicos" que aparecen en los libros de texto y se preguntan si los nuevos problemas ofrecen una motivación suficiente para usar nuevas herramientas. Al confrontar los razonamientos espontáneos con los más "algebraicos" que se espera que los alumnos aprendan, el trabajo se propone lograr una mejor comprensión de los cambios que se requieren de los alumnos en el pasaje de un tipo de tratamiento a otro.

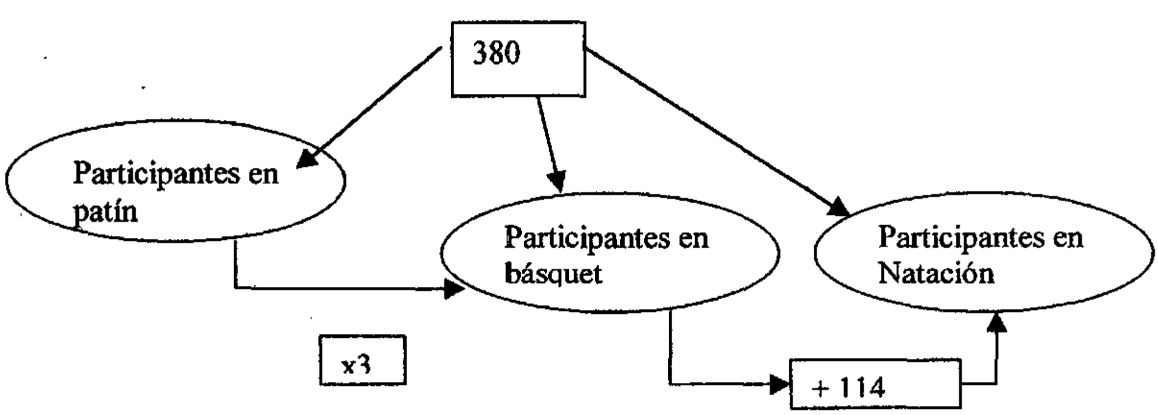
El trabajo informa sobre las respuestas de alumnos de 12-13 años, a problemas del mismo tipo de los analizados a priori, que se administraron a través de un test escrito. La clasificación de los tipos de respuestas orienta la selección de alumnos para entrevistas personales en las que se busca por un lado, precisar el tipo de razonamiento espontáneo, previo a una enseñanza algebraica, que realizan los alumnos para abordar estos problemas y, por otro lado, estudiar las reacciones de estos alumnos frente a la propuesta del investigador de una resolución "algebraica".

Las autoras se ubican en una perspectiva según la cual la adquisición de nuevo conocimiento implica una extensión del conocimiento previo que se constituye en un marco de referencia y, al mismo tiempo, las nuevas adquisiciones suponen una ruptura con los viejos conocimientos. Desde esta postura general, se preguntan si los conocimientos aritméticos son obstáculo o "puente" para los conocimientos algebraicos.

La comparación de problemas aritméticos y problemas algebraicos en este trabajo

El trabajo considera un tipo particular de problema que las autoras denominan "reparto desigual". Damos como ejemplo un enunciado y el correspondiente esquema que pone de relieve las relaciones involucradas:

> En las actividades deportivas de una escuela se anotaron 380 estudiantes. En básquet se anotaron tres veces más estudiantes que en patín y en natación, 114 más que en básquet. ¿Cuántos estudiantes se anotaron en cada actividad?



Por un lado, en este tipo de problemas no se pueden establecer fácilmente relaciones entre los datos, por otro lado, es necesario procesar simultáneamente dos tipos de relaciones (multiplicativas y aditivas) cuya composición es compleja. Para resolverlo, es necesario "ver" que la cantidad de participantes en patín se repite tres veces para el básquet y otras tres para natación. La complejidad del problema varía en función de la naturaleza de las relaciones que se utilicen y de las conexiones que se establezcan entre las incógnitas. Por el contrario, en los problemas aritméticos que los alumnos están acostumbrados a resolver, se puede ir de los datos a la incógnita a través de relaciones que son fáciles de establecer. El trabajo pone el acento en las diferencias fundamentales que existen en cuanto a las relaciones involucradas, entre los dos tipos de problemas.

Los procedimientos puestos en juego por los alumnos frente a los problemas

Los procedimientos utilizados por alumnos sin experiencia algebraica frente a problemas como el del ejemplo, se clasifican en cuatro categorías: 1) obtener algún estado a partir de un dato y aplicar entonces las sucesivas relaciones planteadas en el problema (incorrecto), 2) realizar ensayos a partir de estados hipotéticos, ajustándolos hasta llegar a la solución, 3) considerar un reparto en igual cantidad de partes y luego aplicar las relaciones entre los distintos estados (incorrecto) y 4) tomar en cuenta la estructura del problema y utilizar las relaciones correctamente, por ejemplo estableciendo cuántas veces se repite una cierta cantidad.

La realización de entrevistas personales

Como hemos dicho, esta clasificación de los procedimientos "aritméticos" orienta la selección de alumnos que son entrevistados, que se agrupan según los tipos de procedimientos puestos en juego en el test. Las entrevistas apuntan a dos objetivos: precisar los procedimientos aritméticos y analizar cómo interpretan los alumnos los procedimientos algebraicos propuestos por el investigador.

En una primera etapa, los estudiantes resuelven tres problemas del tipo del expuesto en el ejemplo, referidos los tres al mismo contexto y con diferentes grados de dificultad. En una segunda etapa, se propone a los alumnos dos modelos de resolución a través de ecuaciones: una es la ecuación clásica que resuelve el problema y la otra intenta recuperar las relaciones usadas por el alumno en el test escrito. Se les pedía a los estudiantes que eligieran uno de los procedimientos. Las autoras plantean que de esta forma se proponían evaluar cómo percibían los alumnos la ecuación "clásica" y si la misma estaba o no cerca del procedimiento original propuesto por el alumno. Antes de entrar en la resolución algebraica, las investigadoras indagaban si los alumnos eran capaces, dado el valor de una de las incógnitas, obtener los otros. El objetivo de esta instancia era explorar si los alumnos comprendían las relaciones entre las variables.

Bednarz y Janvier se formulan la siguiente pregunta: *"How will these students, depending on their reasoning profile, react to a new mode of treating these problems?* (página 128).

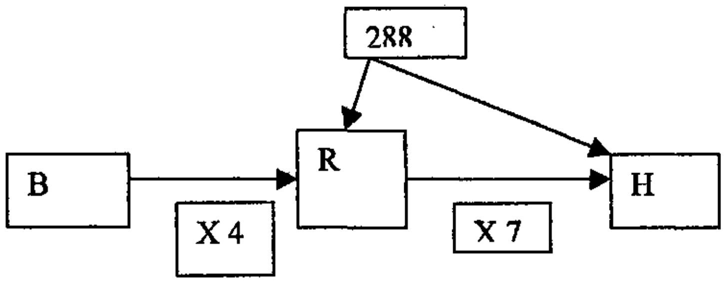
Pensamos que subyace a esta pregunta un supuesto de posible dependencia entre el tipo de razonamiento aritmético puesto en juego, y la manera de interpretar el procedimiento algebraico que el investigador les propone a los alumnos, dependencia que las autoras parecen querer explorar. Teniendo en cuenta que el tratamiento algebraico implica la utilización de nuevas herramientas semióticas que – ya hemos citado a numerosos autores que así lo consideran- no son simplemente la representación de algo que ya se ha pensado, sino que modifican sustancialmente la manera de pensar, creemos que sería razonable esperar que alumnos con un mismo comportamiento aritmético reaccionen de maneras diferentes frente a esta nueva manera de abordar que subyace a las estrategias algebraicas.

Bednarz y Janvier hacen a priori, la suposición de que los alumnos que usan la estrategia de crear un estado inicial hipotético (procedimiento de tipo 2), estarían más cerca de una solución algebraica. Sin embargo, las autoras señalan que los resultados contradicen esa suposición, ya que los alumnos que realizan ensayos numéricos, van calculando paso a paso los estados intermedios, sin llegar a manejar las dos relaciones involucradas en el problema, de manera simultánea.

Los alumnos que percibieron la estructura global del problema - se trata del procedimiento aritmético más avanzado – si bien comprenden las resoluciones algebraicas, no consideran que las mismas sean convenientes y priorizan las propias estrategias ya que les han resultado útiles. Pensamos que en estos casos, la idoneidad de lo aritmético aparece como un obstáculo para la aceptación de lo algebraico. Sin embargo, pareciera que por el tipo de indagación realizada, - una interacción puntual con los alumnos y no un trabajo que dura un cierto tiempo- es difícil establecer si para estos alumnos hay una gran resistencia a aceptar lo algebraico o si, pasado un tiempo de interacción con las nuevas estrategias, las mismas serían fácilmente incorporadas.

Al presentar el primer problema en la situación de entrevista, los investigadores preguntaban a los alumnos si los datos dados eran suficientes para resolver el problema o habría que conocer algo más. Pensamos que es una pregunta interesante, que exige mayor anticipación de las relaciones entre las incógnitas que si se pidiera directamente que resolvieran el problema.

Quisiéramos detenernos en los procedimientos "algebraicos" que las investigadoras presentan a los estudiantes. Para una mejor comprensión mostramos un esquema del problema y la presentación que hacen los investigadores:

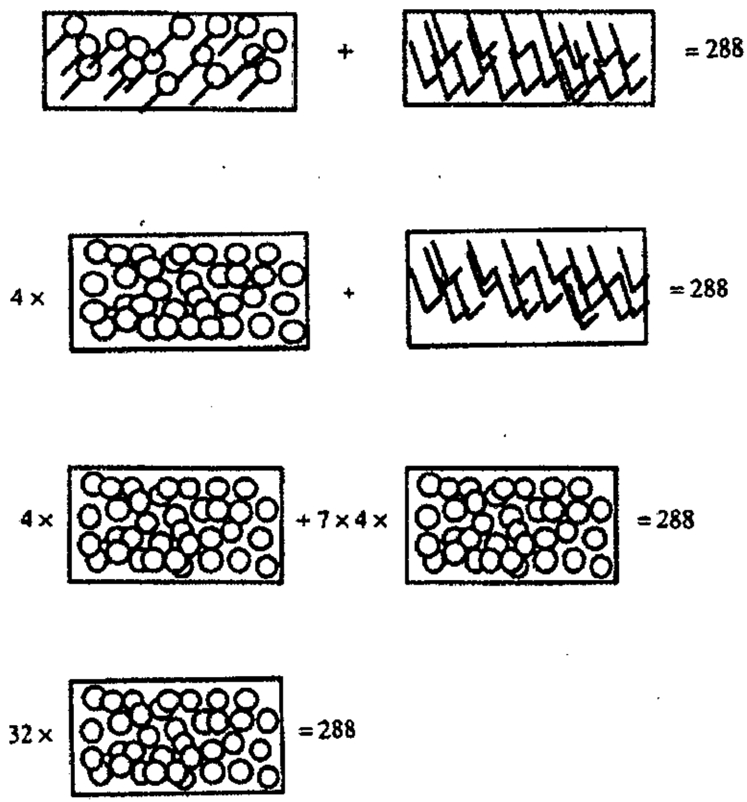


B: cantidad de pelotas
R: cantidad de raquetas
H: cantidad de palos de hockey

La presentación que las autoras denominan "algebraica" no hace uso de letras para las incógnitas sino que las mismas se representan a través de unas tarjetas en las que hay dibujadas pelotas, raquetas y palos de hockey. No se explicitan en la publicación que estamos analizando las razones de esta opción pero en todo caso, no hay desde nuestra perspectiva, razones para suponer que la misma sería más viable (más fácil, más accesible) que el uso de letras.

Justamente en el artículo se señala la dificultad para operar con la "incógnita", dificultad que, pensamos, se puede ver incrementada por el uso de una representación ad hoc. [22]

Además, la solución algebraica se va presentando paso a paso:



Las autoras del trabajo señalan que el hecho de ir presentando la solución de la ecuación paso a paso, e ir haciendo alusiones constantes al significado en términos del problema, aleja el procedimiento que ellas plantearon a los alumnos, de aquellos que son usuales en álgebra. Sin embargo, ellas señalan que esto les permite comprender la distancia que separa al estudiante de la solución en cada etapa y de esta manera interpretar mejor las dificultades que los alumnos encuentran. Desde nuestro punto de vista, esta presentación inhabilita al alumno para anticipar y analizar globalmente la estrategia (no sabe dónde está yendo), anticipación que consideramos necesaria para la comprensión de cualquier procedimiento. En otros términos, en la medida en que no se despliega toda la estrategia sino que se va mostrando por etapas, pensamos que se hace inaccesible para el alumno la finalidad de cada paso; por esta razón pensamos que la falta de comprensión de un paso en particular no informa claramente respecto de las dificultades generales que pudieran tener los alumnos con respecto a esta manera de encarar el problema.

[22] Pensamos que una representación que ha sido especialmente inventada para el problema que se está tratando, tiene menos chances de ser considerada un objeto sobre el cual es posible operar, porque los alumnos saben que es una representación no convencional y no le otorgan entonces el valor de un objeto que está en la cultura y cuyo funcionamiento deben comprender.

En las conclusiones se señalan dificultades que coinciden con las encontradas en otros trabajos, por ejemplo en la tesis de Brigitte Grugeon (1995):

- los alumnos no componen las dos relaciones involucradas y pasan por estados "intermedios"
- las sustituciones para pasar a una única incógnita resultan difíciles
- algunos alumnos rechazan la posibilidad de operar con la incógnita

Señalemos que en esta investigación se considera un tipo particular de problemas –los usuales en el sistema de enseñanza que las autoras estudian-, lo cual supone un recorte respecto de lo que se consideran capacidades necesarias para entrar en el trabajo algebraico.

Dos aspectos esenciales del estudio que acabamos de reseñar nos han ayudado a pensar nuestra problemática:

1) por un lado el **énfasis en lo relacional** nos ha permitido concebir el interés de un trabajo didáctico sobre relaciones en el campo de la aritmética escolar,
2) **la identificación de conocimientos que no son visibles cuando los alumnos ya están inmersos en el trabajo algebraico.**

Bednarz y Janvier consideran que los problemas analizados son una posible vía de entrada al álgebra. Aunque hemos elegido otros asuntos para tratar con los alumnos, estos resultados nos han sido útiles para concebir un trabajo sobre relaciones en una perspectiva de generalización de las operaciones y de los problemas.

4. *La expresión de la generalidad como aspecto central de la actividad matemática*

4.1 La perspectiva de J. Mason

La generalización de problemas y operaciones que los alumnos habían tratado en sus prácticas aritméticas fue –lo hemos señalado ya– un aspecto central en las secuencias que elaboramos. Es por eso que nos ha interesado el trabajo de J. Mason (1996) que, ubicado en la problemática didáctica del álgebra, trata específicamente la cuestión de la generalización.

De manera global, Mason considera que sensibilizar a los alumnos respecto del tipo de generalización que supone la actividad matemática y plantearles un juego permanente y dual, entre generalización y especialización (particularización), son aspectos que constituyen el objetivo central de la enseñanza de la matemática. Al hablar del *"tipo de generalización que supone la actividad matemática"* Mason está reconociendo –pensamos- que hay algo específico de esta disciplina, en un mecanismo –el de la generalización- que es propio de la inteligencia humana y que, con distintas particularidades, se juega en todas las actividades del hombre. La especificidad está dada por la naturaleza de los objetos sobre los que se generaliza y por la manera en que se justifica la generalización.

La distinción que hace el autor entre hacer uso de la generalidad en el plano de la acción y tener conciencia de dicha generalidad, nos ha parecido relevante al enfocar nuestro trabajo. Efectivamente, en las prácticas aritméticas usuales los alumnos hacen un uso general de los algoritmos de las operaciones; sin embargo, al no plantearse explícitamente que ese funcionamiento es general, queda oculto el hecho de que hay un sistema organizado de conocimientos que **explica** por qué **siempre** se procede de la misma manera, por ejemplo para obtener el resultado de una división. Comenzar a tomar conciencia de la generalidad que subyace a los procedimientos y establecer comparaciones para buscar lo común a los distintos casos que se reúnen en un único algoritmo, parecen ser procesos completamente imbricados.

En la secuencia de división entera que hemos realizado, la posibilidad de concebir esta operación como relación entre sus elementos, es también la posibilidad de reunir aquello que los alumnos repitieron una y otra vez como hechos aislados –las cuentas de dividir-, sin haber tenido la oportunidad de ligarlos entre sí.

Mason plantea que un camino para desarrollar la conciencia de la generalidad es promover la búsqueda de lo particular en lo general y de lo general en lo particular. Generalizar es hacer hincapié e ignorar, dice el autor.

¿Qué significa ver lo particular en lo general? Este autor toma como ejemplo, la siguiente afirmación: *"la suma de los ángulos de un triángulo es 180 grados"*. Al analizar esta expresión, se centra en dos palabras que considera claves: *"un"* y *"la"*. El artículo indefinido *"un"* es una manera de referirse a todos los triángulos, el artículo definido *"la"* es la marca de algo particular, un invariante, en el conjunto de los triángulos. Desde la perspectiva de la construcción de la generalidad, Mason le atribuye menor importancia al hecho de que ese invariante sea 180 grados e interpreta que la dificultad de los alumnos en usar el teorema no radica en que se olvidan del 180, sino que no tienen en cuenta la generalidad de la invarianza que se está expresando.

Ver lo general en lo particular supone la posibilidad de preguntarse, a propósito de un problema particular que se esté resolviendo, qué idea general se podría extraer de dicha resolución. En la secuencia de división entera, uno de los problemas propuestos fue: *Encontrar cuentas de dividir en las que el divisor sea 32 y el resto 27.* El problema siguiente planteaba: *Encontrar cuentas de dividir en las que el cociente sea 43 y el resto 27.* Se trata de dos problemas particulares. Sin embargo, a partir de los mismos se puede generalizar que las mismas relaciones sirven para resolver las dos clases de problemas. Pensamos entonces que en esta secuencia estábamos apuntando a generalizar un tipo problema que en principio se presentó a través de una secuencia de varios problemas particulares con una estructura similar, al tiempo que se conceptualizaba la división entera como objeto.

La relación entre lo particular y lo general también está presente –pensamos- en la secuencia de problemas aritméticos a dos variables. Efectivamente, cuando los alumnos trabajan con una fórmula para producir soluciones, se encuentran frente a un "objeto" que es al mismo tiempo, un algoritmo de cálculo que les permite obtener soluciones particulares, una representación de las relaciones entre las variables del problema, y una representación del conjunto de las soluciones. Estos cambios de centración que exigen "ver" la misma expresión de modos diferentes, contribuyen con el proceso de generalización. Además las fórmulas propuestas, debían coordinarse con otros modos de representar las soluciones, por ejemplo, tablas de valores. En estas coordinaciones también hay un juego entre soluciones particulares y conjunto de soluciones.

A propósito de la relación entre lo general y lo particular, Mason propone una reflexión interesante respecto del papel del ejemplo en las clases de matemática. Cuando un profesor propone un ejemplo, es para él un ejemplo de algo, es un caso particular de una noción más general. Para el alumno en cambio, el ejemplo es una totalidad, no puede verlo como un caso particular de alguna cuestión. La tarea de los alumnos es entonces reconstruir la generalidad a partir de los casos particulares, tarea que no siempre están en condiciones de realizar correctamente ya que los estudiantes pueden centrarse en aspectos diferentes de aquellos que el docente tiene en su mira.

A modo de caracterización de la generalización, Mason señala: *"Generalization, in which I include variation and extension, as well as pure generalization, is one means for broadening the scope of reference and applications of a result, thus placing it in ever broader contexts by removing particular restrictions. Another is connections-seeking, staying with the particular, but trying to see what other aspects of mathematical thinking, both topics and processes, are related or drawn upon".*

Retenemos del trabajo de Mason:

1) La importancia de que los alumnos comprendan **la naturaleza de los procesos de generalización en Matemática,** como un aspecto esencial de la comprensión de lo que es la matemática misma.
2) La necesidad de **hacer explícito un trabajo de generalización implícita** que los alumnos venían desplegando como producto de sus prácticas anteriores.
3) La fertilidad de **propiciar un juego entre lo particular y lo general** para profundizar en los procesos de generalización.

4.2 Acerca de las diferentes maneras de concebir la cuestión de la generalización en las prácticas escolares.

Un ejemplo planteado en el apéndice del trabajo de Mason suscita en nosotros una reflexión respecto de un tipo de ejercicio que se viene instalando como medio de introducir a los alumnos en el uso de fórmulas. Se trata de "mostrar" una secuencia ya sea de números o de configuraciones con algún ícono, para que los alumnos propongan la fórmula para expresar el número o la cantidad de elementos del lugar ***n*** de la secuencia. El ejemplo que aparece en el artículo de Mason es el siguiente.

The following is an extract from *Supporting Primary Mathematics: Algebra* (Mason, 1991b).

SEQUENCE: Say to yourself (or to a colleague) what you see in the picture sequence. Then state a rule in words for extending the sequence of pictures indefinitely. Work on it for yourself before reading on.

En la medida en que se muestran tres "términos" de la serie y no se define cómo está constituida la secuencia, se está invitando a los alumnos a establecer la ley a partir de unos pocos ejemplos. De esta manera, pensamos, se promueve un trabajo de generalización inductiva. En algún sentido, a través de este tipo de actividades, se está comunicando una idea que "calza" bien con una creencia de muchos alumnos: lo que se observa en algunos ejemplos puede ser transferido a un conjunto infinito o, en otros términos, "las regularidades no se rompen". Una actividad como la descripta presenta problemas al nivel de la validación. Efectivamente, se espera que los alumnos "encuentren" que la regularidad no se rompe[23], y se trasmite la idea de que la ley es única (aunque se llegue a ella de diferentes maneras). Sin embargo, en realidad, cualquier ley que se plantee, que respete los tres ejemplos propuestos, podría ser considerada correcta. La actividad cambiaría sustancialmente si la ley de formación de los elementos estuviera definida no por "mostración" como en el ejemplo, sino de alguna otra manera que pudiera actuar como elemento de control de la producción de una fórmula para determinar el elemento "n" de la secuencia. Por ejemplo, en el mismo artículo de Mason, se propone el siguiente problema:

The picture below (see Figure 5) shows a rectangle made up of two rows of four columns and of squares outlined by matches. How many matches would be needed to make a rectangle with *R* rows and *C* columns?

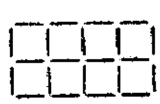


Figure 5.

En este caso, queda claro cómo está constituido un término de la secuencia, de manera independiente de los anteriores. Resulta entonces que los ejemplos que se proponen pueden actuar como punto de apoyo para establecer una ley general, pero ésta se controla de una manera que no es inductiva. Un ejemplo como este último supone un trabajo de generalización constructiva (García, R; 2000), más acorde con el trabajo matemático.

[23] Somos concientes de que implícitamente en esta frase también estamos suponiendo la existencia de una regularidad.

5. Conclusiones

Los trabajos que hemos reseñado, nos ayudado a clarificar nuestra posición respecto de la relación aritmética-álgebra y a precisar mejor el tipo de cuestiones que podríamos estudiar a través de las secuencias didácticas.

Reconocemos la ruptura que supone el pasaje de la aritmética al álgebra y no pensamos que secuencias didácticas como las que proponemos en nuestro estudio, cumplirían la función de "llenar" un hueco que suavice la transición. Nuestro proyecto apunta a explorar qué nuevos conocimientos producen los alumnos cuando se plantea un espacio para el trabajo explícito sobre algunas relaciones que ellos han tratado implícitamente a lo largo de su escolaridad. No nos interesa discutir si nuestro proyecto es más o menos aritmético, más o menos algebraico: siempre es posible armar una definición que haga que las cosas calcen donde uno quiere hacerlas calzar. Estamos interesados en estudiar si el tipo de problemas que proponemos, da lugar a la producción de conocimientos que, por estar naturalizados en prácticas futuras, resultarán difíciles de identificar cuando los alumnos ya estén inmersos en prácticas algebraicas. Nos preguntamos también si la explicitación de dichos conocimientos es relevante para entender mejor el mundo del álgebra. Nuestro trabajo consiste fundamentalmente en describir y analizar procesos de producción en clase.

Al pensar un trabajo didáctico que requeriría justificaciones, nuestra mirada se orientó a estudiar la diversidad de explicaciones posibles por parte de los alumnos y no buscamos condiciones que forzaran a los niños a abandonar el apoyo que suponen los contextos particulares. Nos propusimos estudiar también las condiciones de emergencia de argumentos deductivos y su interacción con aquellos basados en evaluaciones numéricas.

La validación de las escrituras espontáneas de los alumnos se produce en la interacción con otros compañeros, a través de un proceso de negociación colectivo regulado por el docente, que supone sucesivos ajustes y abandono progresivo de lo oral.

La coordinación de distintas maneras de representar las soluciones de un problema que tiene varias o infinitas soluciones ofrece la oportunidad de establecer relaciones entre cada solución particular y el conjunto de soluciones posibles. En esta interacción entre lo particular y lo general, se profundiza el nivel de generalización que los alumnos alcanzan.

Capítulo 3

Las opciones metodológicas de nuestro estudio

1. Introducción

Hemos planteado en la introducción de este trabajo, las razones por las cuales hemos optado por estudiar la producción de conocimientos en clases y a raíz de situaciones didácticas elaboradas por nosotros mismos. Nuestra experimentación se ubica en la perspectiva de la ingeniería didáctica, indisolublemente ligada a la Teoría de Situaciones. Desarrollaremos a continuación nuestra interpretación de esta metodología de investigación. En la segunda parte de este capítulo explicitaremos de manera más detallada las condiciones en las que realizamos el trabajo en las aulas y en la última parte, informaremos sobre un primer trabajo de recolección de datos que ha sido el punto de partida de nuestro estudio.

2. La ingeniería didáctica como metodología de investigación

En un artículo que ha sido en su momento muy clarificador para nosotros, M. Artigue (1989) señala que la ingeniería didáctica *"se caracteriza por un esquema experimental basado en las realizaciones didácticas en clase, es decir en la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza".*

El análisis que lleva a la producción de una cierta situación ocupa un lugar esencial en la metodología: el mismo debe proporcionar un marco que permita estudiar el desarrollo en la clase, de las situaciones didácticas que el investigador diseña.

Hablamos de *estudiar* las situaciones más que de *ponerlas a prueba*, ¿por qué?. La expresión "poner a prueba" podría llevar a pensar que se esperan resultados –más o menos universales- del tipo *"con esta situación se aprende tal contenido"* o que pretenden validarse predicciones del tipo *"esta situación va a causar tal efecto"*. Sin embargo, nuestro propósito es de otra naturaleza: queremos analizar los procesos de elaboración de conocimientos en clase **en el marco de las situaciones propuestas.** Realizar un análisis descriptivo y explicativo de los conocimientos que emergen en la clase a partir de las interacciones –entre alumnos y "medio", entre alumnos y docente, entre alumnos entre sí- que se han propiciado por medio de las situaciones didácticas, es un resultado que se espera. Al tratar de producir explicaciones que pongan en relación los conocimientos de los alumnos con las situaciones propuestas, estaremos en mejores condiciones de caracterizar el tipo de conocimientos que constituirían un espacio posible de articulación entre prácticas aritméticas y prácticas algebraicas y el tipo de problemática a partir de la cual podrían emerger dichos conocimientos en clase.

De manera transversal, el análisis de las interacciones en la clase, nos permitirá comprender aspectos del funcionamiento de la enseñanza de la matemática que van más allá de las secuencias estudiadas y que podrían abrir nuevos problemas a indagar (el papel que puede jugar la interacción de un alumno con los procedimientos de otros, las condiciones en las que es fértil que la producción de un cierto alumno se comunique en el espacio público de la clase, el tipo de conocimiento cuya validación requiere de los otros y el que puede producirse de manera más autónoma, etc., etc.).

El proceso que se pone en marcha en la clase a partir de las situaciones que se elaboran, supone interacciones adidácticas con un "medio", en el "interior" de las interacciones didácticas. Las interacciones adidácticas se analizan *a priori*. ¿Qué significa esto?

2.1 Acerca del análisis a priori

El análisis a priori –en el que, como dice C. Margolinas (1993) el término a priori no significa primero temporalmente, sino independiente de los hechos de la experiencia-, ofrece un panorama de las potencialidades de la situación didáctica que se va a estudiar. A través del mismo, el investigador se responde una serie de cuestiones a propósito del problema matemático que forma el núcleo del "medio"[1] didáctico que concibe para la enseñanza de un cierto objeto: ¿cuáles son las posibles maneras de abordar el problema en función del sistema de conocimientos (el alumno) que interactúa con él?; ¿cuáles son las insuficiencias de ese sistema para resolver completamente el problema?; ¿cómo se superan esas insuficiencias?; definida una determinada estrategia para abordar el problema, ¿cómo la valida el alumno? ¿qué nuevos posibles abre cada estrategia posible? ¿por qué la realización de una cierta acción del alumno puede interpretarse en términos de un cierto conocimiento? ¿qué razones tendría el alumno para cambiar una estrategia por otra?

El análisis que surge a partir de responder preguntas como las anteriores tiene, a nuestro juicio, dos funciones básicas. En primer lugar, exige al investigador una fundamentación precisa de la situación en términos de relaciones entre un sistema de conocimientos (del sujeto), un problema matemático, y un conjunto de conocimientos (nuevos) que el sujeto produce en la situación. En segundo lugar, analizar "los posibles" de la situación, permite definir un conjunto de observables que constituirán una base para interpretar los hechos de la clase en el sentido en que ofrecerán la posibilidad de leer ciertas estrategias de los alumnos en términos de conocimientos puestos en juego.

El investigador utiliza conocimientos de diferente tipo para realizar el análisis a priori : sus conocimientos matemáticos, los conocimientos que la didáctica ha producido sobre el tema (en los que el propio investigador pudo haber participado); el funcionamiento del objeto matemático en cuestión en la institución en la que se desarrollará la ingeniería didáctica; en algunos casos, en función del objeto matemático, los análisis histórico-epistemológicos pueden nutrir el análisis didáctico; en otros, ciertos resultados de la psicología del aprendizaje, etc.

[1] Recordemos que a medida que el alumno va interactuando con el "medio", éste se va modificando porque incorpora los resultados que va produciendo el alumno, los aportes del docente o las conclusiones que se producen en los momentos colectivos de la clase.

¿Tiene el análisis a priori un carácter predictivo? Nuestra respuesta es sí y no.

Veamos primero los argumentos por el "no". En principio, y como lo señala Margolinas (op.cit.) el análisis de los posibles es teórico e intenta "atrapar" en qué sentido la lógica interna del problema ofrece resistencia a un cierto sistema de conocimientos, obligándolo a producir adaptaciones. Un análisis de posibles es un análisis hipotético, se trata en este caso de hipótesis de trabajo y no de hipótesis a ser testeadas una a una en términos de realización efectiva. Un análisis teórico no puede pretender determinar lo que va a ocurrir efectivamente en una clase, como producto de las interacciones entre personas, en un proceso en el que juegan gran cantidad de factores de naturaleza muy diversa. El análisis a priori intenta identificar de manera teórica cuáles son los conocimientos en juego en la situación, las evoluciones a las que la misma debería dar lugar y los medios de validación que podrían ponerse en juego. Esta identificación es central para quien va a ejercer la función docente y hace posible que se manifieste en la clase cuál es la intencionalidad didáctica de la situación..

El hecho de que no se produzcan las posibles estrategias que el análisis permitió identificar, no necesariamente invalida dicho análisis. Por el contrario, podría ocurrir que el mismo análisis que explica en términos de conocimientos ciertas acciones, pueda clarificar, también en términos de conocimientos, que ninguna de esas acciones haya emergido en la clase. Digamos también, que la definición de los conocimientos del alumno que interactúa con el medio, es genérica. Por otra parte ninguna indagación previa podría establecer con precisión todos los conocimientos que tienen los alumnos reales y que podrían tener alguna influencia (positiva o negativa) en la interacción con la situación. De hecho algunos de esos conocimientos podrían ser del orden de lo normativo, y recién ponerse de manifiesto a propósito de la situación misma sin que el investigador haya podido establecer a priori que podrían jugar en las decisiones del alumno [2]. Ahora bien, si se anticipa que un cierto conocimiento está de una u otra manera en juego en una situación, y los alumnos abordan la situación usando conocimientos muy alejados de los anticipados (ofrezca o no el problema alguna resistencia), hay razones para suponer que la relación entre el problema, un cierto sistema de conocimientos y los conocimientos a los que se apuntaba con la situación, no estuvo bien establecida.

Decíamos antes que el análisis a priori es independiente de la experiencia. Esto también merece ser explicado. Un investigador realiza en general varias experimentaciones con la misma situación, esto va profundizando su conocimiento de esa situación y le permite ir reconociendo en la misma aspectos que, aunque no incluyó de entrada en el análisis a priori, podrían haber estado incluidos en dicho análisis porque corresponden a modos de abordar de los alumnos, que se explican en función de los conocimientos que se consideraron (como puntos de partida o como elaboraciones en curso). Pongamos un ejemplo de nuestra experimentación: en uno de los problemas de división entera, los alumnos debían encontrar cuentas en las que el dividendo fuera 61 y el resto 13. Para resolverlo es necesario concebir la diferencia entre 61 y 13 como el producto del divisor por el cociente. Muchos alumnos para abordar el problema realizan esa diferencia pero piensan que el número que obtienen como resultado es el divisor. Les resulta difícil interpretar el resultado de un cálculo como un producto de dos números que deben hallar.

[2] Por ejemplo, en nuestra experimentación la norma "*la cantidad de soluciones de un problema se establece **siempre** a través de un cálculo*" se puso de manifiesto en el momento en que algunos alumnos, para pronunciarse al respecto, se centraron en la búsqueda de cálculos, desestimando otras estrategias posibles, como analizar la cantidad de valores que puede tomar la variable.

Esta dificultad no había sido analizada por nosotros de entrada, sin embargo, al observarla la primera vez que implementamos este problema en clase, la incorporamos al análisis a priori dado que "ver" un número como un producto de otros dos, es algo nuevo para los alumnos, vinculado a la problemática que estamos estudiando y que esta situación permite elaborar. Entonces, nuestro análisis a priori se nutre con nuestra propia experiencia, pero retiene en él, aquello que puede ser concebido de manera independiente de la experiencia. Para llegar a la conclusión de que un hecho no depende de la experiencia, es necesario hacer intervenir la experiencia. Podría replicarse que no haber considerado de entrada ciertos "posibles" de la situación es un error del investigador. Tal vez, pero eso no agrega ni quita algo al análisis que estamos haciendo, el investigador aprende en el aula, no va allí solamente a "probar" lo que ya pensó.

Profundizar el análisis a priori a partir de las sucesivas implementaciones de la situación que el investigador pueda realizar, le permite ir teniendo una representación de la situación según la cual, algunas cosas suceden "casi siempre", otras ocurren muy ocasionalmente, los mejores alumnos tienen ciertos comportamientos, los más flojos abordan de tal manera. Bajo ciertas condiciones culturales similares, las clases no tienen un comportamiento completamente uniforme, pero tampoco completamente imprevisible. El análisis a priori se torna predictivo.

Pensar el análisis a priori como predictivo comporta dos riesgos serios: a) encerrarse en las categorías que se han definido como punto de partida y no estar disponible para la construcción de nuevos observables y b) restringir el margen de acción del docente a partir de comunicarle la situación en términos de "lo que va a suceder". Esto fuerza al docente a que ocurra lo que debe ocurrir, desdibujando su propia intencionalidad, y desnaturalizando el sentido de la situación misma.

Pensar que el análisis a priori no es predictivo y que siempre se puede justificar por algún asunto contingente que los hechos ocurridos estén muy alejados de los esperados, hace perder de vista el núcleo duro de la teoría que es la relación epistémica entre problemas y producción de conocimiento.

En síntesis, suponer que el análisis a priori es predictivo, en el momento en que se elabora la situación, obliga a ser muy preciso en la fundamentación de la misma y eso resulta fecundo. En los momentos en que se comunica la situación al docente, se observa y se registra la clase o se analiza lo sucedido allí, es más productivo alejarse de la predicción.

2.2 La comunicación al docente de las secuencias didácticas

Desde las primeras investigaciones basadas en la metodología de la ingeniería didáctica, se vienen identificado algunos problemas al nivel de la comunicación al docente, de las situaciones didácticas que se quieren estudiar (Artigue, M.; Perrin Glorian; M.J; 1991). Por otra parte, en nuestro medio, el tipo de vínculo que entabla el investigador con el maestro o el profesor es objeto de algunas críticas. Abordaremos estas cuestiones a continuación.

En el artículo que acabamos de citar, Artigue y Perrin Glorian señalan que en muchas investigaciones de ingeniería didáctica, se suele dar al docente una descripción de la situación, condiciones de implementación, respuestas esperadas, en términos de un relato sobre los hechos sucedidos en otras clases a propósito de la misma situación, todo lo cual lleva al docente a tratar de reproducir la misma trayectoria (reproducción externa) sin que finalmente quede claro para él que se trata de preservar una cierta relación entre la situación y la producción de conocimientos a la que se apunta (reproducción interna) y que eso podría ocurrir a través de diferentes recorridos posibles. Una manera de salir al cruce de esta cuestión podría ser la de comunicar con bastante precisión, los fundamentos de las opciones que se han hecho para las secuencias.

Desde nuestro punto de vista existe una tensión entre brindar la mayor cantidad de elementos para que el docente pueda pensar anticipadamente sus intervenciones, sentirse más seguro, reducir su incertidumbre, por un lado y, por el otro, respetar el espacio de decisiones didácticas del docente.

Pensamos que es imprescindible realizar el esfuerzo de comunicar el sentido de las situaciones ubicándolas claramente en el campo de conocimientos al que se está apuntando. Si el docente puede ligar la secuencia que se está estudiando a su proyecto a más largo plazo, estará en mejores condiciones de movilizar aquello que se muestre necesario en la clase, de apelar a la historia de los alumnos, de ubicar el trabajo actual en relación al trabajo futuro. En nuestra investigación por ejemplo, esto ha sido difícil cuando hemos trabajado con maestros a los que les hablábamos de la ruptura aritmética-álgebra sin que ellos pudieran asimilar nuestro relato a alguna experiencia de enseñanza llevada adelante por ellos mismos (los maestros no enseñan álgebra) y ha sido más fácil en los casos en los que trabajamos con profesores.

Un aspecto que consideramos importante, es el de pensar situaciones que preserven su sentido para diferentes gestiones posibles, sabiendo que cada docente privilegiará algunos aspectos más que otros y que por lo tanto los conocimientos producidos de una clase a otra tampoco serán exactamente los mismos[3]. Ésta, parece ser una condición necesaria si se quieren estudiar en algún momento condiciones de inserción de las situaciones, en un sistema que funciona sin la presencia del investigador.

Lograr una comunicación con el docente que tenga en cuenta las consideraciones anteriores, requiere un tiempo de trabajo conjunto entre el docente y el investigador para que, sobre la base de las ideas "fuertes" que subyacen a la secuencia, el docente defina su propio proyecto. El análisis a priori realizado por el investigador es, para esta tarea, una herramienta fundamental.

Decíamos antes que la ingeniería ha sido objeto de críticas. Las mismas sobre todo se centran en señalar que, desde esta metodología, el investigador invade una tarea propia del docente que es la de elegir qué va a enseñar. Es cierto que el investigador que desarrolla un trabajo de ingeniería didáctica está asumiendo en parte una tarea que corresponde al docente; sin embargo, pensamos que en las condiciones señaladas anteriormente, que dejan un claro espacio para que el docente decida su gestión, esto no tiene porqué ser visto como una invasión. Así como un docente elige un libro de texto y, al hacerlo está delegando en los autores del libro parte de sus decisiones, también elige participar de una investigación de ingeniería didáctica; de otro modo la investigación no sería posible.

[3] De hecho esto siempre ocurre, ya que los conocimientos que se elaboran en la situación son, como ya dijimos, dependientes de los que el alumno tiene.

2.3 La experimentación, el análisis a posteriori y la validación

El trabajo experimental llevado a cabo en las clases es observado y registrado por uno o varios investigadores. Los modos de recolectar los datos son variables y no nos detendremos en este punto de manera general, sino que lo haremos a propósito de nuestro propio trabajo. Como hemos dicho, el análisis realizado a priori ofrece un marco para la observación, pero no es, por supuesto, la única referencia que tiene el investigador en ese momento. El marco general de la teoría, en particular la noción de contrato, los conocimientos que el investigador tiene respecto del docente (de su relación con la matemática, de sus concepciones de enseñanza y aprendizaje, etc.), los conocimientos que tiene de la clase que observa (cuáles son los alumnos fuertes, cuáles son los más flojos), su propia experiencia como docente o como investigador, dirigen su observación hacia uno u otro lugar.

Una vez desarrollada la secuencia que se estudia, se reconstruyen los hechos de la clase. En términos de la ingeniería didáctica, se realiza el análisis a posteriori. Este análisis se desarrolla usando diversas referencias: a las que ya hemos enumerado a propósito de la observación y registro de las clases, se pueden sumar marcos teóricos más locales, en función de la problemática que se está estudiando.

La ingeniería didáctica, como lo señala M. Artigue (1989), se ubica entre las metodologías de "estudio de caso" y se diferencia tanto de las metodologías que apelan a la comparación con un grupo testigo, como de aquellas que realizan un estudio naturalístico que excluye la intervención de la investigación en las situaciones de enseñanza. La validación que propone la ingeniería didáctica es interna y se realiza a través de la confrontación entre el análisis a priori y el análisis a posteriori. Pero esta confrontación no supone establecer si se cumplió o no lo que el análisis a priori "predijo" (ya hemos fijado nuestra posición con respecto a la predicción). El análisis a priori, permite establecer una relación entre estrategias puestas en juego y conocimientos en los que dichas estrategias se basan, identificar marcas de posibles evoluciones de los alumnos en términos de transformación de sus conocimientos, describir distintos significados de un conocimiento, establecer cuáles serían los asuntos a institucionalizar... Resulta por eso, una referencia esencial para reconstruir el proceso de producción de conocimientos en la clase. El interés del análisis a priori está dado por su fertilidad para realizar tal reconstrucción.

El análisis a posteriori, en tanto descripción de un proceso de producción de conocimientos en el marco de una situación (o de varias) excede ampliamente la confrontación con el análisis a priori. Las producciones originales de los alumnos, su perplejidad, su desconcierto o su satisfacción en tanto manifestaciones con relación al conocimiento, los pedidos de explicación que los niños demandan, las intervenciones docentes con sus supuestos y sus intenciones, las discusiones entre los alumnos, los modos en que ellos colaboran entre sí, las anotaciones que hacen en sus cuadernos, los momentos en que se puede identificar que alguien aprendió y las razones que se dan para ello, las reacciones efectivas de los niños frente a los problemas que enfrentan, los dispositivos que se crean para algún asunto particular como por ejemplo la organización de un debate, las puestas en común, las producciones que son resultado de la confrontación entre posiciones diversas.... son todos elementos que convergen para explicar y caracterizar **un** proceso de producción de conocimientos.

De todos estos elementos, algunos, los que se refieren más específicamente a la potencialidad de los problemas de la secuencia, pudieron haber sido considerados a priori. Pero queda claro que es en el momento en que se despliega el trabajo efectivo, con toda la riqueza y la complejidad característica de la actividad humana, que se puede comprender cómo una cierta comunidad de alumnos y docente ha dado lugar a una cierta producción.

Y aunque en tanto proceso particular no se vuelva a repetir jamás, es su sola y única existencia, la que le confiere valor, porque otros –docentes, investigadores, formadores– podrán aprender de ella. Queda sin embargo pendiente, precisar las condiciones bajo las cuales, su reproducción sería viable.

Digamos finalmente, que en el desarrollo del análisis a posteriori, pueden hacerse observables aspectos que sobrepasan la problemática que se está estudiando y que dan lugar a nuevos problemas didácticos que habrá que estudiar. Estas cuestiones -no podrían emerger si sólo se piensa lo que ocurrió, en contraste con lo que se pensó que iba a ocurrir– son las que alimentan la disciplina y permiten que siga viviendo.

3. Las condiciones de nuestra experimentación

Con el objetivo de definir mejor los "objetos" que introduciríamos en las clases y de formular hipótesis de trabajo para la elaboración de secuencias didácticas, nuestro trabajo experimental comenzó con la realización de un test diagnóstico dirigido a alumnos que empezaban su séptimo grado de la escuela primaria. Aunque los resultados de esta primera recolección de datos serán objeto del punto 4 de este capítulo, digamos por ahora que luego de analizar las respuestas de los alumnos a ese test, hemos decidido desarrollar en las aulas dos secuencias de enseñanza: una relativa a división entera y otra sobre problemas aritméticos a dos variables. Todas las secuencias fueron realizadas en clases de séptimo grado. Informamos en la siguiente tabla en qué momento y en qué escuelas desarrollamos cada una de las etapas del trabajo experimental.

	AÑO 1998	AÑO 1999	AÑO 2000
Test Diagnóstico	*Escuela M. Buber *Escuela Despertar *Escuela M. Nuevo		
Secuencia sobre División Entera		*Escuela Despertar	*Escuela Despertar *Escuela Municipal 19, Distrito Escolar 15. * Escuela J. Cortázar

Secuencia sobre Problemas Aritméticos		*Escuela Despertar *Escuela M. Buber	

La Escuela Municipal 19 "Naciones Unidas", del Distrito Escolar 15, es la única que pertenece al sistema público del Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires. Las otras tres escuelas, son privadas.

El diagnóstico fue tomado por nosotros, en dos días distintos para cada clase, a alumnos de séptimo grado de tres escuelas diferentes. Consistió en la resolución de problemas en forma escrita. Estaba permitida la utilización de calculadora. Las correspondientes docentes de las clases permanecieron en el aula colaborando en la implementación pero no participaron ni de la corrección ni del análisis de los datos. Nosotros observábamos a los alumnos mientras trabajaban e inmediatamente después de que entregaban sus hojas, indagamos a algunos de ellos en función de las observaciones que habíamos hecho. Estas indagaciones fueron grabadas.

En la escuela Despertar, la misma docente que nos prestó su clase para realizar el diagnóstico, trabajó con nosotros en las secuencias al año siguiente. Otro tanto ocurrió en la escuela M. Buber.

La docente de la Escuela M. Buber es profesora de Matemática, la docente de la escuela Despertar, es licenciada en Matemática. Ambas han participado de cursos de capacitación docente que hemos realizado y han participado en algunos de los seminarios que realizamos en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la UBA. Conocen a grandes rasgos nuestro marco teórico y nuestro enfoque de trabajo en las aulas.

A través de contactos con colegas, supimos que las docentes de la escuela J. Cortázar y de la Escuela Municipal 19, estaban dispuestas a que se desarrollara en sus clases la secuencia de división entera. Fue a partir de este trabajo experimental que conocimos a ambas maestras.

Para cada una de las secuencias desarrolladas, antes de la implementación nos reunimos dos veces con las docentes, para explicarles nuestro propósito en la investigación. Nos apoyamos para ello en el análisis a priori que teníamos hecho hasta ese momento[4]. La comunicación de estas cuestiones con las profesoras de M. Buber y Despertar fue oral y ellas tomaban nota de los aspectos que resaltábamos. Les entregamos los problemas de la secuencia por escrito. A las maestras de las escuelas Julio Cortázar y Municipal 19, les dimos además un pequeño apunte con las grandes líneas del análisis a priori. Este cambio se debe a dos razones: por un lado con ellas trabajamos en el año 2000, es decir después de haber realizado ya una vez la secuencia de división entera; esto nos dio un conocimiento de la misma que hizo posible que pudiéramos discriminar mejor lo más anecdótico de lo que apuntaba más claramente al sentido de la secuencia; por otro lado, a estas maestras no las conocíamos antes de la experimentación, esto nos llevó a pensar que un material escrito que ellas pudieran leer de manera independiente de la interacción con nosotros les podría resultar útil. Aclaremos sin embargo, que todo el tiempo estábamos sometidos a esa tensión a la que nos referimos en el punto anterior, entre *"decir detalladamente para preservar aquello que queríamos estudiar y al mismo tiempo*

[4] Como ya hemos explicado, el análisis a priori se enriquece con la experimentación.

colaborar con la docente" y *"no decir para no invadir el espacio de la maestra"*. Lejos de pensar que tomamos las mejores decisiones, toda esa etapa nos ha suscitado muchas reflexiones y seguramente hoy sería otro el contenido de un análisis escrito entregado al docente. En todos los casos, en las reuniones discutíamos de manera general aspectos de gestión de las clases: los momentos de trabajo en pequeños grupos y de puesta en común, cuestiones a institucionalizar, etc., tratando de no intervenir en asuntos de detalle. Sin embargo, en el momento de la experimentación, al finalizar cada clase, las docentes solían pedirnos opinión respecto de cómo seguir (trabajo individual, en pequeños grupos, en común, etc.) y se generaba una reunión informal en la que aportábamos nuestro punto de vista para la toma de decisiones.

Con la docente de la Escuela Despertar y a propósito de la secuencia de problemas aritméticos a dos variables, acordamos un dispositivo para la discusión sobre los procedimientos propuestos por los niños a raíz de uno de esos problemas. Lo analizamos en el capítulo correspondiente.

En todas las clases en las que trabajamos había un clima amable, las docentes tenían como modalidad dar lugar a la participación de los alumnos, estos intervenían en general sin inhibiciones. Los niños solían trabajar en pequeños grupos y en las clases se fomentaba la discusión colectiva. Estas fueron condiciones de partida que buscamos para realizar nuestro trabajo experimental y somos conscientes de que las mismas no se encuentran en cualquier clase. En la medida en que nos proponíamos explorar el funcionamiento de "objetos" acerca de los cuales no hay tradición en la cultura escolar, necesitábamos grupos de alumnos en los que estuviera instalado un mínimo hábito de aceptar abordar un problema aún cuando no se tuvieran todas las herramientas para hacerlo. Por otro lado, nuestro trabajo "requeriría" de la discusión colectiva para zanjar muchas de las cuestiones que se irían abriendo. Crear esas mínimas condiciones en los casos en los que no existen, constituye otro problema que nosotros tomamos como resuelto.

Todas las clases fueron registradas por escrito y en audio, por dos personas. Para registrar el trabajo de los pequeños grupos se procedió de la siguiente manera: en la primera clase de cada secuencia, se obtuvieron datos de todos los grupos y, luego de un primer y rápido análisis se seleccionaron cuatro pequeños grupos a los cuales registrar con más detalle. El criterio fue el de tratar de atrapar la mayor diversidad posible. Cada observadora se hizo cargo de registrar el trabajo de dos grupos, rotando de uno a otro y decidiendo sobre la marcha en cuál de los dos grupos permanecer, en función de las percepciones que iba teniendo respecto del interés –desde la perspectiva de nuestra problemática- del trabajo de los alumnos. En muchos casos, la docente se acercaba a alguno de los grupos e interactuaba con él a raíz de la producción de los niños. Hemos registrado algunos de estos momentos. Las puestas en común también se grabaron en audio y se registraron por escrito. Copiamos las anotaciones del pizarrón y fotocopiamos las carpetas de todos los alumnos de las clases observadas.

No hemos intervenido en la conducción de las clases pero hemos hecho preguntas en los pequeños grupos para tratar de comprender mejor algún aspecto de su producción.

Para cada una de las secuencias hemos seguido un criterio diferente para organizar el análisis a posteriori: en el caso del trabajo sobre división entera, analizamos problema por problema; en el caso de los problemas aritméticos a dos variables, realizamos el análisis escuela por escuela. Esta diferencia debe ser justificada.

La secuencia de división entera –esto se va a comprender recién cuando entremos en el análisis de la misma- da lugar a un trabajo de los alumnos que es, con respecto a la otra secuencia, más independiente de la intervención del docente y más estable respecto de las distintas gestiones posibles. Dado nuestro interés en explorar de manera global cuáles son los conocimientos que podrían caracterizar un posible espacio de articulación aritmética-álgebra, era para nosotros importante centrarnos en la potencialidad de cada problema para dar lugar a la emergencia de conocimientos que consideramos relevantes de cara a nuestra problemática. El análisis que hemos realizado "mira" entonces más los problemas que el aprendizaje de los alumnos o la gestión del docente. Somos conscientes de que este recorte no deja ver las evoluciones a lo largo de la secuencia y que tampoco "atrapa" las cuestiones que son específicas de cada recorrido particular.

La secuencia de problemas aritméticos a dos variables, provocó diferentes tipos de "resistencias" en una y otra escuela, y fue en general, mucho más dependiente de la gestión del docente. Dado nuestro criterio de no intervenir de una manera fuerte en la organización de las clases, las dos profesoras con las que hemos trabajado han privilegiado aspectos diferentes dando lugar, en suma, a dos secuencias diferentes. Por ejemplo, en una de las escuelas el proceso de negociación colectiva para llegar a la producción de una fórmula para obtener soluciones ocupó un lugar preponderante, mientras que en la otra, esa fórmula fue introducida por la profesora y, en cambio fue mucho más rico el trabajo alrededor de la búsqueda del dominio de las variables. Por otro lado, las diferencias en las cuestiones sobre las cuales los alumnos encontraban más dificultades, llevaron al planteo de problemas intermedios que fueron diferentes en uno y otro caso. Estudiamos entonces el proceso de producción de conocimientos en cada escuela y hacemos luego una comparación entre ambos casos.

Volvamos ahora a nuestro punto de partida, para analizar cómo los conocimientos del espacio de articulación aritmética-álgebra, comenzaron a asomarse a través del test diagnóstico que realizamos.

4. El test diagnóstico

Cuando comenzamos a pensar en este estudio que, como dijimos en la introducción de esta tesis, deriva de nuestro trabajo en la didáctica del álgebra elemental, pensábamos que el espacio de articulación entre la aritmética y el álgebra debía constituirse alrededor de problemas que exigieran considerar las relaciones como objeto de trabajo. Este aspecto que, como hemos dicho -gracias al uso de las letras que obliga a conservar la estructura de los cálculos-, es ineludible en el álgebra elemental, resulta muy distante de las prácticas aritméticas en las que toda traza de cálculo se esfuma en un resultado numérico final. Esto no significa que los problemas aritméticos usuales en los que se seleccionan datos numéricos de un enunciado, se eligen las operaciones a partir de las cuales los van a relacionar, se realizan las correspondientes operaciones y se obtiene un resultado numérico, no exijan el establecimiento de relaciones. Lo que estamos diciendo es que las relaciones no son el objeto que está en el centro del problema que se resuelve. Nuestra primera idea fue entonces que la interacción de los niños con problemas que enfocaran en relaciones numéricas podría ser una vía que contribuyera a enriquecer y transformar el espectro de posibles que ellos conciben con relación al trabajo matemático.

A partir de esta primera ubicación, pensábamos que los problemas que requerirían la movilización implícita o explícita de la noción de variable, exigirían tratar con la relación en la que está contenida dicha variable, para generar todas las soluciones posibles del problema en cuestión. Esto nos abría un posible camino de exploración. Por otro lado, teniendo en cuenta la distinción entre sentido y denotación que, como dijimos, algunos autores toman de Frege (Drouhard, J.P et al; 1995), pensábamos que valdría la pena indagar qué tipo de producción harían los alumnos frente a problemas en los que fuera necesario analizar la estructura de cálculos numéricos y establecer relaciones entre diferentes expresiones de los mismos, sin apelar a su realización efectiva.

Para que estas ideas tomaran un poco más de consistencia, para no lanzarnos a las aulas sin tener una noción acerca de la potencialidad que este tipo de problemas podría tener, para formular hipótesis de trabajo que orientaran la elaboración de las secuencias didácticas, decidimos explorar qué respuestas elaboraban frente a este tipo de problemas, alumnos que comenzaban su séptimo grado y que no tenían experiencia con los conocimientos en los que estábamos pensando. Fue así como pensamos en realizar un test diagnóstico que consistió en pedirles a los alumnos que resolvieran ciertos problemas de manera individual y escrita[5].

Con relación a los problemas nos proponíamos analizar:

- Las estrategias de base puestas en juego para abordarlos y la suficiencia o no de las mismas;
- La diversidad o no de procedimientos encontrados
- las formas de validación puestas en juego;
- la reacción de los alumnos frente a las infinitas o varias soluciones;
- la potencialidad para dar lugar en la clase a un proceso rico en interacciones;
- la posibilidad de prever evoluciones a partir de las estrategias puestas en juego.

El test constó de dos tipos de problemas:

A. problemas que vinculan dos variables con un grado de libertad, algunos referidos a áreas de rectángulos, otros a la noción de división entera y un tercer problema sobre un contenido extra matemático;

[5] Recordemos las condiciones de esta recolección de datos: los problemas fueron tomados en dos etapas por nosotros. Mientras los alumnos trabajaban, podían llamarnos para hacernos preguntas. En función de cuestiones observadas mientras los alumnos resolvían los problemas, hemos indagado a algunos de ellos cuando entregaron su hoja.

B. problemas que exigían el análisis de la estructura de cálculos aritméticos horizontales y con paréntesis, y la comparación entre los mismos.

Notemos que a esta altura no estábamos todavía centrados en las operaciones como objeto y todos los problemas que movilizaban la noción de variable estaban para nosotros ubicados en la misma categoría.

Para cada grupo de problemas, presentamos a continuación los enunciados, hacemos un breve análisis a priori de los mismos, e informamos sobre los resultados de manera global.

A. Problemas que vinculan dos variables con un grado de libertad

a) Los problemas sobre áreas de rectángulos

- Los enunciados

1. *Calculá el área de un rectángulo que tiene 25 cm de base y 4 cm de altura.*
2. *El área de un rectángulo es de 14 centímetros cuadrados y la base es de 5 cm. ¿Cuánto mide la altura? ¿Cuántas soluciones hay? Si pensás que hay menos que tres, escribilas todas y explicá por qué no hay más. Si pensás que hay más que tres, proponé al menos cuatro y explicá cómo pueden obtenerse otras soluciones.*
3. *Un rectángulo tiene un área de 21 centímetros cuadrados. ¿Cuáles pueden ser las dimensiones de la base y de la altura? ¿Cuántas soluciones hay? Si pensás que hay menos que tres, escribilas todas y explicá por qué no hay más. Si pensás que hay más que tres, proponé al menos cuatro y explicá cómo pueden obtenerse otras soluciones.*
4. *Un rectángulo tiene un área de 10 centímetros cuadrados. ¿Podemos saber cuál será el área si se duplican la base y la altura? Explicalo.*

- Breve análisis a priori

Los problemas apuntaron a analizar el funcionamiento de la multiplicación en el contexto particular de las áreas de rectángulos. El primero de la serie tiene simplemente la función de actualizar la fórmula, para asegurar su disponibilidad en los problemas siguientes.

A través del **segundo problema** nos preguntábamos:

- ¿invierten los alumnos la multiplicación o se aproximan por ensayos sucesivos hasta obtener un número que multiplicado por 5 dé como resultado 14?
- ¿escriben la fórmula del área del rectángulo? ¿la invierten o la usan de manera directa y luego invierten los números?

- En caso de que realicen ensayos: ¿tienen en cuenta cada resultado para aproximarse a la solución, o arrancan de cero cada vez? Notemos que quienes realizan ensayos tomando en cuenta cada resultado para ajustar la búsqueda, estarían dando cuenta de una cierta capacidad para controlar los efectos de un producto cuando se modifican los factores.

Al pedir a los alumnos que se expidieran sobre la cantidad de soluciones para un problema con solución única, buscábamos analizar si ellos podían proponer algún argumento para una cuestión (la unicidad de la solución) que resulta "transparente" cuando sólo se tratan problemas con solución única. Nos interesaba también contrastar las justificaciones que los alumnos pudieran dar en este caso, con las que se produjeran frente a los problemas con infinitas soluciones.

A propósito del **tercer problema** nos proponíamos indagar:

- Cómo reaccionan los alumnos cuando, por el hecho de haber un grado de libertad, deben atribuir ellos uno de los valores: ¿utilizan alguna fórmula? ¿apelan a una tabla de valores? ¿apelan a alguna marca gráfica para representar las variables? ¿buscan las multiplicaciones que recuerdan "de memoria" (7 x 3, 10.5 x 2, etc.) dejando oculta la idea de variable?
- Cuál es el dominio de variación que consideran para cada variable: ¿ambas naturales?, ¿una natural entre 1 y 21 y la otra racional?, ¿ambas variables racionales entre 1 y 21?
- ¿cuántas soluciones consideran? ¿cómo lo justifican?

Los criterios para elegir el número 21 para el área han sido los siguientes: nos interesaba analizar si a partir de un natural ellos movilizaban los racionales, queríamos que no fuera "muy grande" para explorar si eran capaces de atribuir a una de las dimensiones un valor mayor que la medida del área, y queríamos que no tuviera muchos divisores para que no encontraran "muchas" soluciones con las dos variables naturales.

Notemos que este problema nos permite conocer algo acerca de: la relación que establecen los alumnos entre multiplicación y división exacta, su representación de los números racionales, la manera en que enfrentan problemas en los que es necesario movilizar explícita o implícitamente la noción de variable y las justificaciones que proponen frente a un problema con infinitas soluciones.

El **problema 4** exige operar sobre las variables; es por eso, más complejo que el problema anterior. A raíz del mismo, nos proponíamos conocer:

- ¿qué nivel de generalidad le atribuyen al enunciado del problema? ¿*"un"* rectángulo, es para ellos uno determinado, o "cualquier" rectángulo que cumpla la condición de tener área 10?
- ¿aceptan la pregunta o directamente la rechazan diciendo que si no se conocen los lados *"no se puede saber*?

- En caso de aceptarla, ¿realizan ensayos? ¿qué papel juegan los mismos? ¿qué nivel de generalidad tiene la respuesta que dan? ¿apelan a alguna representación particular de la situación, por ejemplo, dibujos?
- ¿cómo justifican la respuesta? ¿apelan a unos pocos ejemplos? ¿proponen algún tipo de trabajo numérico, algebraico o gráfico que permita mostrar porqué siempre el área se cuadruplica? ¿qué nivel de generalidad tiene la justificación?

Observemos que de alguna manera, por el hecho mismo de formular la pregunta, implícitamente se está comunicando que existiría alguna relación entre el área dada y el área del rectángulo transformado. Se hacía interesante para nosotros observar si ese implícito jugaría de alguna manera, empujando a los alumnos a aceptar explorar el problema o si, contrariamente, los niños rechazarían operar sobre variables.

Como indican las preguntas que nos hacíamos acerca de este problema, estábamos interesados en conocer el nivel de generalidad que los alumnos le atribuían a la pregunta, el nivel de generalidad de la respuesta que ellos darían y el de la justificación que propondrían. Sin embargo, se hacen aquí más netos los límites de una indagación a través de un test escrito y con una interacción limitada con los niños. Efectivamente, no podíamos saber sólo por lo que hubieran escrito si una respuesta numérica por ejemplo, tenía para ellos el valor de ejemplo genérico o si era una respuesta a un caso particular. Para salvar en parte esta limitación, nos habíamos propuesto observar especialmente en el momento en que tomamos este diagnóstico, si los alumnos demandaban más datos o hacían alguna pregunta que nos informara algo respecto de cómo estaban interpretando el problema.

- Principales resultados

Ya hemos dicho que el primer enunciado tenía la función de poner en la escena la fórmula del área, y todos los alumnos la recordaban.

Los niños que resolvieron bien el **segundo problema**, -constituyen la mayoría- usaron la **división**, es decir pudieron invertir la multiplicación. Hemos encontrado una sola alumna que escribió la fórmula y la invirtió. Esta escritura no pareciera ser necesaria para realizar el cálculo.

Realizar **ensayos y ajustes** es una estrategia que no forma parte de las prácticas escolares. Es por eso que para ponerla en juego se requiere cierta iniciativa de parte de los alumnos. No parece razonable pensar que los alumnos que no pudieron invertir la multiplicación se animen a este procedimiento. Pensamos que por eso, **no fue un recurso** para quienes no pudieron movilizar la división.

Expedirse sobre la unicidad y sobre todo justificarla, fueron asuntos que provocaron cierto desconcierto: la mayoría de los niños no decidió si hay o no una única solución; otros dijeron que era la única porque *"no encontré otra"*; otros, aunque propusieron una única solución, dijeron que *"hay muchas"* lo cual parece ser la respuesta que ellos consideraron "esperada". Hay alumnos que interpretaron que "solución" era la forma de resolverlo y trataron de proponer otro procedimiento. Unos pocos niños dijeron que *"hay un único número que multiplicado por 5 da 14"* y un único alumno apeló al contexto de las áreas para justificar: *"si tengo la base y tengo la cantidad de centímetros cuadrados que tiene el rectángulo, no puede haber dos alturas".*

Pensamos que esta ausencia generalizada de justificaciones puede deberse a dos razones superpuestas: **la unicidad –o más generalmente la cantidad de soluciones- no es una cuestión que los alumnos hayan tratado en la escuela** (si siempre hay solución única queda oculto que hay al respecto algo a decidir) y, además, **tampoco tienen claro qué significa "explicar por qué"**. La pregunta abre entonces la posibilidad de comenzar a discutir sobre ambos aspectos y en ese sentido, es para nosotros potencialmente interesante.

Casi todos los alumnos pudieron desplegar alguna estrategia de base para el **tercer problema** y muy pocos pudieron concluir correctamente respecto de la cantidad de soluciones.

Los niños que no invirtieron la multiplicación en el problema anterior, en este caso apelaron a las multiplicaciones conocidas: 7 x 3; 21 x 1, eventualmente 10.5 x 2. Es decir ni invirtieron ni hicieron exploraciones, "colocaron" los números en la fórmula sin movilizar –pensamos- la noción de variable.

La mayoría de los alumnos que propusieron pares de valores, conservaron la condición del problema (área 21) ; hay sin embargo algunos que en el camino, perdieron dicha condición.

Entre los niños que propusieron pares de números que multiplicados dan 21, encontramos los siguientes procedimientos:

- Atribuir algunos valores naturales menores que 21 para la base y calcular la altura con una división, aceptando que el resultado de la división pueda ser racional. No se expiden sobre la cantidad de soluciones;
- Hacer una tabla de valores atribuyendo a una de las variables los números desde el 1 al 21 (dicen que hay o bien 21 soluciones o bien 42 porque podrían hacer lo mismo con la otra variable)
- Tomar un par solución de partida, por ejemplo (7; 3) y doblar una de la variables y dividir la otra por 2. Este procedimiento (covariación) por un lado liga las soluciones entre sí, por otro, "evita" atribuir valores a alguna de las variables e invertir la multiplicación. La idea de dependencia de una de las variables con respecto a la otra resulta menos evidente. (Un alumno ha escrito en su carpeta que de esa forma se obtienen todas las soluciones). Algunos de los niños que ponen en juego esta estrategia dicen que hay infinitas soluciones y otros dicen que "hay muchas".
- Expresar que *"hay que encontrar todos los números que multiplicados dan 21"* sin explicar cómo se obtienen.

Subyacen a casi todos los procedimientos dos ideas muy arraigadas en los alumnos, vinculadas con los números racionales: el orden usual de los racionales no es denso y el producto de dos números siempre es mayor que sus factores. Pensamos que en una situación de aula, la diversidad de procedimientos posibles frente a este problema constituiría un buen "medio" para discutir estos dos aspectos.

No tenemos certeza de que los alumnos que dijeron que *"hay que encontrar los números que multiplicados den 21"* supieran en realidad cómo hacerlo. Pareciera que hay una distancia entre reconocer la condición y poder generar pares que la cumplan.

Hubo alumnos que usaron la división para el problema anterior (se daba el área y la base y se pedía la altura) y no lo hicieron en este caso. Esto nos lleva a suponer que la necesidad de movilizar la noción de variable, al provocar una cierta ruptura, permite profundizar la relación entre multiplicación y división exacta.

Varios alumnos propusieron estrategias que comenzaron bien y se "perdieron" en el camino. Por ejemplo, una alumna escribió en su hoja: *"las soluciones son infinitas porque a 21 lo divido por cualquier número y busco alguna solución para obtener dos (base y altura).* A continuación anotó: *21: 5 = 4.2 x 2 = 8.4; 21-8.4 = 12.6 ; la base es 8.4 y la altura 12.6".* En su hoja hay varios ejemplos con el mismo algoritmo. Pareciera que la primer cuenta tenía el objetivo de "obtener" un valor de la variable, que no se podría atribuir directamente. Esta dificultad parece hacerle perder de vista la condición multiplicativa y terminó "pasándose" a una condición aditiva (los números que obtiene suman 21). Una interpretación posible para un procedimiento como éste, podría ser que al dividir, esta alumna "reparte" el área entre los lados. Como si el significado de la división como reparto estuviera interfiriendo. Esta interpretación –que es altamente especulativa ya que no tenemos demasiados elementos para sostenerla- sería consistente con la identificación que suelen hacer muchos alumnos entre área y perímetro.

Nos preguntábamos a priori si los alumnos encontrarían alguna "necesidad" de representar las variables. Muchos niños hicieron tablas y ninguno escribió la fórmula ni apeló al uso de letras. Nos llamó la atención la escritura de una niña que anotó en su hoja:

$$\begin{array}{r|l} 21 & \underline{\ 7\ } \\ 0 & \ 3 \end{array}$$

La alumna usó lápiz para el 7 y el 3 y tinta para el 21. Debajo del 7 y del 3 puso rayitas punteadas con tinta. Podría ser que la alumna utilizara lápiz para los resultados y tinta para los datos y esa fuera toda la explicación para su escritura; sin embargo, no es lo que hizo en otros casos. Nuestra interpretación es que la alumna diferenció el estatuto del número 21 (dato) del estatuto del 7 y del 3 que fueron valores transitorios (por eso los escribió en lápiz) que tomó circunstancialmente la variable. De todos modos es el único caso en el que encontramos esta "necesidad" de diferenciar las variables de los datos y no queremos extraer del ejemplo ninguna "moraleja" didáctica; simplemente lo mostramos como una producción a la que el problema dio lugar.

El **problema 4** ha resultado en general, difícil para los alumnos. Hubo dificultades para interpretar qué se pedía. Algunos niños pensaron que se les preguntaba si era posible, duplicando la base y la altura, conocer el área del rectángulo de partida, no del transformado. Interpretamos que estas dificultades se deben al salto que supone operar sobre cantidades desconocidas: la mayoría de los niños contestó que si no se conocen las medidas de los lados, no se puede saber el área, sin siquiera intentar hacer ensayos. En realidad, para hacerlos, pareciera necesario aunque sea sospechar que la relación buscada no depende de los lados, dado que, como lo señalan B. Inhelder y D. Caprona (1992), la elaboración de un procedimiento está muy orientada por la centración en el estado final de la tarea que se encara.

Algunos niños probaron con un ejemplo y contestaron que el área del nuevo rectángulo era de 40 centímetros cuadrados. Indagamos a algunos de ellos a los que les preguntamos si con otro rectángulo pasaría lo mismo. Hubo quienes nos respondieron que no sabían, que tendrían que probar, en tanto que otros nos dijeron que sí que pasaría lo mismo pero que para estar seguros debían probar con ejemplos. Esto último podría deberse a que estos alumnos no conocen otro modo de probar sus afirmaciones. Un niño nos "mostró" en su ejemplo, que *"si se multiplica cada lado por dos, todo se multiplica por 4"*; en este caso el ejemplo tiene, pensamos, un valor genérico (Balacheff, N; 1987). Pareciera entonces que el ejemplo puede tener diferentes significados: para algunos justamente no tendría valor de ejemplo, en tanto no estarían pensando en la existencia de una relación general (Mason; 1996); para otros puede tener un valor genérico y también podría ser que el ejemplo cumpliera la función de confirmar o mostrar una relación que se ha establecido previamente de algún otro modo.

Es interesante la producción de una alumna que trabajó con un rectángulo de perímetro 10 (en lugar de área 10). Duplicó la base y la altura y obtuvo un rectángulo de área 16. Luego escribió que el problema *"no me sale"*. Interpretamos que la respuesta podría estar dando cuenta de que la alumna estaba buscando una relación y no un resultado numérico, ya que podría haber respondido que el área del rectángulo nuevo es 16. Pareciera que la al no haber encontrado una relación evidente entre 10 y 16, renunció al problema.

En la escuela M. Buber, unos días después del diagnóstico, la profesora trabajó con los alumnos este problema en la clase y nosotros tuvimos la oportunidad de observarla. Parecía que había una gran dificultad en comprender la duplicación de los lados como una transformación que, aplicada a un rectángulo, da otro rectángulo que tiene alguna relación con el original. Esto nos "habla" de la dificultad que puede tener comprender que hay un invariante entre los elementos transformados. Tal vez podría ser éste un conocimiento para la articulación aritmética-álgebra.

- Conclusiones acerca de los problemas de áreas

El hecho de que casi todos los alumnos tuvieran estrategias de base para abordar los problemas y que haya habido una gran diversidad de procedimientos, nos lleva a suponer que una secuencia basada en problemas de este tipo, desarrollada en una clase con alumnos de características similares a los que realizaron el test diagnóstico, en cuanto a conocimientos y vínculo con la matemática, podría dar lugar a un espacio de producción rico que hiciera avanzar el conocimiento con respecto a las cuestiones que hemos ido identificando en el análisis.

A raíz de que algunos alumnos han movilizado la división para el problema en el que los datos determinaban una única solución y no lo han hecho para el problema en el que había un grado de libertad entre las variables, suponemos que la movilización de la noción de variable en estos problemas, podría ser una oportunidad para profundizar la relación entre multiplicación y división exacta.

El análisis del dominio de las variables en la relación $x\,y = a$ pareciera ser fértil para revisar cuestiones relativas a la densidad de los números racionales y podría llevar a un análisis interesante para determinar el comportamiento de una de las variables si la otra es mayor que a.

Por otro lado, un trabajo con problemas de este tipo podría dar lugar a una resignificación de la fórmula del área del rectángulo, mostrando, como dice Chevallard su aspecto funcional y ofreciendo un soporte, como dice Vergnaud, para analizar cuestiones relativas a la proporcionalidad.

b) Los problemas de división

- Los enunciados

1) Proponé una división en la que el divisor sea 25, el cociente sea 8 y el resto 12. ¿Cuántas soluciones hay? Si pensás que hay menos que tres, escribilas todas y explicá porqué no hay más. Si pensás que hay más de tres soluciones, proponé al menos cuatro y explicá cómo pueden obtenerse otras soluciones.

2) Proponé una cuenta de dividir en la que el divisor sea 32 y el resto sea 27. ¿Cuántas soluciones hay? Si pensás que hay menos que tres, escribilas todas y explicá porqué no hay más. Si pensás que hay más de tres soluciones, proponé al menos cuatro y explicá cómo pueden obtenerse otras soluciones.

3) Si se divide 527 por 46 se obtiene como cociente 11 y como resto 21.

a) Verificalo.

b) ¿Podés encontrar otro número que al dividirlo por 46 tenga resto 21? ¿Cuántos podrías encontrar? Si pensás que ha menos que tres, escribilos todos y explicá porqué no hay más. Si pensás que hay más de tres números, proponé al menos cuatro y explicá cómo pueden obtenerse otros.

4) Proponé una cuenta de dividir cuyo cociente sea 20 y cuyo resto sea 14. ¿Cuántas soluciones hay? Si pensás que hay menos que tres, escribilas todas y explicá porqué no hay más. Si pensás que hay más de tres soluciones, proponé al menos cuatro y explicá cómo pueden obtenerse otras soluciones.

- Breve análisis a priori

Las relaciones *dividendo = divisor x cociente + resto; 0≤ resto < divisor*, atraviesan los cuatro problemas. De manera general, nos preguntábamos frente a estos problemas:

- ¿Cuál es el estatuto de estas relaciones para diferentes alumnos? Los niños suelen usar estas relaciones para verificar el resultado de una división, ¿pueden usarlas para "producir" las cuentas que se piden?
- Para un mismo alumno, ¿se modifica ese estatuto a través de los diferentes problemas?
- ¿Hasta qué punto los niños conciben estas relaciones de manera independiente de la realización de la operación de dividir?
- ¿Es necesaria esa independencia para producir soluciones?
- ¿Y para explicar cómo se obtienen?
- ¿Qué argumentos dan los alumnos con relación a la cantidad de soluciones? ¿Apelan a los contextos extra–matemáticos en los que vienen usando la división desde hace años?
- ¿Qué transformaciones se producen en las estrategias cuando entra a jugar la noción de variable?

El **problema 1** apuntaba a actualizar la relación *dividendo = divisor x cociente + resto* con un sentido próximo al que los niños conocen, es decir, como algoritmo de verificación de la cuenta y esperábamos que lo resolvieran sin dificultades. Por razones similares a las que explicitamos a propósito de los problemas de áreas, estábamos interesados en analizar cómo justificaban los alumnos que hay una única cuenta que cumple las condiciones pedidas.

El **problema 2** introduce la noción de variable. Al respecto nos preguntábamos:

- ¿Utilizan los alumnos en este caso la "misma"[6] relación que habían puesto en juego en el problema anterior, atribuyendo valores al cociente? Luego de obtener una cuenta, ¿necesitan realizar la operación para estar seguros?
- ¿Reconocen que el problema tiene infinitas soluciones o tienden a pensar al cociente como una incógnita que "hay que descubrir"? Notemos que en este último

[6] Como lo mostrarán en parte estos resultados, pero como quedará mucho más claro al analizar la secuencia desarrollada en las clases, la introducción de un grado de libertad cambia para los alumnos el estatuto de la relación.

caso, la relación *dividendo = divisor x cociente + resto* seguiría siendo "posterior" a una cuenta que ya existe.

- En caso de no atribuir valores al cociente, ¿proponen un dividendo cualquiera para después ajustar el resto usando como relación la variación de éste último en función de la variación del dividendo? ¿Verifican las cuentas que obtienen? ¿Cómo lo hacen? ¿Se hace observable para los alumnos a través del procedimiento de arrancar del dividendo, que hay infinitas soluciones? Señalemos que los alumnos que usan esta estrategia estarían preservando la dirección usual con relación a la división: de dividendo y divisor, a cociente y resto.

La parte a) del **problema 3** tenía el propósito de analizar si los alumnos verificaban la operación realizándola nuevamente o si usaban la relación *dividendo = divisor x cociente + resto*. La parte b) cumplía para nosotros una función de retroacción tanto para quienes no hubieran podido abordar el problema 2, como para quienes hubieran sostenido que hay una sola solución. Nos interesaba analizar si una primera cuenta que cumpliera con las condiciones del problema, podría ser utilizada como punto de apoyo para obtener otras.

En el **problema 4**, es necesario considerar las dos condiciones que caracterizan la división ya que para usar la fórmula *dividendo = divisor x cociente + resto* deben atribuirse al divisor valores mayores que el resto. Con relación a este problema nos preguntábamos:

- Los alumnos que habían utilizado la relación *dividendo = divisor x cociente + resto* para los problemas 2 y 3, ¿están dispuestos a usarla nuevamente? ¿Tienen en cuenta en ese caso la restricción sobre el resto? Si no, ¿verifican de alguna manera las cuentas que obtienen para corregirlas?
- ¿Qué estrategia movilizan los alumnos que para los problemas anteriores arrancaron del dividendo, dado que en este caso, por no disponer tampoco del divisor, dicha estrategia sería mucho más difícil de poner en juego? ¿Los "empuja" este posible bloqueo a usar la relación *dividendo = divisor x cociente + resto*?

- Principales resultados

La mayoría de los alumnos –con más o menos esfuerzo- realizó bien el **primer problema**, lo cual nos estaría mostrando que ellos disponían de la relación *dividendo = divisor x cociente + resto* como algoritmo de verificación de la cuenta. Los alumnos sostuvieron en general que hay una única cuenta, pero casi ninguno llegó a proponer una justificación. Cuando les preguntamos a algunos de ellos cómo sabían que no había otra cuenta, obtuvimos respuestas del tipo *"porque no encontré otra"*, *"no sé"*, etc. Esto reafirmó nuestro interés en tratar como un "asunto" en la experimentación que haríamos en las aulas, la cuestión de la cantidad de soluciones de un problema y las argumentaciones que pudieran darse al respecto.

El hecho de que muchos alumnos usaran la relación *dividendo = divisor x cociente + resto* para el primer problema y no la pusieran en juego para el **problema 2**, nos llevó a pensar que para esos alumnos se trata de una relación que se concibe como posterior a la realización de la cuenta y con una función definida: verificarla. Estos alumnos han utilizado el procedimiento de proponer un dividendo cualquiera y luego ajustar el resto, sin expedirse, en general, respecto de la cantidad de soluciones.

Hemos encontrado un alumno que propuso como dividendo 347 con lo cual obtuvo como cociente 10 y resto 27. Cuando le preguntamos cómo había obtenido el 347 dijo *"inventé un número cualquiera y le sumé 27. Podría haber hecho cualquier número"*. Si bien dijo que el número es "cualquiera", el número "inventado" es 320 que es 10 veces el divisor. Todo ocurre como si este alumno implícitamente hubiera definido el 10 como cociente, pero al mismo tiempo considerara que su punto de partida es el dividendo sin mucha conciencia de la relación entre el cociente 10 y el 320 que es diez veces el divisor. Cuando le preguntamos si hay otras cuentas nos respondió: *"Sí, inventando otros números. Pero no sé qué número inventar. Intenté pero no me salió"*.

Pensando en una secuencia didáctica, concebir que la fórmula *dividendo = divisor x cociente + resto* no cumple solamente la función de verificar una cuenta ya realizada sino que caracteriza la división, es un cambio de significación que la interacción con problemas de este tipo podría contribuir a provocar.

De manera consistente con los datos recogidos a raíz de los problemas sobre áreas, muchos alumnos "obtuvieron" el cociente operando con los datos. El supuesto de que el cociente depende de los datos, parece orientar el procedimiento de estos niños, supuesto desde el cual difícilmente se hace observable que hay infinitas cuentas posibles.

Entre los alumnos que asignaban un número cualquiera al cociente, muy pocos dijeron que hay infinitas cuentas posibles (*"hay más de tres"*, *"hay muchas"*, fueron respuestas usuales) aunque explicaban que se pueden obtener más cuentas haciendo un número cualquiera, multiplicándolo por 32 y sumándole 27.

La sola interacción de cada niño con el problema no resultó suficiente para validar las conclusiones respecto de la cantidad de soluciones. Esto requerirá de las interacciones entre diferentes puntos de vista al respecto. Se abre acá una posibilidad interesante, pensando en las situaciones del aula.

Casi todos los alumnos hicieron la cuenta para responder a la verificación pedida en el punto a) del **problema 3**. Si bien esto puede deberse a una cuestión de hábitos, pareciera que hacer la cuenta es más seguro que aplicar la relación *dividendo = divisor x cociente + resto,* cuando ha sido otro el que ha encontrado el resultado. Parecería que dicho algoritmo es dependiente de la realización efectiva de la cuenta.

La parte b) del problema no ha cumplido la función que le habíamos atribuido a priori, y las respuestas obtenidas fueron consistentes con las del problema anterior. Se necesita cierta predisposición para volver a un problema ya resuelto y modificar las respuestas en función de algo que se encontró después, y ésta no parece ser una actitud espontánea de los alumnos.

A propósito del **problema 4**, ha resultado para nosotros sorprendente, que alumnos que habían utilizado de manera muy cómoda la relación *dividendo = divisor x cociente + resto* para el problema 2, se vieran ahora bloqueados frente a la ausencia simultánea del dividendo y del divisor. Tomemos el ejemplo de una alumna que para el problema 2 propuso varios ejemplos y explicó que se obtendrían otros *"multiplicando 32 .X y sumando 27"*. Frente al problema 4 (proponer cuentas de dividir cuyo cociente sea 20 y cuyo resto sea 14) afirmó que *"hay una única solución porque tenés fijo un cociente y un resto"*. Es decir, antes de apelar a la fórmula *dividendo = divisor x cociente + resto* como lo había hecho para el problema 2, centrada en la operación de cálculo de la división –y probablemente también en una cierta representación de lo que son los algoritmos de las operaciones aritméticas en general- esta alumna supuso que hay una única cuenta de dividir con ese cociente y ese resto, probablemente porque están dados los dos elementos que forman el resultado de una división entera. Esta primera anticipación le impidió establecer los roles análogos que tienen datos e incógnitas en el problema 2 y en el 4.(Notemos que más allá de la restricción sobre el divisor que plantea el problema 4, las fórmulas que modelizan los dos problemas son idénticas). Mientras esta alumna trabajaba, pudimos observar sus intentos esforzados por arribar a una solución. En su hoja hay trazas de que en cierto momento propuso 945 como dividendo y 46 como divisor y obtuvo cociente 20 y resto 25. Sin embargo no pudo aprovechar este resultado: su anticipación de la unicidad la lleva a buscar el procedimiento que desemboque en el resultado.

Por otro lado, también encontramos alumnos que no consideraron la restricción sobre el resto. Entre ellos, hubo quienes verificaban con la calculadora y, al encontrar que no obtenían la cuenta que habían anticipado, iniciaban un proceso de búsqueda que les permitía llegar a la solución. Pero muchos alumnos no pudieron darse cuenta porqué lo que antes se había mostrado útil ahora dejaba de serlo y otros, directamente, no verificaron que las cuentas obtenidas cumplieran las condiciones requeridas. A partir de este análisis valorizamos la oportunidad que ofrece este problema para trabajar sobre el dominio de variación de una variable e instalar la idea de que ese es un asunto a considerar en las prácticas matemáticas.

- Conclusiones acerca de los problemas de división entera

El análisis de las producciones de los alumnos a propósito de estos problemas, nos hizo ver hasta qué punto la relación *dividendo = divisor x cociente + resto* puede cambiar de significación, en función de cuáles sean los datos y cuáles las incógnitas. Además, gran parte de los alumnos concibe la división entera sólo como algoritmo de cálculo. Estos resultados nos hicieron cambiar levemente el punto de vista original. Efectivamente, de entrada habíamos concebido estos problemas, como una oportunidad de movilizar la noción de variable y al mismo tiempo profundizar en el significado de la división entera. El criterio "organizador" era la presencia de la noción de variable, dado el papel central que juega en el álgebra. Sin embargo, los diferentes estatutos que iba teniendo la relación *dividendo = divisor x cociente + resto* en los diferentes problemas, la dependencia que la misma tenía respecto de la realización efectiva de la cuenta, la dificultad para incorporar la condición $0 \leq$ *resto* < *divisor*, fueron cuestiones que nos hicieron pensar en el interés de concebir una secuencia en la cual el acento estuviera puesto en una transformación de la división entera de "cuenta" a "relación", o, en términos de Sfard (1991) de proceso a objeto. Para dar lugar a este trabajo la noción de variable era esencial, pero la visión había cambiado un poco: ya no se trataba de introducir la noción de variable por su importancia en el álgebra sino porque es una noción necesaria para el tipo de objetivación que estábamos planteando. A partir de esta idea nos propusimos considerar todos los casos posibles en los que dados dos elementos de la división, hay que hallar los otros dos (inicialmente habíamos pensado solamente en los que "generan" infinitas soluciones).

El análisis de las respuestas de los alumnos, muestra claramente la insuficiencia del trabajo individual con los problemas para concluir sobre la cantidad de soluciones, producir justificaciones y definir el dominio de validez de las variables. Son las interacciones en el aula las que brindarán retroacciones con respecto a estos tres aspectos, centrales en la exploración que estábamos concibiendo.

Nos preguntábamos a propósito de estos problemas si los contextos extra-matemáticos en los que los alumnos han venido usando la división, podrían ofrecer un soporte para las justificaciones requeridas. Ningún alumno ha apelado a dichos contextos, lo cual nos llevó a suponer que tomar como referencia las prácticas anteriores para "encontrar" allí elementos de justificación, no es una actitud espontánea de los alumnos y era interesante indagar en nuestra exploración, la fertilidad de su introducción.

c) Un problema referido a un contexto extra-matemático

- El enunciado

El dueño de un negocio cuenta que en su depósito hay, entre triciclos y bicicletas, 100 ruedas. ¿Cuántas bicicletas y cuántos triciclos puede haber en el depósito?

- Breve análisis a priori

El problema plantea un enunciado similar a los que los alumnos vienen resolviendo desde hace años, referido a un contexto fácil de comprender. En este caso, al introducir un grado de libertad, se pone de manifiesto la relación de dependencia entre las variables del problema, cuestión que suele quedar oculta cuando los datos determinan un único resultado.

Aunque no lo solicitábamos expresamente, nos preguntábamos si los alumnos propondrían o no todas las soluciones posibles, si producirían algún tipo de representación particular y si tendrían en cuenta el dominio de las variables.

Con relación a este problema nos preguntábamos:

- ¿Tienen los alumnos un criterio sistemático para buscar todos los pares de soluciones? ¿Qué estrategia usan en ese caso: atribuir un valor a una de las variables y obtener la otra recorriendo todos los valores posibles; o proponer una solución y "moverse" hacia otras a partir de establecer que *"2 triciclos se pueden cambiar por 3 bicicletas"?*

- Los alumnos que proponen sólo algunos pares, ¿saben que podrían obtenerse otros? ¿cómo obtienen las soluciones "sueltas"? ¿Sostienen algunos alumnos que hay una única solución? ¿Cómo llegan a ella?
- ¿Cómo consideran el hecho de que las variables sólo pueden ser enteras?

- Principales resultados

Se infiere de los trabajos de los alumnos que, en general, comprenden la relación entre las variables: esto les permite producir más o menos soluciones y en algunos casos explicar cómo las obtienen, pero no suelen tener un criterio que les permita agotar todas las soluciones posibles ni establecer el dominio de las variables.

Cuando los alumnos obtienen un resultado decimal, o bien lo rechazan y prueban con otros números, o bien lo aproximan, perdiendo las condiciones del problema, pero sin tener conciencia de ello. Esto último muestra algo interesante a considerar en un trabajo didáctico: para algunos alumnos, saber que los valores de las variables deben ser enteros, no alcanza para darse cuenta de que es necesario definir un dominio en el cual el cálculo de las variables dé como resultado un número entero. Revisar en un plano profundo qué significa que una variable es entera, pareciera ser una cuestión a la que este tipo de problemas podría dar lugar.

Hay alumnos que proponen dos o tres pares solución sin mostrar cómo los obtuvieron. En sus hojas, suele haber trazas de los cálculos que hicieron y que luego han borrado. Podría interpretarse que esta actitud de esconder las cuentas que han realizado, se debería a la necesidad de ocultar que han atribuido un valor de manera arbitraria para empezar a calcular, como si se tratara de una trampa.

Agregar una condición suplementaria –por ejemplo igual cantidad de triciclos y de bicicletas- y obtener una única solución, ha sido un procedimiento que ha aparecido con bastante frecuencia, sobre todo por parte de los alumnos más flojos. Entre éstos, varios pensaron que a partir de la solución (20; 20) podían obtener otros pares con la condición de que sus componentes sumen 40, por ejemplo (10; 30). La idea que parece regir este último procedimiento es que si se cambia un triciclo por una bicicleta, se conservan las condiciones del problema.

Hubo alumnos que "partieron" el 100, respondiendo en términos de ruedas, en algunos casos sin controlar si podían o no corresponder a una cierta cantidad de triciclos o de bicicletas.

Muy pocos alumnos apelan a escrituras con letras y en general, las mismas no son para estos niños, herramientas para operar. Veamos algunos ejemplos.

Andrés escribe $3\,t + 2\,b = 100$, pero no hace nada con esta fórmula y dice que el problema es difícil porque las soluciones se buscan al azar. Interpretamos que la idea de ecuación con una incógnita, que muchos alumnos conocen de su experiencia en los cursos de ingreso, podría estar interfiriendo aquí.

Damián propone $3\,x + 2\,x = 100$, pero tampoco opera con la ecuación, como si controlara que, aunque usa la misma letra, se trata en realidad de dos variables diferentes.

Florencia escribe: $100 = 2\,x + 100 - 2x$; opera y al llegar a $0=0$, concluye que hay muchas posibilidades.

Podría interpretarse de que realiza un intento de obtener las soluciones a partir de manipular la ecuación, pero lo abandona cuando no le resulta productivo.

Luego anota: *100 = 20 bicicletas y 20 triciclos*

100 = 2 triciclos y 47 bicicletas

Notemos que la escritura es altamente contextualizada y se completa con lo que está pensando. Finalmente traza una raya en su hoja y escribe:

Fórmula = (100-x.3):2. A 100 le resto un número natural par multiplicado por 3 y a eso lo divido por 2. x triciclos, 3 ruedas de triciclos, 2 ruedas de bicicletas. Ejemplo $(100-8.3):2=38$

Esta última escritura parece conformarla aunque no sabemos qué valor instrumental tuvo para ella.

Gabriela anota: *100 ruedas = x bicicletas. 2 ruedas + x triciclos . 3 ruedas*

Pareciera que este es un enunciado general que expresa la relación entre las variables, altamente contextualizado y que no tiene valor instrumental ni para operar con la expresión ni para orientar la búsqueda, dado que para obtener soluciones hace numerosos tanteos hasta llegar a proponer un único par.

De cara a una secuencia didáctica, estos ejemplos nos hacen pensar en la posibilidad de realizar un trabajo sobre fórmulas en el que se apele primero a la producción de escrituras personales, para realizar luego una discusión colectiva respecto del valor comunicacional o instrumental que las mismas pudieran tener, e introducir finalmente escrituras convencionales que los alumnos no propondrían –no tendrían los medios para hacerlo- de manera espontánea.

- Conclusiones sobre el problema de los triciclos

Los resultados anteriores muestran –de manera similar que para los otros problemas- que los alumnos disponen de una diversidad de estrategias para abordar el problema pero que no realizan de manera espontánea un análisis profundo del mismo. Pensamos que el interés de un trabajo didáctico alrededor de problemas de este tipo debe ligarse centralmente a la posibilidad de que los alumnos aprendan que es posible realizar un análisis que anticipe el dominio de las variables y la cantidad de soluciones, que puede formularse un procedimiento general que abarque todas las soluciones, que pueden encontrarse maneras diversas de representar tanto las soluciones como el algoritmo, que una fórmula puede representar todos los pares solución, que en los problemas que ellos estaban hasta ese momento acostumbrados a resolver hay generalmente una condición suplementaria que determina una única solución. Todo esto supone un cambio de posición de los alumnos: de resolver un problema a través de cálculos a analizar la estructura relacional del mismo.

B. Problemas basados en el análisis de cálculos aritméticos horizontales

Como dijimos al introducir el test diagnóstico, estábamos interesados en proponer problemas que exigieran a los alumnos analizar la estructura de cálculos aritméticos horizontales estableciendo si representan o no un procedimiento posible para resolver un cierto problema de enunciado. Queríamos indagar también si los alumnos reconocían que diferentes cálculos pueden representar la misma situación. De alguna manera, considerando la diferencia que señala Vergnaud entre resolución aritmética y resolución algebraica de un problema, queríamos forzar un uso relacional del cálculo, "copiándonos" del funcionamiento de las expresiones algebraicas. Si bien los datos recolectados nos muestran una "fotografía" interesante de los modos de abordar de los alumnos, el análisis de los mismos –lo adelantamos- nos hizo reconocer que un trabajo didáctico con problemas como los que proponíamos implicaba un uso muy artificial de lo numérico que sólo podía sostenerse por restricciones externas justificadas en la autoridad del docente. Veamos los problemas.

- Los enunciados

Problema 1

Lee el siguiente enunciado

Las entradas para el teatro de un grupo de 8 adultos y 40 niños costaron 640 pesos. La entrada de cada niño costó 12 pesos. ¿Cuánto costó la entrada de cada adulto?

a) Resolvé el problema

b)Decidí ***sin realizar las cuentas*** *cuáles de los siguientes cálculos permiten encontrar la solución correcta del problema anterior.*

1. 640 : 8 - (12 x 40) : 8 =   *2. [(640 - 12) x 40] : 8 =*

3. (640 - 12) : 40 x 8 =   *4. (640 -12 x 40) : 8*

Problema 2

a) Resolvé el siguiente problema y encontrá una manera de verificar la solución que obtuviste

Laura y Ana tienen entre las dos 240 pesos. Ana tiene 50 pesos más que Laura. ¿Cuánto dinero tiene Ana ?

b) Para resolver el problema anterior, diferentes chicos hicieron distintos cálculos que escribimos a continuación. Analizalos y, sin efectuarlos, indicá cuáles te parece que sirven para resolver el problema.

1. (240 :2) + 50 = *2. (240 :2) + 25 =* *3. (240 - 50) : 2 + 50 =*

4. 240 - 50 : 2 + 50 = *5. (240 - 50) : 2 =* *6. (240 + 50) : 2 =*

- Breve análisis a priori

El **problema del "teatro"** es muy sencillo, típico de un cuarto grado, y no esperábamos que hubiera dificultades en su resolución. Nuestro objetivo era contrastar el procedimiento puesto en juego con la elección del cálculo horizontal. Pensábamos que la gran mayoría de los alumnos resolvería el problema haciendo 12 x 40 en primer lugar, luego la diferencia entre 640 y ese resultado y finalmente dividirían por 8. Esta secuencia corresponde al cálculo 4 de la parte b), aunque hay una leve diferencia ya que dicho cálculo "empieza" con 640. Queríamos analizar si esto interfería o no en la elección del mismo. Nos preguntábamos también si los alumnos reconocerían que el cálculo 1 es el resultado de haber aplicado la propiedad distributiva al cálculo 4. Aunque el modo en que tomamos los datos era muy limitado para ello, estábamos interesados en conocer si los niños estaban dispuestos a aceptar la pertinencia de un cálculo que no surge de la interacción directa con el problema sino de la equivalencia, a través de las propiedades de las operaciones, con otro cálculo que representa el problema.

En realidad este es un asunto delicado: si uno aplicara a un cálculo una serie de transformaciones que conservan su denotación pero que se "alejaran" de un procedimiento razonable para el problema, sería muy difícil convencer a los niños de que el nuevo cálculo también representa el problema. Por otro lado, ¿cuál sería el sentido de un trabajo de este tipo a esta altura de los conocimientos de los alumnos? La práctica de renunciar al sentido externo para trabajar en un sentido interno de las operaciones, parece difícil de sostener cuando no hay una exigencia del problema para hacerlo.

El **problema de Ana y Laura** es más ajustado al nivel de estos alumnos y era razonable esperar que no todos lo resolvieran bien. Pedir la verificación tenía para nosotros el propósito de provocar la revisión de la resolución. Nos interesaba además analizar si los alumnos tenían en cuenta para la verificación las dos condiciones que plantea el problema. Los cálculos de la parte b) los elegimos con los siguientes criterios:

- el cálculo 1, responde a una manera usual (incorrecta) de pensar el problema, estableciendo una correspondencia entre cada parte del enunciado y alguna operación aritmética: *"tienen entre las dos 240 pesos"* correspondería a la cuenta 240:2 y *"Ana tiene 50 pesos más que Laura"* correspondería a sumar 50 al resultado anterior.

- Los cálculos 2, 3 y 6 corresponden a tres formas correctas de pensar el problema. Notemos que el cálculo 6 y el cálculo 2 se relacionan a través de la propiedad distributiva.
- El cálculo 4 es una "copia" del 3 sin los paréntesis. La elección simultánea de estos dos cálculos podría interpretarse como una dificultad con relación a las convenciones de la escritura.
- El cálculo 5 corresponde a *"lo que gana Laura"* y podría ser que los alumnos lo eligieran porque piensan que deben poner los dos resultados.

Atajamos una posible crítica, declarando que somos conscientes de que no podíamos controlar que los alumnos respondieran sin resolver el cálculo como lo indica la consigna. Por ese motivo indagamos a algunos de ellos preguntándoles por qué habían aceptado o descartado cada cálculo.

- Principales resultados

Tal como lo esperábamos, todos los alumnos resolvieron bien el **problema del teatro** y casi todos eligieron el cálculo 4, que es el que concuerda con el procedimiento hecho en la primera parte. Los alumnos que eligieron también el cálculo 1 –fueron muy pocos-, "confesaron" haber hecho la cuenta. Es interesante la respuesta de una alumna cuando le preguntamos por qué había descartado el cálculo 1: *"está mal porque 640 costaron todas las entradas y 8 fueron sólo los adultos"*. Por un lado encontramos acá un ejemplo típico de la lógica aritmética de resolución de problemas: cada paso tiene que tener un sentido en términos del problema y en este caso se podría dividir por 8 solamente el monto correspondiente a las entradas de los adultos. Pero además, aunque se suele enseñar la propiedad distributiva apelando a situaciones de la vida cotidiana, pareciera que no cualquier contexto es "apto" para actuar como referencia de dicha propiedad. Estaríamos encontrando en este ejemplo, los límites del contexto para ofrecer justificaciones, de los que habla R. Campos Lins (2000). Además, datos como estos confirmarían la posición de N. Balacheff (2000) que sostiene la necesidad de construir un sentido interno para las transformaciones, independiente de los contextos de referencia.

Para el **problema de Ana y Laura** las respuestas a la primera cuestión (resolver el problema) se reparten en forma bastante pareja entre quienes hacen 240 dividido 2 y suman 50 (lo analizamos a priori) y quienes dan la respuesta correcta.

Un resultado interesante con relación a este problema se da a propósito del pedido de verificación. En general, los alumnos usan para verificar, las mismas relaciones que usaron para resolver, con lo cual la verificación no actúa como elemento de control. Por ejemplo, una alumna hace 240 – 50 y saca una flecha del 190 y anota "Ana" y otra flecha del 50 y anota "Laura". Verifica sumando 190 + 50 y anota que *"está bien"*. Otra alumna que hace 240: 2 + 50, en la verificación escribe: *"porque si hago 240:2, me da la mitad de la plata que tienen entre las dos y a esa mitad le sumo 50 porque es lo que Ana tiene de más"*. Para esta alumna, verificar es explicitar el modo en que pensó el problema y no analizar si se cumplen las condiciones del enunciado. Muchos alumnos resolvieron bien el problema y verificaron una sola de las dos condiciones. Por ejemplo una alumna hace 240: 2 + 25, para calcular cuánto tiene Ana, y para verificar hace 145 – 50 = 95.

Según estos resultados, la verificación puede consistir para los alumnos en: volver a hacer el problema o relatar cómo se lo pensó explicando cada paso o usar las mismas relaciones que se pusieron en juego para resolverlo o chequear las condiciones del enunciado. Esto abre una perspectiva de trabajo en las aulas: qué es una verificación y cómo se valida (la verificación).

Los alumnos eligieron en general, los cálculos que ellos podían comprender como modos posibles de resolver el problema. Hubo algunos alumnos que eligieron el cálculo 1 y el 6, habiendo resuelto de acuerdo con el cálculo 1. Interpretamos que para ellos sería válido intercambiar la suma y la división.

El contexto del problema interfirió también en este caso en la elección de algunos cálculos. Después de resolver el problema individualmente, les pedimos a dos alumnos que lo discutieran entre ellos y grabamos la conversación:

Lucio resuelve correctamente a través del cálculo (240-50):2 + 50. Cuando analiza con Martín cálculo por cálculo, hacen las cuentas. A pesar de que la cuenta (240+50):2 les da 145, Lucio dice que está mal y Martín que está bien:

M:	*Está bien!!!!!!*
L:	*No, es errónea, porque 145 es la mitad de las dos y Ana sola tiene 145. No, porque 145 lo estás tomando de las 2 personas y Ana sola tiene 145 y la otra tiene 95. Estás sumando la mitad de esas dos que es 145 cada una*
M:	*Pero acá el problema te dice cuánto dinero tiene Ana, no cuánto dinero tienen las dos, está bien, te dice cuánto tiene Ana*
L	*Sí exactamente, pero tiene la misma cantidad que Laura y tiene que tener 50 más que Laura. Si dividís por 2, tienen las dos igual.*

Lucio parece pensar que si lo último que se hace es dividir por 2, Ana y Laura tienen la misma cantidad. Él analiza la estructura del cálculo en función del sentido que tiene para resolver el problema. Como no puede pensar un procedimiento en función de ese cálculo, aunque el resultado sea correcto lo rechaza. El significado de la división como reparto en partes iguales, obstaculiza la posibilidad de que se realice una división para una situación de reparto desigual.

- Conclusiones sobre las situaciones de cálculos horizontales

Como decíamos antes, estos datos han sido interesantes para mostrarnos la relación de los alumnos con los cálculos horizontales, y sobre todo la dificultad para tratarlos de manera descontextualizada del problema. Nos han mostrado también los límites de las situaciones contextualizadas para ofrecer justificaciones. Sin embargo, pensar en una secuencia alrededor de este tipo de problemas y legitimar la práctica de transformar el cálculo aunque no "se vea" cómo podría pensarse el problema a través del resultado de dicha transformación, nos parecía un trabajo costoso y al mismo tiempo algo artificial. En realidad el funcionamiento "natural" de los cálculos en el caso de un problema es reducirlos a números. Por eso, aunque no descartamos el interés de una discusión con los alumnos respecto de la equivalencia de los cálculos en un contexto como el que hemos planteado, a la hora de elegir las secuencias a trabajar, y sabiendo que no podíamos hacer todo, los hemos dejado de lado.

Al revisar los trabajos didácticos sobre la problemática del pasaje de la aritmética al álgebra, hemos encontrado una propuesta interesante de J.C. Duperret y J.C. Fenice (1998), en la cual un trabajo sobre las propiedades de las operaciones basado en el análisis de la estructura de los cálculos horizontales está al servicio de inventar algoritmos alternativos para obtener los resultados de las operaciones. En esos casos, el análisis de la estructura del cálculo sin apelar a la resolución efectiva se justifica por la naturaleza de los problemas que se están tratando que, -notemos- son justamente problemas intra-matemáticos. Pueden actuar entonces como palancas interesantes en la relación aritmética-álgebra.

5. Conclusiones del diagnóstico: nuestras opciones para la experimentación en las aulas

En función de los análisis realizados, tanto los problemas de áreas, como los de división entera y los problemas aritméticos con un grado de libertad en las variables, constituían buenos candidatos para explorar nuestras cuestiones en las aulas. No pretendíamos –no hubiera sido posible- experimentar sobre todos los asuntos que potencialmente podrían dar lugar a la emergencia de conocimientos "articuladores".

El hecho de que la división entera ponga en relación cuatro elementos, ofrecía la posibilidad de un juego mayor entre datos e incógnitas que la multiplicación. Efectivamente, en la división entera, si en lugar de tomar como datos de partida el dividendo y el divisor –para obtener cociente y resto- se parte de otros dos términos, la correspondencia con los otros dos elementos de la división entera deja de ser funcional: a cada par de números le podrían corresponder ninguno, uno, varios o infinitos pares de números, según cuáles fueran los elementos de partida y los valores en juego. Notemos que en las otras operaciones que los niños conocen, por el hecho de ser ternarias, al cambiar el par de números de los que se parte, sigue cumpliéndose la relación funcional. Por ejemplo en la multiplicación, dados el producto y un factor, el otro factor es único.

Esto nos llevó a optar por desarrollar una secuencia sobre división entera y otra sobre problemas aritméticos a dos variables, sin que por eso hayamos descartado el interés de otras secuencias de trabajo que podrían dar lugar a la emergencia de conocimientos relevantes para la articulación aritmética-álgebra. Esta fue la elección que hicimos y acerca del cual comunicaremos en los próximos dos capítulos.

Capítulo 4

La división entera como objeto de reflexión. Elementos para definir un espacio didáctico entre prácticas aritméticas y prácticas algebraicas.

Primera parte: Elaboración y Análisis a priori de una secuencia sobre división entera

1. Introducción

Al pensar un espacio posible de articulación entre la aritmética y el álgebra, - lo señalamos tanto al presentar nuestra problemática como el test diagnóstico - hemos incluido un tipo de práctica en la cual los alumnos tuvieran la posibilidad de **trascender el nivel estrictamente instrumental respecto de las operaciones aritméticas, para dar lugar a una conceptualización de las mismas en términos de condiciones sobre sus elementos.** A través del trabajo aritmético los alumnos han encontrado en los contextos extra matemáticos una de las mayores fuentes de sentido para las operaciones aritméticas. Se trata ahora de **construir un sentido más interno**, a partir de considerar las operaciones como objetos que relacionan números a través de condiciones, objetos que pueden pensarse de manera independiente de su funcionamiento en la resolución de problemas externos a la matemática.

Hemos planteado también que enfrentar **problemas que involucran las operaciones aritméticas y que tienen varias o infinitas soluciones, exige a los alumnos, para poder dar cuenta de las mismas, producir relaciones con algún nivel de generalidad, movilizando** explícita o implícitamente, la noción de variable. Hemos formulado como hipótesis de trabajo que estas cuestiones contribuyen simultáneamente a un avance en el conocimiento de las operaciones aritméticas y a un cambio en la racionalidad matemática de los alumnos, cambio que introduce aspectos de la práctica algebraica.

Un análisis de las diferentes operaciones aritméticas nos llevó además a optar por un trabajo sobre la **división entera** bajo el supuesto de que el grado de complejidad de la misma permitiría alojar un espacio de problemas que tuvieran en cuenta las condiciones recién señaladas.

Trascender el nivel instrumental de las operaciones, construir un sentido interno a las mismas a partir de considerarlas en tanto relaciones entre números y no necesariamente vinculadas a contextos extra matemáticos, introducir una práctica de generalización a través de la discusión de la cantidad de soluciones de un problema y centrarse en división entera, son entonces las materias primas sobre las que comenzamos a elaborar la secuencia cuyo análisis será objeto del presente capítulo.

2. Planteo general del problema

La división entera puede pensarse como una función que hace corresponder a cada par de números naturales (llamados dividendo y divisor) un único par de números naturales (llamados cociente y resto), de manera tal que

$$dividendo = divisor \times cociente + resto \;\; y \;\; 0 \leq resto < divisor.$$

Como señalamos en el capítulo anterior, nuestro punto de partida fue estudiar problemas centrados en estas dos condiciones. Fue así como comenzamos analizando el siguiente problema general:

Hallar dos términos de la división entera a partir de otros dos que son dados (y que no son dividendo y divisor).

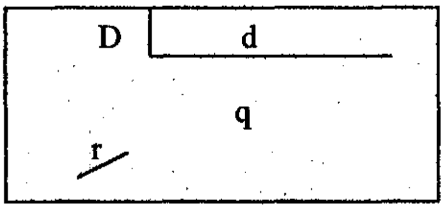
La conceptualización de la división entera en tanto algoritmo que se desencadena a partir de dos números, **no resulta suficiente** para abordar este problema ya que - al no disponer del dividendo o del divisor o de ninguno de los dos elementos-, la "cuenta" tal como es utilizada habitualmente, no puede plantearse. Encontramos acá una primera ruptura con respecto a las prácticas aritméticas: un problema que involucra la división entera y que no puede resolverse a través del algoritmo. Cualquiera sea el par de elementos que se dé como dato – hay cinco casos posibles que analizaremos más adelante- la insuficiencia del algoritmo exigirá movilizar, en algún nivel, las condiciones *dividendo = divisor x cociente + resto, 0 ≤ resto < divisor*, ya sea apelando a ellas de manera directa, ya sea invirtiendo sus términos (por ejemplo *dividendo – resto = divisor x cociente*), ya sea usando relaciones que se desprenden de las condiciones mencionadas (por ejemplo "*en algunos casos si se suma uno al dividendo el resto aumenta uno*"). El problema plantea la necesidad de una doble inversión respecto del uso habitual en aritmética: por un lado, en lugar de ir de la cuenta a la condición *Dividendo = divisor x cociente + resto* como medio de verificación, se debe usar esta última condición como medio para obtener elementos de la operación; por otro lado se altera el orden usual que va de dividendo y divisor a cociente y resto. [1]

En la medida en que los dos elementos que se dan como datos – ya lo hemos señalado- no determinan unívocamente a los otros dos, para obtener una solución particular hay necesidad de elegir arbitrariamente algún término de la división. Esto también constituye una ruptura respecto de las prácticas aritméticas en las que los datos que se van usando o están dados en el enunciado del

[1] Si bien estas dos "inversiones" están íntimamente relacionadas ya que es la necesidad de alterar el orden que va de dividendo y divisor a cociente y resto lo que provoca la necesidad de usar la relación D= dxc+r para producir cuentas, desde el punto de vista de las prácticas de los alumnos son dos las cuestiones que cambian y parte de su aprendizaje consistirá justamente en construir el vínculo entre ambas.

problema o se van obteniendo a través de operaciones con los datos. Por otro lado, cada elemento del conjunto solución es un par de números y no dos "resultados" independientes como seguramente tenderán a pensar los alumnos como producto de sus hábitos. Visualizar las soluciones como pares o, en otros términos, reconocer la correspondencia entre los elementos que se buscan, será fundamental a la hora de pensar la equivalencia de diferentes procedimientos.

Dos representaciones de la división entera se ponen en juego a través de la interacción con este problema: una que llamaremos "cuenta" que remite a la disposición de los elementos en la operación cuando se realiza el algoritmo:



y otra que llamaremos "fórmula": *dividendo = divisor x cociente + resto y* $0 \leq \textit{resto} < \textit{divisor}$.

Indagar qué relaciones establecen los alumnos entre estas dos representaciones y explorar su evolución a lo largo de la secuencia es uno de los objetivos de nuestro estudio.

El análisis que desarrollaremos mostrará que el problema exige centrarse en relaciones diferentes, según cuáles sean los datos dados; más todavía si quienes deben resolverlo – es el caso de los alumnos con los que trabajamos- no han conceptualizado aún la división entera en tanto condiciones entre sus elementos. Constituyen entonces **variables didácticas**[2] del problema los elementos de la división que se dan como datos. Se tienen en consecuencia, cinco sub problemas diferentes.

Por otro lado, encontrar una solución particular en un problema que tiene infinitas o varias soluciones, plantea exigencias diferentes que las que se requieren si es necesario **indicar un procedimiento para obtenerlas o referirse de alguna manera a todas las soluciones.** Efectivamente, para obtener una solución las relaciones utilizadas pueden mantenerse en el terreno de lo implícito. Explicar cómo se obtienen exige tomar conciencia de las relaciones que sustentan el procedimiento generador de las soluciones y obliga entonces a tratar con relaciones más generales. Sabemos también que disponer de un procedimiento general para producir soluciones no es equivalente a concebir el conjunto solución ya que esto último requiere que se condensen en un único objeto los elementos producidos a través de un proceso que se aplica cada vez a un elemento (Sfard, A; 1991). Por esta razón, los requerimientos en cuanto a cantidad de soluciones son también variables didácticas del problema.

La elección de los datos da lugar a los siguientes problemas:

hallar operaciones de división cuando son dados

[2] Se denominan variables didácticas de un problema a aquellos elementos del mismo cuyo cambio modifica las relaciones matemáticas que el alumno realiza para abordar el problema.

- el divisor y el resto
- el cociente y el resto
- el divisor y el cociente
- el dividendo y el resto
- el dividendo y el cociente

Con relación a la cantidad de soluciones puede solicitarse

- Hallar una operación de división que cumpla las condiciones
- Hallar varias indicando o no cuántas hay
- Explicar un procedimiento para obtener todas
- Hallar el conjunto solución

La combinación de opciones da lugar a diferentes problemas.

Teniendo en cuenta las consideraciones recién realizadas respecto de la cuestión de discutir la cantidad de soluciones de un problema, hemos hecho una opción para toda la secuencia, que es la de requerir en cada caso cuántas soluciones hay y cómo se obtienen. De esta manera, enfrentamos a los alumnos con la necesidad de generalizar de alguna forma las relaciones que han realizado, sin provocar una distancia tan grande con respecto de sus prácticas como sería exigirles que definan el conjunto solución.

Como hemos indicado en el capítulo anterior, hallar divisiones dados el divisor y el resto y hallarlas dados el cociente y el resto fueron problemas que integraron el test diagnóstico con el comenzamos nuestra exploración.[3] Los resultados que surgen del mismo fueron utilizados en el análisis a priori de esta secuencia. Para el análisis a priori del conjunto de los problemas hemos considerado además, un análisis matemático de los problemas, nuestros conocimientos sobre las prácticas aritméticas, y los resultados de diversas investigaciones sobre la problemática didáctica del pasaje de la aritmética al álgebra. Como resultado del análisis a priori hemos realizado ciertas opciones que desembocan en la secuencia que finalmente hemos elegido. Antes de desarrollar este análisis, explicitaremos cuáles son los conocimientos que estamos suponiendo por parte de los alumnos. [4]

---

[3] Recordemos – lo hemos relatado al presentar la metodología utilizada – que en un primer momento estábamos fundamentalmente centrados en la movilización de la noción de variable, cuestión que se pone claramente en juego en estos dos problemas. El análisis de los resultados del test diagnóstico nos permitió comprender la relevancia de apuntar más globalmente a un proceso de objetivación de la división entera (y de las operaciones aritméticas en general) y a valorar entonces los otros problemas aunque no pongan tan netamente en juego la noción de variable.

[4] La necesidad de hacer esta explicitación se fundamenta en que el análisis a priori depende, como se ha señalado en el capítulo anterior, de los conocimientos de quienes enfrentarán los problemas.

3. Los conocimientos de los alumnos sobre división entera al comenzar la secuencia

A lo largo de la escuela primaria, los niños han tenido la oportunidad de realizar numerosos problemas de división, con diferentes sentidos. Para resolverlos, han puesto en juego el algoritmo de la división entera y, por lo tanto conocen – aunque probablemente de manera implícita- que dados el dividendo y el divisor, existen y son únicos el cociente y el resto. La condición de que el resto debe ser menor que el divisor ha sido elaborada, en general, con referencia a las situaciones contextualizadas de reparto.

Además, los alumnos vienen utilizando el hecho de que *divisor por cociente más resto **tiene que dar** el dividendo*, para chequear la correcta realización del algoritmo de la división. Es decir que conciben esta relación **como posterior a la realización de la cuenta**, con el objetivo de verificarla una vez que ya disponen de los cuatro elementos de una operación particular. Teniendo en cuenta las prácticas aritméticas de los alumnos hay razones para suponer que *"divisor por cociente más resto **tiene que dar** el dividendo"* sería más un algoritmo de verificación que una condición sobre los elementos de la división. Con esto queremos decir que en el acto de verificar la operación, no están en juego las razones por las cuales la verificación funciona. El alumno pudo o no haber elaborado dichas razones como un proyecto personal, pero las mismas no son necesarias para "aplicar" el algoritmo de verificación. En este algoritmo, el signo igual estaría funcionando en su acepción "es el resultado de", tan propia de las prácticas aritméticas.

4. La producción didáctica que está en juego en el estudio de la secuencia. Primera aproximación.

A través del estudio de esta secuencia nos proponemos:

- Indagar la fertilidad de la secuencia para propiciar un tipo de interacción en la cual el alumno:
    - produce, transforma y valida conocimientos sobre división entera
    - enfrenta rupturas con las prácticas aritméticas
- explorar las relaciones matemáticas que producen los alumnos al interactuar con la secuencia
- estudiar, en función de los proyectos de diferentes tipos de alumnos, el papel que juegan los ensayos de los alumnos en la producción de un procedimiento general
- indagar acerca de las relaciones que establecen los alumnos entre las representaciones "cuenta" y "fórmula"
- estudiar el tipo de argumentos que proponen para decidir sobre la cantidad de soluciones de un problema
- analizar la racionalidad matemática puesta en juego y su posible evolución a través de la secuencia

- estudiar las relaciones entre la racionalidad puesta en juego y las conceptualizaciones sobre la división entera.

A continuación desarrollamos el análisis a priori de cada uno de los problemas que surgen por el juego de variables, del problema general. Cada caso contiene dos situaciones: 1) **hallar operaciones** de dividir a partir de dos elementos dados como datos y 2) decidir **cuántas soluciones** hay y **explicar cómo se obtienen.** Es claro que los alumnos con los que planteamos este trabajo tienen elementos para decidir si una cierta operación de dividir cumple o no las condiciones solicitadas. Sin embargo, **la sola interacción con el problema no resulta suficiente para validar las conclusiones respecto de la cantidad de soluciones y la forma de obtenerlas.** Para retroalimentar las concepciones que llevan a cada alumno a tomar una decisión sobre estas últimas cuestiones **se hace necesaria una instancia de confrontación con otros** (maestro u otros alumnos). Hay entonces una dimensión social ineludible. En esta secuencia hacemos la opción de privilegiar la confrontación **entre diferentes producciones** de los alumnos en la clase y, por eso las mismas se incorporan, para la situación de validación de la cantidad de soluciones, al medio con el que interactúa cada alumno. Para que esto sea posible resulta esencial que el docente garantice que se hagan públicas en la clase las diferentes perspectivas de los alumnos.

Cabe aclarar de todos maneras que la posibilidad de que las producciones del conjunto de la clase cuestionen o no la producción de un alumno en particular depende de las relaciones que éste haya hecho y del grado de convicción que tenga respecto de su propio trabajo. Con esto queremos decir que no se puede garantizar una retroacción del medio, aún para aquellos alumnos con un alto compromiso cognitivo en la resolución del problema. En el análisis del desarrollo de las secuencias interpretaremos las condiciones bajo las cuales las producciones del conjunto funcionan como retroacción para las elaboraciones de un alumno particular.

5. Análisis a priori de los diferentes sub-problemas que surgen del problema general

<u>Problema 1.</u>

Encontrar operaciones de dividir, conocidos el divisor y el resto. Indicar cuántas soluciones hay y explicar cómo pueden obtenerse.

i). El resto dado es menor que el divisor

Dos grandes tipos de procedimientos son posibles a propósito de este problema:

a) **partir del cociente** y "aplicar" la relación *cociente x divisor + resto,* para obtener el dividendo, o

b) **considerar un dividendo cualquiera como punto de arranque**, realizar la cuenta y ajustar el resto.

a) **Partir del cociente**

Una dificultad que pueden encontrar quienes vienen de prácticas aritméticas es que el cociente ni está entre los datos de este problema ni depende de ellos. Frente a esto puede ocurrir o bien que los alumnos apliquen una "norma" implícita según la cual deben operar con los datos para "obtener" el o los cocientes posibles[5], o bien que rompan con dicha norma y acepten atribuir valores arbitrarios al cociente.

Pensamos que para quienes atribuyen valores, será más "natural" concebir que el problema tiene infinitas soluciones, ya que el mismo hecho de asignar cocientes de manera arbitraria contribuye a hacer observable que el procedimiento puede usarse con cualquier número. Para estos alumnos la relación *dividendo = divisor x cociente + resto* sería anticipatoria de la cuenta, en el sentido en que estarían confiando en que el método usado permite asegurar que el número obtenido funcionará como el dividendo de una división, cuyo divisor y resto son los dados en el problema y cuyo cociente es el que ellos atribuyeron. Esa confianza sería independiente de la realización efectiva de la cuenta.

¿Qué análisis hacemos acerca de los alumnos que "obtienen" el cociente a través de alguna operación aritmética, usando los datos del problema? En primer lugar, estos estudiantes no estarían concibiendo la idea de variable sino que estarían tratando al cociente como una incógnita "a develar". Por esta razón sería más difícil para ellos establecer que el problema tiene infinitas soluciones ya que la cuenta estaría determinada y haría falta hallar primero el cociente para después calcular el dividendo a través del cálculo *cociente x divisor + resto*. La diferencia entre *generar* la cuenta y *hallarla* no es menor. En este último caso la relación sigue teniendo el estatuto de un recurso para comprobar algo que ya existe (aunque no se conozca) y en este sentido no se podría usar para inventar una cuenta "a voluntad". A partir de esta consideración pensamos que para estos chicos la relación no es anticipatoria de la cuenta, necesiten o no realizar la operación una vez que obtuvieron el dividendo.

El análisis que acabamos de realizar pretende mostrar la estrecha relación que existe entre la incorporación -aunque sea de manera implícita- de la noción de variable, la aceptación de la independencia del cociente respecto de los datos y la construcción de la relación *Dividendo = divisor x cociente + resto* como una de las condiciones que vincula los elementos de la operación división entera.

b) **El dividendo como punto de arranque**

La tradición aritmética impone, a propósito de la división, "arrancar" por el dividendo y el divisor. Como el divisor está dado, es razonable entonces pensar que los alumnos "tantearán" un dividendo. Si bien consideramos la posibilidad de que los alumnos "obtengan" el dividendo mediante alguna operación a través de los datos, pensamos que esto es menos probable que en el

[5] Recordemos que los resultados del test diagnóstico muestran que ésta es una tendencia muy frecuente.

caso del cociente ya que "poner" una cuenta de dividir –práctica existente en la escuela- es definir un dividendo y un divisor. En este sentido, atribuir un dividendo de manera arbitraria entraría dentro del campo de aquello que los alumnos se sienten autorizados a hacer.

Establecido el dividendo, los alumnos harán la correspondiente división y luego se "moverán" hacia la solución ajustándolo. Este tipo de despliegue puede tener significaciones muy diferentes según cuáles sean los conocimientos puesto en acto por el alumno. Efectivamente, puede ocurrir que el estudiante prevea o no que luego del primer "ensayo" podrá ajustar el dividendo para "caer" en el resto solicitado. Si lo hace, estaría haciendo uso implícito o explícito de la relación: *"si se aumenta (o disminuye) n al dividendo, y el resto es menor que el divisor menos n(mayor o igual que n), el resto aumenta (disminuye) n".* Podría ocurrir también que hiciera ajustes sucesivos; una interpretación posible en este caso sería que para hacer un uso más controlado de la relación anterior necesita dar valores pequeños a *n.* Pero también puede ser que descarte todo su intento si no "cae" en una solución válida. En este caso no estaría poniendo en juego relaciones que se desprenden de la definición de división entera.

Además, el alumno podría o no darse cuenta a partir del procedimiento puesto en juego que la reiteración del mismo daría lugar a "varias" cuentas que cumplen las condiciones pedidas. Esto depende del grado de generalidad que subyace al proyecto del alumno. Todos estos matices muestran que el procedimiento de tomar el dividendo como punto de arranque no es la evidencia de un único estado de saber posible.

Dos aspectos de este procedimiento hacen que la relación *Dividendo = divisor x cociente + resto* no se ponga de relieve y que, en consecuencia, los alumnos que lo usan estén más lejos de enfrentarse a las rupturas que se buscan: 1) a diferencia de lo que ocurre con los procedimientos tipo a), los alumnos conservan la direccionalidad tradicional (de dividendo y divisor a cociente y resto, y 2) no cualquier número es un posible dividendo y una vez asignado un "candidato" para el mismo hay que hacer cuentas para "moverse" hacia una solución. En este sentido la atribución arbitraria no es atribución de un elemento de la división que se busca y esto le confirma al alumno una posición según la cual el hecho de asignar un valor arbitrariamente es siempre un ensayo. Al verse en la necesidad de tener que ajustar el dividendo a través de diferentes cálculos, los alumnos no pueden visualizar tan fácilmente la correspondencia funcional entre cociente y divisor.

Como vimos, si un alumno piensa que este problema tiene solución única, la sola interacción con el problema no podrá "mostrarle" otras soluciones. A lo sumo, tendrá elementos para saber si la solución obtenida cumple o no los requisitos que se le han solicitado. Encontrarse con otro alumno que, o bien dice que hay varias soluciones, o bien ha hallado otra "única solución", le aportará una información exterior que necesariamente objetará su punto de vista, aún cuando no esté en condiciones de comprender la propuesta de su compañero. De alguna manera, esa producción del otro está jugando el papel de contraejemplo, que si bien no será suficiente para revisar completamente una concepción, ni para echar a andar la idea de que todas las soluciones que aparecen podrían "albergarse" en el mismo procedimiento, permite –pensamos- que el alumno incorpore el rechazo de una idea que sustentó, lo cual constituye un aprendizaje. La necesidad del otro, para validar la discusión sobre cantidad de soluciones, es imprescindible entonces en este problema.

La confrontación entre los procedimientos de tipo a) y los de tipo b) constituye un espacio de producción de relaciones que retroalimentarán las concepciones de toda la clase cualquiera haya sido la estrategia utilizada. Dado que los dos tipos de procedimientos (a y b) conducen a respuestas válidas, es probable que los alumnos acepten la validez de cada uno, sin preguntarse por la equivalencia entre ambos. En realidad, se trata de una pregunta que debe instalarse desde afuera, ya que los alumnos, al haber tratado siempre –o casi siempre– con problemas de solución única, no tienen elementos para reconocerla en el campo de cuestiones posibles que ellos visualizan.

Avanzar en esta cuestión, es relevante tanto para las conceptualizaciones sobre división entera que se puedan hacer, como para la construcción de las nociones de conjunto solución y de equivalencia de procedimientos, nociones éstas fundamentales de cara a las prácticas algebraicas.

La discusión sobre la equivalencia de los procedimientos aporta a la comprensión de la división entera porque permite relacionar la "dirección" de dividendo y divisor a cociente y resto - algo que forma parte de las viejas prácticas de los alumnos– con una de las "direcciones inversas" a las que se apunta con esta secuencia.

Por otro lado, los alumnos están habituados a decidir sobre la equivalencia de diferentes procedimientos, controlando si los resultados a los que se arriba a través de los mismos son iguales. De alguna manera, se trata de una validación de tipo externa de los procedimientos, sin comprometer un proceso de búsqueda de relaciones –y entonces de razones- que permita asegurar la equivalencia, indicando cómo pasar de un par obtenido por uno de los procedimientos, al mismo par obtenido a través del otro.

Un debate sobre la economía que procura cada una de las estrategias desplegadas, puede comenzar a privilegiar la utilización de la fórmula *Dividendo = divisor x cociente + resto*, como medio para obtener pares solución.

ii). El resto es mayor que el divisor

El análisis del problema cambia según los alumnos hayan tenido o no la oportunidad de encontrar divisiones dados el divisor y el resto en el caso en que el resto es menor que el divisor. Efectivamente, si los alumnos han trabajado en el caso i) los resultados infructuosos frente a las mismas estrategias los pueden llevar a preguntarse cuáles son las condiciones que han cambiado y que tienen el efecto de inhabilitar procedimientos que ya han dado prueba de una cierta eficacia. Pero si los alumnos no han tenido la experiencia de hallar operaciones a través de algunos de los procedimientos descriptos en i) les resultará muy difícil tener un marco para comprender la imposibilidad que plantea este caso. En otros términos, para poder contornear el ámbito de validez de un procedimiento es necesario haberlo puesto en juego; la exigencia de rechazarlo antes de saber que es fértil en ciertas condiciones, no parece accesible para alumnos que sólo han hecho un uso de la división entera como instrumento de cálculo.

Problema 2

Encontrar operaciones de dividir, conocidos el cociente y el resto. Indicar cuántas soluciones hay y explicar cómo pueden obtenerse.

Asignar valores al divisor para aplicar la fórmula *dividendo = divisor x cociente + resto* y obtener de esta manera el dividendo, requiere en este caso considerar que el divisor sea mayor que el resto. Por esta razón las condiciones de utilización de la fórmula son más complejas que las analizadas para la variante anterior. Notemos que la necesidad de producir cuentas pone en primer plano una condición que aparece velada cuando la relación *dividendo = divisor x cociente + resto* se utiliza para comprobar el resultado de una cuenta, ya que en esos casos no hay necesidad de definir un dominio de validez, la relación se aplica a una cuenta ya dada.

De todas maneras, quienes se centran en la representación "fórmula" pueden llegar a establecer una analogía entre este problema y el anterior, analogía que no es fácilmente accesible para los alumnos que se centran en la representación "cuenta" de la división entera. ¿Por qué decimos esto? Los resultados del test diagnóstico nos permitieron saber que el hecho de que en este problema estén fijados el cociente y el resto (que son para los alumnos los "resultados" de la división) podría bloquear la movilización de la noción de variable aún si los estudiantes fueran capaces de utilizarla en otros casos. Este bloqueo estaría relacionado con la creencia de que al fijar los resultados, la cuenta queda determinada y estaría poniendo de manifiesto, además, que la movilización de la noción de variable requiere de una primera anticipación –seguramente implícita- acerca de la no unicidad de la solución.

Nuevamente, como en el caso anterior, analizaremos dos grandes tipos de procedimientos: a) partir del divisor o b) intentar considerar el dividendo como punto de arranque.

a) Partir del divisor

Quienes parten del divisor y tienen en cuenta la restricción sobre el resto, hallarán soluciones sin mayores dificultades. Sin embargo, podría ocurrir que algunos alumnos intentaran producir cuentas atribuyendo un valor al divisor, sin reparar en que tiene que ser mayor que el resto. Para estos alumnos, la elaboración de la restricción sobre el resto y la consideración simultánea de las dos condiciones de la división entera, es el aporte central de este problema.

¿Cómo acceden los alumnos que proponen cuentas con divisores menores que el resto a una información sobre el error cometido? Si los estudiantes han logrado independizar la relación *Dividendo = divisor x cociente + resto* de la realización efectiva de la cuenta, enfrentarlos con una constatación del error (por ejemplo a través del uso de una calculadora para verificar las cuentas producidas) debería desencadenar un proceso de búsqueda que los llevara a encontrar las razones por las cuales aplican la "fórmula" y no obtienen la cuenta esperada. Observemos que si los alumnos "confían" en la fórmula "D = dx q + r" y entonces no realizan espontáneamente la verificación de las cuentas producidas, habrá que inevitablemente apelar a una evaluación de su producción de tipo externa (sería el caso si se les propusiera por ejemplo hacer la cuenta para constatar el error) para desencadenar una validación interna (encontrar las razones por las que la cuenta obtenida no responde a las condiciones solicitadas). En este caso, establecer la causa del error (haber puesto un divisor menor que el resto) es el conocimiento que deberán producir los alumnos para seguir trabajando en el problema. La constatación del error en la calculadora, la comparación entre los casos en los que la fórmula es exitosa y los casos en los que no, la lectura de información en las cuentas en las que, aplicando la fórmula no logran las condiciones requeridas y la evocación (espontánea o sugerida) de situaciones de reparto, son los elementos que funcionarían como retroalimentación de la situación.

b) **El dividendo como punto de arranque**

Dado que en esta situación no se dispone ni del dividendo ni del divisor como datos del problema, el procedimiento de intentar considerar el dividendo como punto de arranque se vería ahora bloqueado ya que no habría elementos para "iniciar" las exploraciones. Para que un procedimiento de este tipo pudiera prosperar, sería necesario que los alumnos utilizaran el hecho de que el divisor y el cociente pueden intercambiarse. Es decir, deberían dividir por el cociente para establecer un divisor posible. Estaría en este caso en juego una característica de la división exacta: si $a/b = c$ entonces $a/c = b$. De todos modos, si el posible dividendo es menor que el producto del cociente por el siguiente del resto, al aplicar la operación anterior las maniobras necesarias para "moverse" hasta obtener el resto requerido son complejas y no es razonable pensar que estarán al alcance de los alumnos a los que se dirige este problema. Los números que se dan como cociente y resto constituyen entonces variables didácticas de este problema, en la medida en que pueden facilitar u obstaculizar el procedimiento de explorar cuentas a partir de algún dividendo que se invente. Veamos un ejemplo numérico que permitirá comprender mejor qué estamos diciendo.

Supongamos que se da 25 como cociente y 11 como resto. Si el alumno propone como dividendo un número mayor que 300 (producto del cociente por el siguiente del resto), digamos 329, al hacer 329 dividido 25 y obtener cociente 13 y resto 4, puede "moverse" a 336 dividido 13. Pero si el alumno propone como divisor, por ejemplo 240, encontrar una cuenta que cumpla las condiciones pedidas, requerirá de conocimientos tanto o más elaborados que aquellos a los que se apunta con la secuencia. Efectivamente, si divide 240 por 25, encontrará cociente 9 y resto 15. Si intenta realizar 240 dividido 9, encontrará cociente 26 y resto 6. Puede entonces interpretar que su cociente es muy grande y encarar dos posibles acciones para ajustarlo: disminuir el dividendo o aumentar el divisor. Si disminuye el dividendo y hace, por ejemplo, 230 dividido 9, encontrará 25 como cociente y 5 como resto y, al intentar ajustar, verá que a partir de 234 obtiene 26 como cociente. Esto lo puede llevar a darse cuenta de la imposibilidad de ajustar a la vez el divisor y el resto. Si aumenta el divisor (haya o no realizado un intento como el anterior) y hace, por ejemplo, 240 dividido 10, obtiene cociente 24 y resto 0. Debe entonces aumentar el dividendo. Si intenta aumentar el dividendo, se dará cuenta de que a partir de 260 obtiene cociente 26 y entonces deberá aumentar el divisor. Si toma 11 como divisor y comienza a aumentar progresivamente el dividendo "llega" hasta 286 y obtiene otra vez cociente 26. Continuando con estas "maniobras" podría arribar a 311 dividido 12, pero queda claro que todo esto exige un control y un uso de relaciones que no parecen estar muy disponibles para estos alumnos. Además, la exigencia de tantos ensayos hace perder de vista la posibilidad de un procedimiento general.

Problema 3

Encontrar operaciones de dividir, dados el cociente y el divisor. Indicar cuántas soluciones hay y explicar cómo pueden obtenerse.

Este problema pone de relieve el rango de variación del resto. Al disponer del cociente y del divisor, hay elementos para "aplicar" la definición de división exacta y "obtener" un primer dividendo como producto de los elementos dados. Esta primera cuenta puede "omitir" la variable "resto" lo cual facilita operar de entrada con los datos.

En este problema, la estrategia de intentar arrancar de un dividendo cualquiera y luego ajustarlo a las condiciones requeridas, se ve fuertemente limitada por el hecho de que el conjunto de dividendos posibles es finito. Un primer intento ya debería mostrar que al poner un dividendo cualquiera y dividirlo por el divisor dado, el cociente y el resto quedan determinados y no hay "libertad" para maniobrar hacia una solución. Si los alumnos utilizan para dividir la técnica de poner cocientes parciales, multiplicarlos por el divisor e ir restándolos a los dividendos parciales, la realización de una operación cualquiera debería ayudarlos a actualizar la relación *cociente x divisor = dividendo.* Esto debería contribuir a que inviertan la direccionalidad en la lectura de la fórmula *Dividendo = divisor x cociente + resto.* El orden de magnitud de los números dados interviene como variable didáctica en la medida en que números chicos pueden hacer más observable la relación entre multiplicación y división exacta.

Problema 4

Encontrar operaciones de dividir, dados el dividendo y el resto. Indicar cuántas soluciones hay y explicar cómo pueden obtenerse.

Los procedimientos basados en ensayos sin un análisis previo de las condiciones dadas no ofrecen en este problema muchas pistas para avanzar hacia una solución. Por esta razón las condiciones que caracterizan la división entera deben estar más disponibles de entrada que en los problemas analizados anteriormente, en los que hay mayores posibilidades de exploración sin demasiadas anticipaciones.

Reconocemos dos grandes tipos de procedimientos: a) aquellos centrados en la diferencia entre dividendo y resto y b) los procedimientos de ensayo que tantean divisores mayores que el resto y menores que el dividendo.

a) **Procedimientos centrados en la diferencia entre dividendo y resto**

El procedimiento más elaborado consiste en reconocer que la diferencia entre el dividendo y el resto es el producto del divisor por el cociente, hallar esa diferencia, recorrer las descomposiciones multiplicativas de la misma y seleccionar aquellas que tienen uno de los elementos (candidato a divisor) mayor que el resto. Esta estrategia provee al mismo tiempo información respecto de la cantidad de soluciones. Si la diferencia entre divisor y resto fuera menor que el resto, es necesario darse cuenta de que no hay solución. Poner en juego este procedimiento requiere tomar conciencia de que operando con los datos no se obtiene ninguno de los dos elementos que se buscan sino la multiplicación entre los mismos, y exige además tener algún método para agotar todas las descomposiciones multiplicativas. Esto último hace necesario, a su vez, disponer de la relación entre multiplicación y división y utilizar conocimientos de divisibilidad que permitan hacer anticipaciones que orienten la búsqueda de las descomposiciones multiplicativas. Por ejemplo, si para obtener las multiplicaciones se hace variar de manera creciente uno de los factores, se puede establecer que al obtener los dos factores menores que el resto ya se han agotado todas las soluciones posibles. Si bien no son imprescindibles, cuantos más se pongan en juego criterios de divisibilidad, más económico resultará el camino hacia los pares solución. La exigencia de ir del producto a los factores, favorece una centración en el significado de la multiplicación.

Podría ocurrir que los alumnos pensaran que la diferencia entre dividendo y resto es el divisor, –en el caso en que dicha diferencia sea mayor que el resto-. Obtendrán entonces una primera cuenta con cociente 1. El papel que tendrá esta cuenta en la búsqueda de otras soluciones si las mismas existieran, dependerá de las anticipaciones que los alumnos hayan hecho.

De manera implícita o explícita los alumnos que ponen en juego los procedimientos descriptos, estarían operando con la fórmula para establecer que Dividendo – resto = divisor x cociente.

b) **Procedimientos de ensayo que tantean un divisor mayor que el resto dado**

Es posible diseñar una estrategia de exploración ensayando divisiones con divisores mayores que el resto y menores que el dividendo. Esto supone tomar en cuenta la relación $0 \leq r < d$. Si la distancia entre estos dos números fuera muy grande, este procedimiento se torna muy poco económico. La realización sucesiva de cuentas puede hacer observable para algunos alumnos la necesidad de que el producto de divisor por cociente dé siempre el mismo resultado, que es la diferencia entre el dividendo y el resto. A través de este procedimiento no es fácil elaborar criterios que anticipen la cantidad de soluciones, y es probable que quienes lo pongan en juego accedan a esta información sólo después de haber recorrido todos los posibles divisores pertenecientes al intervalo (resto, dividendo).

Problema 5

Encontrar operaciones de dividir, dados el dividendo y el cociente. Indicar cuántas soluciones hay y explicar cómo pueden obtenerse.

La manipulación de las condiciones de la división entera resulta compleja en este problema por dos cuestiones: por un lado por la dificultad para establecer un intervalo de variación de alguna de las dos variables en juego y por otro lado por las exigencias requeridas para despejar una de las variables en función de la otra.

Analicemos en primer lugar el tratamiento más general del problema. Si se quiere establecer el rango de variación de una de las variables es necesaria la manipulación simultánea de las dos condiciones de la división. Efectivamente, dado que las incógnitas son "divisor" y "resto", la sola consideración de la condición $0 \leq resto < divisor$, no permite decidir entre qué valores se encuentran estos términos. Tampoco es posible hacerlo teniendo en cuenta solamente la condición *Dividendo = divisor x cociente + resto.* Esto es diferente que en los problemas 3 y 4 en los que teniendo en cuenta que el resto debe ser menor que el divisor es ya posible establecer un intervalo de variación sobre el cual hacer ensayos. Para definir el intervalo de variación de una de las variables es necesario considerar que:

Resto = Dividendo – cociente x divisor y $0 \leq resto < divisor$. Entonces

$$0 \leq \quad Dividendo - cociente \times divisor < divisor.$$

De aquí surge que el divisor debe ser un número natural que verifique que:

$$\frac{Dividendo}{Cociente + 1} < divisor \leq \frac{Dividendo}{Cociente}$$

Definido el intervalo de variación del divisor, es necesario "recorrerlo" para hallar los correspondientes restos. Queda claro que este procedimiento está fuera de las posibilidades de los alumnos con los que encaramos nuestro trabajo experimental.

La fórmula *resto = dividendo – divisor x cociente,* se podría aplicar sin haber definido el intervalo de variación del divisor, haciéndolo variar a partir 1, para luego analizar en qué casos el resto es menor que el divisor. Para poder concluir respecto de la cantidad de soluciones a través de esta estrategia es necesario poder establecer el sentido en que varía el resto conocido el sentido en que varía el divisor. En otros términos hay que establecer que la fórmula *resto = dividendo – divisor x cociente* va dando restos cada vez menores a medida que aumenta el divisor. Reconocida esta cuestión, es necesario analizar si existen –y cuántos– pares de valores en los que el resto es menor que el divisor. Este último análisis es también difícil para alumnos que no tienen práctica de analizar la variación de una variable en función de la variación de otra.

Ahora bien, un alumno que no tiene los conocimientos para tratar el problema de manera general podría concebir una estrategia de exploración sin definir previamente el dominio de variación del divisor y usando la posibilidad de intercambiar el cociente con el divisor. Veamos algunos ejemplos.

Si el dividendo fuera 382 y el cociente 10, haciendo la división 382 dividido 10, obtendría 38 que podría ser un posible divisor. Efectivamente 382 dividido 38 da 10 como cociente 38 y resto 2. Pero a partir de este tipo de trabajo, sería muy difícil que el alumno accediera a las otras soluciones posibles en este caso: divisor 37 y resto 12; divisor 36 y resto 22 y divisor 35 y resto 32. En otros términos la exploración inicial no ofrece elementos que indiquen si hay o no más soluciones. Si el dividendo fuera 382 y el cociente 38, al hacer 382 dividido 38 se obtiene 10 que es el único divisor posible. Si se propusiera 382 como dividendo y 37 como cociente se obtendría 10 como candidato a divisor pero en realidad este problema no tiene solución con estos datos porque no hay números enteros mayores que 382/38 y menores o iguales que 382/37. Todos estos ensayos si bien dan la posibilidad de encontrar algunas soluciones, no dan pistas para evolucionar hacia un tratamiento más general que ponga en juego el aspecto relacional de la división entera y el problema se reduce a la realización de numerosas divisiones.

Este problema cuyo tratamiento numérico es complejo para los alumnos, cambiaría sustancialmente si se planteara una situación contextualizada. Por ejemplo, *"Hay que ordenar 382 bolillas en bolsitas poniendo en todas la misma cantidad. Si llené 10 bolsitas y me sobran algunas, ¿cuántas bolillas pude haber puesto en cada bolsita?"* En este caso, evocar la situación de ordenar las bolillas, podría desencadenar diferentes ensayos que llevaran a la solución del problema. Sin embargo, tal como lo venimos expresando, nuestro trabajo apunta a que el sentido provenga de las relaciones entre los números y no de un contexto exterior. Esta es la razón por la que hemos decidido descartar este problema de la secuencia.

A partir del análisis de cada uno de los problemas anteriores hemos establecido una secuencia que fue la que implementamos en las clases. A continuación explicitaremos las razones que nos llevaron a esa secuencia.

La secuencia seleccionada

Para ordenar la secuencia, hemos optado por plantear primero aquellos problemas que ofrecen más posibilidades de exploración a través de ensayos sin requerir de entrada la utilización de las condiciones *dividendo = divisor x cociente + resto, 0 ≤ resto < divisor*. De acuerdo con este criterio, el análisis realizado nos lleva a ubicar en primer lugar los problemas 1 y 2 en ese orden. ¿Por qué?

Como vimos, el problema 1 puede ser tratado atribuyendo tanto valores al dividendo como al cociente. Esto da lugar a una gran diversidad de procedimientos que al interactuar entre sí llevan a identificar numerosas relaciones vinculadas a la división entera. La confrontación entre estos dos grandes tipos de estrategias hace posible "poner en común" –lo hemos analizado- que la fórmula *dividendo = divisor x cociente + resto* puede ser una herramienta para producir operaciones. Este problema constituye entonces una primera oportunidad para hacer circular en el aula la idea de que es posible invertir el sentido usual de cuenta a fórmula. En el problema 2 está bloqueada la estrategia de comenzar a atribuir dividendos posibles y por eso "requiere" de la inversión recién mencionada. Esa es la razón por la que está ubicado a continuación del problema 1. Además el problema 2 ofrece posibilidades de elaborar la condición *resto* < *divisor* a través de las comparaciones que los alumnos puedan hacer entre los casos en los que la fórmula *Dividendo* = *divisor x cociente* + *resto* "funciona" y los valores para los cuales no conduce a las operaciones buscadas.

Los problemas 1 y 2, por tener infinitas soluciones, movilizan más claramente la necesidad de hacer atribuciones arbitrarias a una de las variables para obtener la otra, poniendo en juego –implícita o explícitamente- las nociones de variable y de dependencia. Como vimos, estas son cuestiones sobre las que queríamos indagar.

Hemos visto que el problema 3 por un lado ofrece menos posibilidades de ensayo, pero por otro facilita la dirección de fórmula a operación. Estas razones nos llevan a ubicarlo como un problema de familiarización para quienes han podido abordar los problemas 1 y 2 y como una nueva oportunidad de "arranque" para quienes no han comprendido aún las relaciones en juego en los problemas anteriores. Lo hemos ubicado entonces después de los problemas 1 y 2.

El análisis realizado nos lleva a incluir el problema 4 después de los problemas 1, 2 y 3 y a descartar el problema 5 ya que al no poder prever que todos los alumnos encontrarán una manera de abordarlo, se dificulta para el docente su gestión efectiva en una clase.

Hemos incluido un problema 0, que tiene la función de actualizar el algoritmo de comprobación de la división entera, con un sentido bastante similar al que los alumnos venían utilizando en su historia escolar:

Proponer una división dados el divisor, el cociente y el resto. Explicar cuántas divisiones hay.

Al definir los datos numéricos del problema, hemos planteado que el resto sea menor que el divisor, para que la fórmula *cociente x divisor* + *resto* = *dividendo*, se ponga en juego de manera efectiva. No habría condiciones a esta altura para elaborar la restricción sobre el resto y ese es justamente uno de los objetivos de toda la secuencia.

Pedir que los alumnos se expidan respecto de la cantidad de soluciones en este problema tiene dos propósitos: por un lado que comiencen a movilizar algunas relaciones entre los elementos de la división entera, como por ejemplo, *"si se suma 1 al dividendo, se suma 1 al resto"* y, por otro lado, que se vean obligados a decidir cómo establecer la unicidad de la solución.

Con respecto a los valores de los datos, además de las consideraciones realizadas, hemos hecho las siguientes opciones.

Para el problema 2, hemos elegido un resto lo suficientemente alto como para que, quienes no han tenido en cuenta la restricción sobre el resto, planteen algún valor fuera del dominio de validez de la fórmula.

Hemos propuesto para el problema 3, un resto del orden de las centenas, para tener un rango finito, pero amplio de variación del mismo.

La elección de valores para el problema 4 puede dar lugar a que existan varias, una, o ninguna operación. Decidimos poner a los alumnos en contacto con estas diferentes alternativas.

Finalmente hemos considerado la posibilidad de analizar con los alumnos el conjunto de los problemas tratando de establecer semejanzas y diferencias entre ellos. De este modo, en la medida en que las mismas relaciones son el medio de resolución de todos los problemas, estamos poniendo en contacto a los alumnos con el análisis de un *tipo de problema* (dados dos elementos de la división entera, hallar los otros dos). Aparece entonces una oportunidad temprana de interactuar con un problema parametrizado.

A partir de las consideraciones anteriores nos hemos quedado finalmente con la siguiente secuencia de problemas.

Los problemas retenidos

***0.** Proponé una división en la que el divisor sea 34, el cociente sea 18 y el resto 12. ¿Cuántas soluciones hay? Si pensás que hay menos que tres, escribilas todas y explicá porqué no hay más. Si pensás que hay más de tres soluciones, proponé al menos cuatro y explicá cómo pueden obtenerse otras soluciones.*

***1.** Proponé una cuenta de dividir en la que el divisor sea 32 y el resto sea 27. ¿Cuántas soluciones hay? Si pensás que hay menos que tres, escribilas todas y explicá porqué no hay más. Si pensás que hay más de tres soluciones, proponé al menos cuatro y explicá cómo pueden obtenerse otras soluciones.*

***2.** Proponé una cuenta de dividir cuyo cociente sea 43 y cuyo resto sea 27. ¿Cuántas soluciones hay? Si pensás que hay menos que tres, escribilas todas y explicá porqué no hay más. Si pensás que hay más de tres soluciones, proponé al menos cuatro y explicá cómo pueden obtenerse otras soluciones.*

***3.** Proponé una cuenta de dividir que tenga como divisor el número 234 y como cociente el número 23. ¿Cuántas se pueden proponer?*

4.a) Proponé una cuenta de dividir en la que el dividendo es 61 y el resto es 13. ¿Cuántas hay?

b) Proponé una cuenta de dividir en la que el dividendo es 64 y el resto es 23. ¿Cuántas hay?

c) Proponé una cuenta de dividir en la que el dividendo es 170 y el resto es 86. ¿Cuántas hay?

5.Analizar semejanzas y diferencias entre todos los problemas resueltos.

Cada uno de los problemas anteriores fue planteado a los alumnos luego de que el precedente fue resuelto y discutido. Es decir que los conocimientos producidos a propósito de un problema se incorporaban al "medio" con el cual interactuaba el alumno en el problema siguiente.

Las sucesivas transformaciones de la relación: breve relato cronológico de la secuencia.

Hemos concebido una secuencia cuyo "objeto" es la construcción de las condiciones características de la división entera. A través de la interacción con los diferentes problemas, el estatuto de estas condiciones se va transformando una y otra vez, para los distintos alumnos. Un complejo entramado de producciones personales y espacios colectivos va dando lugar a diversas "reacciones" que hacen posible la evolución de los conocimientos.

Para la mayoría de los alumnos, la condición *dividendo = divisor x cociente + resto* será, cuando comienzan a trabajar en los problemas, un algoritmo para comprobar el resultado de una cuenta de dividir. Algunos podrán entender las razones por las cuales este algoritmo funciona y otros no.

Una vez que cada pequeño grupo de alumnos ha resuelto el primer problema, se plantea la necesidad de una confrontación entre diferentes producciones. Esta confrontación cumple tres funciones:

- poner en cuestión algunas concepciones de los alumnos que sostienen que hay una única solución,
- introducir la relación *Dividendo = divisor x cociente + resto* como medio para producir cuentas, de la mano de los alumnos que han puesto en juego un procedimiento que arranca del cociente,
- dar sentido a la pregunta por la equivalencia de procedimientos.

Los alumnos "ingresan" al problema 2 con algún nivel de institucionalización de la fórmula y una discusión acerca de la economía que la misma procura con relación a los procedimientos de ensayo que parten del dividendo. Esto no asegura que hayan comprendido que la fórmula es anticipatoria respecto de la operación de dividir, simplemente empieza a moverse esa "temporalidad" que va de "cuenta" a "verificación".

El problema 2 permite:

- Elaborar la restricción sobre el resto
- Familiarizarse con el hecho de que usando la fórmula *dividendo = divisor x cociente + resto* con *resto < divisor*, se puede estar seguro de que se obtiene la operación que se busca, sin apelar al algoritmo.
- Identificar más claramente los límites de los procedimientos de ensayo
- Comparar las condiciones de este problema con el anterior como una manera de "acercarlos" a través de la representación "fórmula"
- Familiarizarse con la práctica de atribuir valores arbitrariamente, para producir otros a través de una fórmula.

El problema 3 cumple la función de estabilización para los alumnos que han podido recurrir a las condiciones de la división entera para producir operaciones y de "nueva oportunidad" para aquellos que no lo han logrado. Al finalizar el problema 3 se institucionaliza la utilización de las condiciones *dividendo = divisor x cociente + resto,* $0 \leq$ *resto < divisor*, como medio para resolver todos los problemas que se han abordado hasta el momento, se analiza que conocer dichas relaciones para números específicos permite anticipar el resultado de operaciones de dividir y se identifican las razones por las cuales los problemas 1 y 2 tienen infinitas soluciones y el problema 3, una cantidad finita. Esto último da lugar también a "autorizar" la práctica de asignar valores de manera arbitraria dentro de un cierto dominio.

Para resolver el problema 4 no resulta suficiente usar las condiciones de la división entera de manera directa, sino que es necesario operar con las mismas: la diferencia entre el dividendo y el resto es el producto del cociente por el divisor. La fórmula se transforma en soporte de nuevas relaciones que contribuyen al proceso de objetivación de la operación.

Finalmente la pregunta 5 ofrece la posibilidad de tomar como objeto de análisis todos los problemas y hablar de un tipo de problemas.

A través de la interacción con estos problemas se va transformando el significado de las condiciones *dividendo = divisor x cociente + resto,* $0 \leq$ *resto < divisor*. En diferentes momentos y para distintos alumnos, las mismas serán:

- un algoritmo (fundamentado o no) para verificar el resultado de una cuenta ya realizada
- un algoritmo para obtener operaciones, sin llegar a ser suficiente para anticipar el resultado de dichas operaciones
- un medio para obtener operaciones y para anticipar el resultado de las mismas
- un "soporte" que contiene diversas informaciones relativas a la división entera e información acerca de la cantidad de soluciones de los problemas tratados
- la caracterización de la división entera.

El análisis que hemos realizado nos permite establecer una conexión entre ciertos procedimientos puestos en juego por los alumnos y los significados que ellos van atribuyendo a la división entera. Las elaboraciones que los alumnos puedan hacer, resultarán de ese complejo entretejido de producciones individuales, discusiones de conjunto e intervenciones docentes que los problemas pueden ayudar a poner en movimiento.

Hacia el análisis a posteriori

Hemos tratado de mostrar el proceso que nos condujo a la elaboración de la secuencia que acabamos de analizar. El análisis a priori nos lleva a definir un conjunto de observables a partir de los cuales interpretaremos las producciones efectivas en las clases que hemos experimentado. Aún conociendo los riesgos de reducción y de arbitrariedad que se corren al intentar alguna clasificación, hemos organizado estos observables en cuatro grupos: los que se vinculan a la construcción del concepto de división entera, aquellos vinculados a la racionalidad matemática de los alumnos, los concernientes a la transición aritmética-álgebra y los vinculados a las interacciones a-didácticas que la secuencia propiciaría.

Con relación al concepto de división entera, se constituyen en observables:

- el estatuto que tienen para los alumnos las condiciones *dividendo = divisor x cociente + resto, 0 ≤ resto < divisor,*
- la utilización de relaciones derivadas de la definición de división entera (por ejemplo, si aumenta 1 el dividendo, el resto aumenta 1),
- el papel que juegan las antiguas prácticas de resolución de problemas contextualizados relativos a la división entera para abordar los problemas de la secuencia. En particular, la posibilidad de evocar esas prácticas, ya sea de manera espontánea o sugerida, como referencia para movilizar relaciones pertinentes,
- la movilización de las dos representaciones, "cuenta" y "fórmula" que se han identificado, la relación entre la representación utilizada y el problema que se resuelve y la posibilidad de coordinar ambas representaciones.

Con relación a la racionalidad matemática de los alumnos, se constituyen en observables:

- la posibilidad de asignar valores arbitrarios para obtener otros a través de una fórmula
- las anticipaciones que hace el alumno respecto de la cantidad de soluciones del problema y los argumentos que esgrime para justificar sus decisiones al respecto
- el nivel de generalidad en el proyecto del alumno: busca una operación centrado en una lógica aritmética de resolución (operando con los datos), busca operaciones independientes unas de otras, reconoce que las mismas están ligadas a través de un procedimiento,
- el papel de las exploraciones en la constitución de una relación general y el vínculo entre el tipo de exploración, las lecturas que se hacen de la misma y el proyecto del alumno,
- el significado que tiene para los alumnos la noción de "procedimientos equivalentes",
- el nivel de certeza que otorga la lectura de una fórmula para establecer el resultado de una operación aritmética,

- el nivel de fundamentación que necesita de las relaciones que usa.

Con relación a la transición aritmética-álgebra se constituyen en observables:

- la manera de concebir las soluciones: operaciones, dos números independientes entre sí, pares de números, conjunto de pares. Vinculado con esto, también se constituye en observable la posibilidad de establecer una relación de correspondencia entre los datos que se buscan en cada caso;
- la posibilidad de invertir el sentido usual de las operaciones aritméticas,
- la posibilidad de interpretar la fórmula *dividendo = divisor x cociente + resto* como un soporte de otras relaciones, además de las que se leen de manera directa,
- la posibilidad de operar con la representación "fórmula".

Con relación a las interacciones a-didácticas que la secuencia propiciaría, se constituyen en observables :

- la evocación de las prácticas anteriores como medio de producción y de control
- las retroacciones que provienen de confrontar ciertas anticipaciones con la realización efectiva de operaciones de dividir
- las condiciones en las cuales las producciones de otros alumnos funcionan como retroacción para las propias producciones
- la consideración de las relaciones producidas en los problemas de la secuencia para abordar los nuevos problemas de la misma.

A partir de estos elementos abordamos el análisis de los hechos de la clase. A través del mismo mostraremos la fertilidad del análisis a priori y también estudiaremos la emergencia de conocimientos cuya identificación no surge –no puede surgir- a priori, pero que son relevantes en el complejo proceso que se desencadena cada vez que los alumnos son convocados al acto de aprender.

Segunda parte: Análisis a posteriori de la secuencia sobre división entera[6]

1. Introducción: fuentes y criterios para el análisis

Recordemos en primer lugar algunos datos y condiciones de nuestra experimentación. La secuencia fue llevada a cabo en séptimo grado de la escuela Despertar en el año 1999 y en séptimo grado de las Escuelas Julio Cortázar, Despertar y Escuela Municipal 19 del distrito escolar 15, en el año 2000.[7] Nos referiremos al trabajo en cada escuela como un "caso" de este estudio[8].

En todas las clases observadas el trabajo en pequeños grupos -los alumnos trabajan colaborando entre sí y el docente va pasando por cada grupo- se alterna con momentos colectivos de debate, puestas en común, institucionalizaciones del docente, etc. Las intervenciones docentes en los pequeños grupos, puntuales, muchas veces en forma de pregunta dirigida a los alumnos, y basadas en la producción de estos últimos, apuntan en general a coordinar distintas propuestas de los integrantes del grupo, a señalar eventuales contradicciones, a lograr la explicitación de lo que los alumnos acaban de realizar para ayudarlos a reorientar el trabajo, a indagar las razones por la cuales los alumnos han elegido cierto camino, a demandar formas de validación de la producción si las mismas no se han puesto en juego en la interacción con el problema. En este análisis a posteriori tomaremos en cuenta:

- las producciones de los alumnos en los pequeños grupos,
- algunas de las intervenciones docentes en los pequeños grupos ya que consideramos que las mismas son constitutivas de las relaciones que emergen en la clase,
- los momentos colectivos de la clase en los que, a raíz del debate de alguna cuestión o de la confrontación entre diferentes procedimientos, los alumnos realizan nuevas relaciones que son significativas para el problema que estamos estudiando.

Hemos seleccionado también algunos episodios en los que, a partir de lo producido en la clase, el docente plantea nuevos problemas a los alumnos, que no habían sido previstos en el diseño original de nuestra secuencia.

---

[6] Las docentes de las clases en las que hemos trabajado fueron: la licenciada Claudia Comparatore, de la escuela Despertar, la docente María Inés Garbrinetti y la profesora Liliana Maltz de la escuela Julio Cortázar y la profesora Claudia Avecilla de la escuela municipal número 19 "Naciones Unidas" del Distrito Escolar 15. Agradecemos profundamente la invalorable colaboración de las cuatro docentes.

[7] En el año 1999, la secuencia que se desarrolló en la escuela Despertar estuvo integrada por los problemas 0, 1, 2 y 3. La situación 5 se realizó sobre la base de estos tres problemas. En cambio no se desarrolló el problema 4 descripto en el análisis a priori. La mayoría de los registros de las clases de la Escuela Despertar del año 2000, fueron extraviados y es por eso que se utilizan muy pocos de esos datos en este análisis.

[8] Para recordar las condiciones de la experimentación y de los aspectos metodológicos, ver punto 3 del capítulo 3.

Ya hemos justificado por qué para esta secuencia hemos optado por analizar problema por problema sin distinguir entre las diferentes escuelas: el hecho de que los problemas hayan dado lugar a un trabajo de los alumnos bastante autónomo y estable frente a las distintas gestiones docentes, nos llevó a mirar más globalmente el tipo de conocimientos vinculados a la relación aritmética-álgebra a los que los problemas dan lugar, que los aprendizajes de cada grupo de alumnos o la gestión docente. Somos conscientes de que este recorte no permite hacer una reconstrucción de cada recorrido particular. Al final del capítulo describiremos la secuencia desde el lado del docente para una de las escuelas, con el objetivo de dar una idea de la secuencia como totalidad.

Los ejemplos han sido seleccionados por el interés que presentan en tanto muestran aspectos de un proceso de construcción de conocimiento, sin obedecer a ningún criterio de significatividad estadística. En otros términos: podemos detenernos en el análisis de una cierta estrategia, por considerarla relevante desde la perspectiva de nuestra problemática, aún cuando la hayamos observado en un único alumno del conjunto con el que hemos trabajado. Son los procesos posibles de construcción, los que están en el centro de nuestra preocupación y no cuán representativos del conjunto son dichos procesos. Nuestro estudio no apunta a enumerar las estrategias "más probables" sino a tratar de describir, a partir de las relaciones matemáticas que subyacen a los procedimientos, prácticas que ubicamos en un espacio de articulación entre la aritmética y el álgebra. Como le hemos escuchado decir a Michèle Artigue en una charla dada en nuestra Universidad, la Didáctica de la Matemática produce muchos más teoremas de existencia que teoremas universales.

En otro plano, hemos recortado algunos episodios en los que, a partir de las intervenciones docentes en los pequeños grupos, hacemos una reflexión teórica acerca de la naturaleza de las mismas en el marco de la Teoría de Situaciones.

Para cada uno de los problemas, hacemos una introducción que tiene por objeto presentar la manera en la que estructuramos el análisis de los resultados producidos, desarrollamos dicho análisis apoyado en episodios de las clases y finalmente planteamos las conclusiones a las que nos lleva el análisis realizado.

2. Problema 0

Recordemos que la secuencia comienza con un problema –lo hemos denominado problema 0- que tiene como objetivo actualizar el algoritmo de comprobación de la división entera, con un sentido similar al que los alumnos venían utilizando en sus prácticas anteriores. Le atribuimos a este problema el papel de contribuir al proceso de devolución del resto de la secuencia. Para facilitar la lectura transcribimos nuevamente el problema:

Proponé una división en la que el divisor sea 34, el cociente sea 18 y el resto 12. ¿Cuántas soluciones hay? Si pensás que hay menos que tres, escribilas todas y explicá porqué no hay más. Si pensás que hay más de tres soluciones, proponé al menos cuatro y explicá cómo pueden obtenerse otras soluciones.

Ya hemos señalado también que pedir a los alumnos que se expidan respecto de la cantidad de soluciones tiene el doble propósito de empezar a instalar la relación D = c x d + r y de promover la movilización de relaciones entre los elementos de la división entera.

El análisis de las producciones de las clases nos lleva a centrarnos en tres cuestiones:

2.1 La fertilidad de la discusión sobre la cantidad de soluciones.

2.2 La interferencia entre la división exacta y la división entera, ligada al uso de la calculadora.

2.3 La manera de representar la división tiene influencia en la resolución del problema.

Desarrollamos a continuación las cuestiones planteadas.

2.1 La discusión sobre la unicidad: un disparador de nuevas relaciones

El hecho de requerir que los alumnos se expidan sobre la cantidad de soluciones en el caso de un problema con solución única, produce rupturas que promueven avances en los conocimientos de los alumnos, relativos a la división entera. Efectivamente, -se ve acá claramente un efecto que puede interpretarse en términos de contrato didáctico– muchos alumnos anticipan que habrá varias soluciones. Esto desencadena diferentes búsquedas, que movilizan tanto relaciones correctas como incorrectas. Analizaremos un caso en el que, a raíz de que un alumno propone un cálculo por el cual obtiene el dividendo de manera casual, **hemos podido identificar que la noción de procedimiento general es para muchos niños un conocimiento a elaborar**, conocimiento que ubicamos en el espacio de articulación aritmética–álgebra (ejemplo 1).

Las **nociones que emergen para resolver la cuestión de la unicidad** se basan en la idea de que una variación del dividendo produce variaciones en los otros elementos de la operación y que estas variaciones pueden ser anticipadas[9]. A través del ejemplo 2, veremos cómo estas ideas son en algunos casos producidas por los alumnos y en el ejemplo 3 analizaremos el caso en que son propuestas por el docente a partir de alguna tarea específica. Veremos también cómo el análisis de la variación de unos elementos en función de otros da lugar a una diversidad de relaciones que suponen conceptualizaciones diferentes de la división entera lo cual permite una cierta articulación entre la discusión colectiva y las producciones personales, articulación que puede verse favorecida por ciertas intervenciones docentes. (ejemplo 4)

---

[9] En general los alumnos no se basan en que si el divisor, el cociente y el resto están determinados, el dividendo queda determinado, sino en una especie de contrarecíproco que establece que "si el dividendo no estuviera determinado, entonces alguno de los otros elementos no estaría determinado.

Ejemplo 1. El cálculo 34 x 18 + 12: un cálculo entre otros.

Al verse convocados a encontrar nuevas soluciones, algunos alumnos muestran que el trabajo que realizan concierne estrictamente a la cuenta con la que están trabajando, sin atribuir –aunque sea implícitamente– algún nivel de generalidad a las relaciones que utilizan. Es lo que sucede en el grupo de **José María, Paula y Gabriel** de la Escuela 19.

En una primera instancia, los alumnos hallan 624 a través de la cuenta 34 x 18 + 12. Pero luego, frente a la exigencia de encontrar "otras soluciones", realizan (34 + 18) x 12 que, da también 624[10]. José María y Gabriel dicen que esta es otra forma de obtener el dividendo. Paula en cambio se pregunta si es una casualidad, pregunta que los otros dos niños no consideran.

Probablemente la producción del cálculo -al estar motivada por el pedido de otras soluciones- sea más una respuesta adaptada a la demanda del docente que al análisis del problema. Sin embargo, es el hecho de que José María y Gabriel desestimen la pregunta que se hace Paula el que nos lleva a pensar que una vez producido, todo ocurre como si en este caso particular, los dos cálculos tuvieran el mismo estatuto. Ante esto podríamos pensar que José María y Gabriel:

1) Consideran que la relación *dividendo = divisor x cociente + resto* es general (fue la relación usada de entrada);

2) No parecen saber que es la única relación que determina de manera general el dividendo (esto en realidad no tendrían porqué saberlo pero podrían habérselo preguntado "al encontrarse" con el segundo cálculo, como lo hizo Paula);

3) No se hacen preguntas por la generalidad del segundo cálculo hallado. De hecho no parecen estar atribuyéndole ningún nivel de generalidad, simplemente es válido en este caso y entonces es un procedimiento posible. Esto estaría dando cuenta de una lógica aritmética que se centra en el resultado numérico, independientemente de las relaciones que conducen al mismo. En otros términos, estos alumnos no interpretan el problema como un tipo de problema sino como una cuestión a resolver con los números dados.

A partir de esta producción, la maestra propone al grupo que ensayen con otra cuenta cualquiera y que se fijen si vuelve a funcionar este segundo método:

Maestra:	*Pónganse otra cuenta cualquiera y fíjense si **esto se vuelve a dar***
José María:	*(Luego de ensayar un cálculo) ahora hicimos 34 x 12 + 18 y no nos dio.*

Señalemos en primer lugar, que hay una cierta ambigüedad en la frase de la maestra: cuando ella se refiere a "**esto**" no queda claro si habla de la igualdad (a x b) + c = (a + b) x c, o si

[10] Nos "encontramos" sorpresivamente con "esto" en la clase, que consideramos en principio un hecho casual. Más tarde, Daniel Perrin, a quien agradecemos, nos demostró que cuál es el dominio de validez de la relación implícita en el procedimiento de José María. Efectivamente, si se consideran b'y q'enteros positivos primos entre sí, existen d y r'enteros tales que db'+ r'q'= b'q'+ 1. Se puede demostrar que si se toma b = db', r = dr', q = r'q', bq+r = (b+q).r. Por consideración al lector, no incluimos aquí, la demostración de las relaciones que enunciamos.

está aludiendo a una relación (divisor + cociente) x resto. José María, desde su lógica, interpreta que le preguntan si hay otra cuenta con esos números, cuyo resultado es 624.

Más allá de la ambigüedad señalada, la pregunta de la maestra tiene dos supuestos: que el cálculo responde a una cierta estructura (*fíjense si esto se vuelve a dar*) y que el procedimiento para ser tal, debe funcionar en otras cuentas (*"fíjense si esto se vuelve a dar"*). Sin embargo, ella no parece tener conciencia de que dichos supuestos no tienen por qué ser compartidos por sus alumnos. La interacción continúa:

Maestra:	*Yo les decía si en lugar de divisor 34, cociente 18 y resto 12 yo les pidiera una cuenta en la que, por ejemplo, el divisor fuera 53, el cociente 17 y el resto 23, ¿cómo harían?*
José María:	*Esto por esto más esto (53 x 17 + 23), da 924.*
Maestra:	*O sea que 924 dividido 53 da 17 y resto 23. ¿Cómo saben que esto está bien?*
Paula:	*porque multiplicás divisor por cociente más resto*
Maestra:	*Lo que ustedes habían hecho antes con la otra cuenta, ¿cómo era?*
Paula:	*Habíamos sumado el divisor más el cociente y lo multiplicábamos por el resto*
Maestra:	*A ver, háganlo*
Gabriel:	*(hace el cálculo) 1610, no da.*
Maestra:	*O sea, es una casualidad que les haya dado antes, ¿entienden?*
Gabriel y Paula:	*Sí*

El hecho de que Paula responda en términos de la estructura de ambos cálculos, parece ser la muestra de un proyecto con mayor nivel de generalidad que el que abarca cada cuenta puntual considerada de manera independiente de otras cuentas posibles.

Este episodio nos lleva a reflexionar sobre dos cuestiones: una vinculada a la elaboración de la noción de procedimiento general y otra referida a los efectos de esta intervención de la docente.

¿Cómo aprenden los alumnos que un procedimiento está sustentado en ciertas propiedades que para ser tales, deben verificarse para todos los elementos de un cierto dominio? ¿Cómo aprenden que un problema como el planteado tiene un valor genérico que va más allá del ejemplo puntual? Nos preguntamos qué papel juega en esta cuestión disponer de la justificación de los procedimientos utilizados. Sabemos que los alumnos pueden aplicar procedimientos generales sin conocer su justificación. Sin embargo, disponer de esta última, en tanto exige apelar a los significados, supone ya un nivel de generalidad. En otros términos, tal vez un poco esquemáticos, disponer de un procedimiento general no implica conocer su justificación, pero la justificación de un procedimiento da cuenta de su generalidad. Dejamos en este párrafo la marca de una pregunta que resulta relevante cuando se piensa en el tratamiento de lo general como uno de los aspectos centrales de la transición aritmética-álgebra.

Con relación a nuestra segunda cuestión, y tomando en cuenta las consideraciones que hemos hecho de la noción de contrato didáctico, interpretamos que la primera intervención de la maestra (*fíjense si esto se vuelve a dar*), con la carga de supuestos que conlleva, además de apelar a la consideración de al menos dos cuentas, tienen la intención de informar, de manera implícita, sobre la necesidad de buscar procedimientos que valgan para cualquier caso posible. Queda claro que la interpretación que hagan los alumnos de la carga didáctica de esta intervención depende de la relación que ellos entablan con el problema con el que interactúan. En el caso de este grupo, la intervención de la maestra parece tener para Paula el efecto de corroborar la pertinencia de la pregunta que ella se estaba formulando, para Gabriel parece cumplir el papel de introducir –no sabemos con qué grado de incorporación- una nueva norma con relación a las condiciones para que un cierto cálculo pueda considerarse un procedimiento, en tanto que José María no parece tenerla en cuenta –por lo menos de manera inmediata- como un elemento que lo lleve a modificar sustancialmente lo que acaba de realizar. En su carpeta, este último alumno escribe:

a. Hay que multiplicar el divisor por el cociente y sumarle el resto:

$$34 . 18 + 12 = 624$$

b. Hay que sumar el divisor más el cociente y multiplicarlo por el resto:

$$34 + 18 . 12 = 624 \text{ (es una coincidencia)}$$

Si bien para el segundo cálculo aclara entre paréntesis que se trata de una coincidencia, la manera de presentar los dos cálculos parece reafirmar que hay dos maneras posibles.

En todo caso, la intervención de la maestra pone en la escena del trabajo de estos niños un elemento que puede –o no– "empujar" a los alumnos hacia proyectos que incorporen la cuestión de la generalidad.

<u>Ejemplo 2</u>. *Los alumnos producen argumentos para concluir sobre la cantidad de soluciones.*

Decíamos que la pregunta por la cantidad de soluciones produce cierto desconcierto que lleva a los niños a afinar sus argumentaciones para llegar a una conclusión. En este proceso por un lado se explicitan relaciones con respecto a la división entera que tal vez los niños no habían pensado antes y, por otro lado, se ponen de manifiesto las diferentes "necesidades" de los alumnos para dar por válida una cierta proposición (en este caso la unicidad). Esta interacción hace posible que los alumnos más "empíricos" accedan a un discurso argumentativo de parte de algunos de sus compañeros. El ejemplo de un grupo de niños de la escuela Julio Cortázar que damos a continuación es interesante desde ese punto de vista. Todos los niños del grupo habían obtenido el dividendo 624 y, en un primer momento piensan que hay más soluciones. Una de las niñas, Marina, para buscar más cuentas prueba con 630 como dividendo y, al observar el resultado afirma que no hay otras cuentas en las condiciones del problema. Pareciera que Marina hizo su cuenta con alguna hipótesis y por eso pudo leer en ella un resultado de tipo general. Su compañero Agustín en cambio, realiza varios ensayos sin arribar a una conclusión. Frente a los argumentos de Marina, Agustín se convence mientras que Pablo, otro niño del grupo, insiste y sigue buscando, sin poder cerrar la cuestión. El ejemplo da cuenta por una parte de los diferentes significados que puede tener un ensayo en función de las anticipaciones que se hagan sobre el mismo y, por otra parte, nos muestra que no todos los alumnos están dispuestos a privilegiar los argumentos por encima de los ejemplos y que es necesario sostener este tipo de confrontaciones para instalar en una clase la argumentación como modo de validación. Veamos un tramo de la discusión:

Marina:	*Además es sólo un dato lo que podés cambiar, si fuera el resto también, pero es sólo ese dato el que podés cambiar, es sólo ese dato dividido lo otro y te tiene que dar exacto.*
Maestra:	*A ver, no te entendí bien. Lo podés decir de nuevo? Para que puedan llegar a una conclusión entre todos.*
Marina:	*El único número que podemos cambiar es 624, porque los otros tienen que quedarse como están; 12, 34 y 18. Y una unidad más que es lo menos que podemos aumentar no da, el resto cambia. El resto no lo podemos cambiar, tenemos muy pocas posibilidades.*
Maestra:	*Lo que ustedes están diciendo es: 624 dividido 34 da 18 y resto 12, y si cambio el 624 y pongo 625, qué pasa?*
Vicky:	*Cambia el resto. Da 13. Si vos a 624 le volvés a sumar 34 lo que no te va a dar es el cociente.*
Maestra:	*¿Están de acuerdo con lo que dicen Marina y Vicky?*
Agustín:	*Sí*
Maestra:	*Pablo, ¿escuchaste lo que ellas dijeron?*
Pablo:	*Sí.*
Maestra:	*¿Y te convencieron o no?*
Pablo:	*A mí me gusta buscar hasta que me canse.*
Maestra:	*¿Pero el argumento de ellas no te convence?*
Pablo:	*Más o menos.*

La necesidad de argumentar sobre la unicidad lleva a Marina y a Vicky a establecer que el cambio de dividendo cambia el cociente o el resto y estas relaciones se constituyen en razones suficientes para argumentar sobre la unicidad. Pablo en cambio, no puede ni utilizar sus ensayos para establecer esas relaciones entre los elementos de la división ni aceptar que las razones de sus compañeras clausuren el problema. Al no establecer la dependencia entre las variables, no concluye sobre la cantidad de soluciones. Justamente se manifiestan en esta interacción las tensiones entre una racionalidad más aritmética que utiliza como fuente de verdad los resultados de las cuentas sin inferir de los mismos relaciones generales y una más próxima al álgebra, que propone atribuir un valor genérico al ejemplo, ofreciendo argumentos fundamentados en un análisis de la variación de las variables en juego.

<u>Ejemplo 3</u>. *La intervención docente en la discusión colectiva. La comunicación de nuevos modos de hacer*

La práctica de anticipar la variación de algunos de los elementos de la división entera, a partir de la variación de otros, sin realizar la operación, es nueva para los alumnos. En el ejemplo que mostramos, la maestra de la Escuela 19 la propone en el espacio colectivo, en el marco de la discusión sobre la unicidad, luego de la resolución del problema en cada uno de los grupos. Veamos

Maestra:	*Por qué todos estaban tan seguros de que había una sola respuesta?*
Nicolás:	*Si hacés otro dividendo dividido el mismo divisor no te puede dar de cociente 18 y de resto....*
Maestra:	*a ver Nicolás. Voy a recordar la primera cuenta. (anota 624 dividido 34) Ahora voy a decirte que en lugar de 624 tengo 625. Ya es otra cuenta*
Nicolás:	*sí*
Maestra:	*¿qué se modifica?*
Nicolás:	*el dividendo...cambia el dividendo y cambia el cociente y el resto*
Maestra:	*a ver cómo se modifica. A partir de esta cuenta decime, yo pongo ahora 625*
Nicolás:	*se hace la cuenta y da...*
Maestra:	*sin hacer la cuenta*
Nicolás:	*(muy sorprendido) ¿cómo sin hacer la cuenta? Piensa y dice da cociente 18 y de resto 13*
Maestra:	*¿estás seguro? ¿Por qué te da de resto 13?*
Nicolás:	*porque no llega a ser un número más y entonces se lo suma al resto*
Maestra:	*¿ no llega a ser un número más?*
Nicolás:	*para el cociente.*
Maestra:	*es decir no te permite formar...*
Nicolás:	*19*
Maestra:	*¿para poder obtener 19 qué tendrías que hacer?*
Nicolás:	*cambiar el dividendo.*
Maestra:	*¿cuánto más?*
Nicolás:	*para llegar a 19 hay que hacer 17 más en el dividendo*

Maestra:	*sin hacer la cuenta traten de determinar cuál es el cociente y el resto de 641 dividido 34*

El pedido de la maestra de manera implícita, informa a los alumnos que es posible responder sin hacer la cuenta y esto lleva a los niños -si bien no a todos, por lo menos a algunos de ellos- a movilizar relaciones entre los elementos de la división entera para responder. Desde su posición de alumnos, los niños saben que si la docente demanda una tarea es porque la misma resulta factible y es esa autoridad que le otorgan, la que puede mover a algunos alumnos hacia la elaboración de una nueva modalidad, produciendo en consecuencia una modificación de sus prácticas con la consiguiente evolución en sus conocimientos. La maestra propone diferentes anticipaciones del mismo tipo. Sus preguntas buscan –aunque la maestra probablemente no tenga conciencia de ello- legalizar una nueva práctica –la de movilizar relaciones para anticipar- que los alumnos irán asumiendo a medida que construyan las herramientas necesarias para esta nueva posibilidad.

Ejemplo 4. La intervención docente frente a los implícitos de un alumno

Nos interesa destacar un pequeño episodio que se genera a partir de la puesta en común desarrollada en la Escuela Despertar (1999), en el momento en que se discute sobre la cantidad de soluciones. El mismo muestra que sobre la base de una idea común –analizar la dependencia entre la variación de algunos elementos de la división entera en función de la variación de otros -, los alumnos establecen diferentes tipos de relaciones, que suponen diferencias en la conceptualización que hacen de la división entera. Esto a la vez permite una cierta articulación entre la actividad colectiva y el trabajo personal de cada alumno. Efectivamente, si el docente puede interpretar las diferencias a través de las intervenciones de los niños, estará en condiciones de "devolver" preguntas que estarán dirigidas a algunos alumnos en particular, promoviendo un trabajo específico de producción para ellos, sin alterar por esto el desarrollo colectivo de la clase. Veamos:

Maestra:	*¿Habrá otra cuenta?*
Varios:	*no*
Maestra:	*¿Por qué?*
Varios:	*Si cambiás el dividendo cambia el resto.*
Gastón:	*Porque sumando o restando varios números al dividendo no te da resto 12. Si le restás 1 a 624 te va a dar 11 de resto y si le restás 34 te va a dar 17 de cociente.*
Maestra:	*Si le restás 34 te va a dar 17 de cociente, ¿y de resto?*
Gastón:	*ah, no sé, tengo que hacer la cuenta. (Comienza a hacer cuentas apartándose de la discusión del conjunto).*

La mayoría de los niños da cuenta de haber establecido la variación del resto en función de la variación del dividendo, para variaciones "pequeñas" de este último, que no alteran el cociente. Gastón parece haber ido un poco más allá poniendo en juego que *"cada 34 que se restan al dividendo, el cociente disminuye uno"*. Sin embargo permanece para él en el terreno de lo implícito, qué pasa en ese caso con el resto. En la medida en que la pregunta de la docente apunta a esa relación implícita, Gastón comienza a desplegar un trabajo de producción personal que no es compartido por el grupo total y que seguramente contribuirá a que este alumno complete la relación que estableció: *"cada 34 que se restan al divisor, disminuye 1 el cociente y se conserva el resto"*. El ejemplo muestra la fertilidad del análisis de la variación de unos elementos en función de otros, en tanto "aloja" una diversidad de relaciones y conceptualizaciones posibles y, de manera vinculada con esto, da cuenta de los diferentes niveles de profundidad en la argumentación que necesitan los alumnos para arribar a una conclusión. Esta relación entre los recursos que despliegan los alumnos para dar por válida una proposición referida a la división entera y la conceptualización que tienen de este objeto se manifestará más claramente en los próximos problemas.

2.2 La interferencia con la división exacta y el uso de la calculadora

La calculadora es un instrumento instalado en las clases en las que hemos trabajado y los alumnos la usan espontáneamente. Como hemos dicho, la mayoría de los niños obtienen el dividendo a través del cálculo 34 x 18 + 12 y luego, verifican haciendo la cuenta de dividir con la calculadora. Obtener un resultado decimal lleva a muchos alumnos a rechazar el dividendo que han encontrado, pensando que está mal:

Maestra:	*¿Qué decías Cecilia?*
Cecilia:	*nosotros habíamos hecho 34 x 18 + 12 para saber el resultado. Y nos da 624, pero dividimos 624 dividido 34 y nos da con coma.*
Maestra:	*¿y entonces?*
Cecilia:	*Tiene que dar un número entero*

Al no distinguir entre división exacta y entera estos alumnos prestigian el uso de la calculadora por sobre las relaciones que ellos habían establecido. La realización de cuentas "a mano" y la comprobación de que el cálculo 34 x 18 + 12 da 624, ofrecen elementos para que los alumnos se den cuenta de que la calculadora *"lo hace todo con coma, en vez de dejar resto"*. El problema constituye entonces una oportunidad para discutir con los alumnos la diferencia entre división exacta y división entera, diferenciación que no es usual en la escuela.

2.3 La representación "cuenta" como punto de arranque.

En todas las clases observadas hubo alumnos que se bloquearon frente a este problema. Se trata de niños que en general saben hacer la cuenta, pero no parecen haber establecido relaciones entre los elementos de la división entera. Es interesante analizar que este problema es para estos niños una posibilidad de elaborar relaciones muy elementales, pero nuevas para ellos, acerca de la div sión entera. Tomemos por ejemplo la producción de Rocío, Micaela, Natalia y Agostina de la Escuela Julio Cortázar. Estas alumnas tienen muchas dificultades para comprender el problema. Después de varias búsquedas infructuosas (12 dividido 34, 18 dividido 34, etc.) la maestra les muestra un esquema de la representación "cuenta de dividir" y les pide que ubiquen los datos en el mismo. A partir de esto una de las alumnas, Natalia, propone hacer 34 por 18, como si la representación "cuenta" disparara la relación multiplicativa involucrada. Sin embargo, cuando obtienen 18 de cociente y resto 0, descartan la cuenta que han realizado:

Natalia:	*El 612 ese no tiene nada que ver.*
Rocío:	*Sí mirá, 612 dividido 34 es 18, tiene que ver. El número que nos dio es el que tenemos que dividir por 34, que va a dar 18*
Natalia:	*Pero tiene que dar de resto 12. Para mí que está mal.*
Rocío:	*Pero hacé la cuenta*
Natalia:	*Ya la hice, 612 dividido 34 me dio 18 y no sobra nada, por eso está mal. Tiene que sobrar 12.*

Natalia no puede concebir en principio el 612 como un número "intermediario" hacia la solución. Por otro lado, luego de obtener el 612 como resultado de 34 por 18, se sorprende de que 612 dividido 34 dé 18 y resto 0. Estos dos hechos estarían mostrando que haber movilizado la multiplicación es en este caso algo más ligado al algoritmo de realización de la operación y que no necesariamente significa haber comprendido cómo se relacionan los elementos de la división.

Sin embargo, en el proceso de aplicación del algoritmo de la división para hacer 612 dividido 34, toma conciencia de que sumando 12 al dividendo puede obtener el resto que necesita. Podría interpretarse que realizar el algoritmo teniendo incorporada la pregunta acerca de cómo obtener resto 12, le brindó elementos para avanzar en la elaboración de las relaciones. Propone entonces hacer 624 dividido 34, hacen la división y nuevamente se sorprenden al obtener cociente 18 y resto 12. Pareciera que la relación $624 = 34 \times 18 + 12$ no es suficiente para garantizar el cociente y el resto de la operación sin aplicar el algoritmo. Como veremos a propósito de otros problemas y con otros alumnos, el estatuto de esta relación es en muchos casos diferente cuando se realiza para obtener el dividendo que cuando se aplica para comprobar la correcta realización del algoritmo.

2.4 Conclusiones sobre el problema 0

Como ya hemos señalado, el interés central de este problema radica en el tipo de relaciones que dispara la pregunta acerca de la cantidad de soluciones. Al tratar de argumentar al respecto, los alumnos comienzan a prever los efectos de la variación del dividendo sobre los otros elementos de la división entera. Algunos alumnos movilizan estas relaciones de manera autónoma y otros lo hacen a partir de un pedido específico del docente. Es esta demanda explícita la que informa a algunos de los niños que las anticipaciones son posibles, dando lugar a un proceso de elaboración de las relaciones necesarias para lograr esas anticipaciones.

Ya sea que se movilicen de manera espontánea, ya sea que se producen a partir del pedido del docente, las previsiones de los niños tienen diferentes alcances y grados de generalidad: algunos alumnos pueden analizar la variación simultánea del cociente y del resto a partir de la variación del dividendo, otros sólo consideran pequeñas variaciones del dividendo y pueden prever modificaciones del resto pero no del cociente; por otro lado, algunos niños pueden anticipar las variaciones y otros necesitan acompañar dichas anticipaciones de la realización efectiva de las cuentas; hay quienes gracias a las hipótesis que hacen pueden hacer un análisis exhaustivo a partir de un único ensayo en tanto que otros no pueden ir más allá de lo que muestran los ejemplos que han propuesto.

De todos modos, en la articulación entre las anticipaciones y la realización de operaciones, la mayoría de los alumnos comienza a asumir que es posible, apoyándose en propiedades, conocer un cierto resultado aunque no se realice la cuenta.

La posibilidad de que una misma idea –analizar la variación de unos elementos en función de otros- pueda alojar diferentes niveles de profundidad genera buenas condiciones para el trabajo en una clase diversa.

El hecho de haber encontrado alumnos que no consideran la necesidad de que el procedimiento que proponen debería poder aplicarse a otros casos similares, nos llevó a interrogarnos sobre las condiciones de elaboración de la noción de "procedimiento general". Más específicamente nos preguntamos cómo juega en dicha elaboración la inclusión de algún nivel de justificación de los procedimientos que se utilizan y también qué consecuencias tiene (qué obstáculos provocaría) el proponer actividades de generalización que no contemplan para nada la cuestión de la fundamentación[11]. Esta es una pregunta pertinente desde un proyecto didáctico que se plantea el tratamiento con lo general como una componente central de la articulación entre la aritmética y el álgebra.

[11] Nos referimos por ejemplo a las actividades de completar "patterns" a partir de inferir una ley de formación de manera inductiva. En el capítulo 1, al referirnos a los trabajos sobre álgebra, hemos fijado nuestra posición al respecto.

Gracias al uso de la calculadora este problema permite establecer relaciones entre división entera y división exacta y entre números naturales y números racionales.

En muchos casos, la disposición de los datos en la forma "cuenta" es imprescindible para que los niños arranquen con el problema. Dicha representación puede evocar un paso del algoritmo de la división entera sin que el significado del mismo esté ligado a la relación entre los elementos de la división. La realización del algoritmo una vez que se han incorporado las preguntas de este problema, puede contribuir a elaborar las relaciones entre los elementos de la división.

3. Problema 1

Recordamos el enunciado:

> *Proponé una cuenta de dividir en la que el divisor sea 32 y el resto sea 27. ¿Cuántas soluciones hay? Si pensás que hay menos que tres, escribilas todas y explicá porqué no hay más. Si pensás que hay más de tres soluciones, proponé al menos cuatro y explicá cómo pueden obtenerse otras soluciones.*

El análisis de las producciones de la clase se estructurará alrededor de las siguientes cuestiones:

3.1 Los distintos niveles de generalidad que suponen los procedimientos puestos en juego por los alumnos.

3.2 La necesidad de las intervenciones del docente para la emergencia de ciertas relaciones.

3.1 Los distintos niveles de generalidad que suponen los procedimientos puestos en juego.

Los procedimientos que los alumnos ponen en juego dan cuenta de diferentes grados de generalidad. Hemos encontrado quienes:

- buscan de entrada un procedimiento general capaz de "albergar" todas las soluciones (punto 3.1.1),
- comienzan con una estrategia exploratoria y van produciendo relaciones que les permiten llegar a un procedimiento de tipo general (punto 3.1.2),
- encuentran varias soluciones pero no parecen ser conscientes de que las mismas podrían describirse a través de un procedimiento común (punto 3.1.3),
- se ubican en una lógica completamente aritmética según la cual el problema tiene una única solución que se obtiene operando solamente con los datos numéricos dados (3.1.4).

Los alumnos ubicados en cada una de estas perspectivas pueden ir evolucionando a lo largo de las interacciones que se generan en la clase a propósito del problema.

3.1.1. La perspectiva más general

Tal como surge del análisis a priori, hay alumnos que atribuyen de entrada valores al cociente, lo multiplican por el divisor y le suman el resto para obtener el dividendo. Sin embargo no para todos este proceso tiene el mismo significado. Para muy pocos alumnos este es un procedimiento completamente general, puede aplicarse a cualquier número natural y es suficiente para estar seguro de que el dividendo que se obtiene al dividirse por el divisor dado, conserva el resto que el problema "fija" de antemano. La relación Dividendo = divisor x cociente + resto es, entonces, para estos alumnos, anticipatoria de la cuenta (ejemplo 1). Otros alumnos en cambio, si bien trabajan en una perspectiva general, necesitan hacer la cuenta o alguna otra verificación para estar seguros de que han encontrado las operaciones requeridas. Analizaremos esta cuestión a través del ejemplo 2.

Ejemplo 1. *La relación dividendo = divisor x cociente + resto es al mismo tiempo un medio para resolver y validar el problema.*

Veamos la manera en que un alumno de la Escuela 19, responde al pedido de explicación de la maestra:

Maestra:	*(a Nicolás) Me explican lo que hicieron?*
Nicolás:	*Nosotros inventamos el cociente y después multiplicamos el divisor por el cociente y le sumamos el resto y ahí nos dio el dividendo y formamos la cuenta que había que hacer. Hay más posibilidades* ***pero sin otro procedimiento***
Maestra:	*¿Hay más cuentas?*
Nicolás:	*Sí, hay un montón*
Maestra:	*¿Cómo se obtienen otras cuentas?*
Nicolás:	***Con el mismo procedimiento***
Maestra:	*¿Puedo poner cualquier otro número, por ejemplo 1500 x 32 más 27?*
Nicolás:	*Pero el dividendo va a dar muy alto*
Maestra:	*¿Pero va a dar el divisor 32 y el resto 27?*
Nicolás:	***Esos tienen que estar seguros, el cociente se lo agregamos nosotros*** *y después hacemos la cuenta*

La explicación da cuenta del nivel de anticipación que tiene para él la estrategia utilizada: para referirse tanto al número que él atribuye como a los datos del problema y al valor obtenido, no alude a los números particulares sino a los nombres de los elementos de la división. Al atribuir de entrada a cada número su "lugar" en la operación de dividir, no necesita hacer más verificaciones para estar seguro de que a través de la relación usada responde a los requerimientos del problema.

Ejemplo 2. Atribuir valores al cociente: un instrumento suficiente para producir cuentas pero no para validarlas.

Mientras los alumnos resuelven este problema en los pequeños grupos, en todas las clases observados hemos visto niños que luego de obtener el dividendo a través de la relación euclideana, hacen la división para verificar. En algunos casos, los niños obtienen el dividendo, anotan los elementos en la representación "cuenta" y vuelven a aplicar la misma relación que usaron para obtener el dividendo, ahora para verificar la operación. Todo ocurre como si el cálculo para obtener el dividendo fuera diferente del cálculo para verificar la operación. Esto nos remite a la idea de que la significación de un objeto está dada por lo que se puede hacer con él (García, R.; 2000) y que para estos alumnos, existiría una centración en la función que cumple para ellos la relación Dividendo = divisor x cociente + resto en cada momento, más que en su estructura como caracterización de la división entera. De esta manera, a funciones diferentes (obtener el dividendo o verificar) le corresponderían objetos diferentes (aunque desde nuestra perspectiva se trate siempre de la misma relación). Un trabajo de coordinación entre esas dos funciones que lleve a identificar la relación mencionada como caracterización de la división entera, sería el "asunto" que está en juego para estos alumnos en esta etapa de la secuencia.

Al detectar este comportamiento en un grupo de la Escuela 19, la maestra indaga si todos los alumnos de ese grupo necesitan hacer alguna verificación adicional y promueve la explicitación de los puntos de vista de cada uno de los integrantes. Veamos:

Cecilia:	*Para mí el número 32 se puede multiplicar por cualquier número. Yo probé con 5, me dio 160 a eso le sumé el resto y me dio 187. Luego Cecilia comienza a hacer cálculos.*
Maestra:	*¿Qué estás probando Cecilia?*
Cecilia:	*Estoy haciendo 5 x 32 y al resultado se lo voy a restar a esto (por el 187) y me tiene que dar esto (por el 27). Sí, me da 27.*
Maestra:	*Para estar segura que esto da resto 27, ¿tengo que hacer la cuenta o ya puedo estar segura?*
Luciana:	***ya puedo estar segura***
Cecilia:	***para mí hay que hacer la cuenta***
Maestra:	*¿ Por qué?*
Cecilia:	*porque yo no encuentro la manera de verificar si esta cuenta va a dar de resto 27*

Maestra:	*¿Y vos Luciana por qué pensás que se puede estar seguro ya?*
Luciana:	*porque ya multiplicándolo a 32 por ejemplo x 2 más 27 ya te da, ya sabés que da de resto 27*
Maestra:	*¿Qué decís Ceci de lo que dice Luciana?*
Cecilia:	*(Muy dudosa) Sí podría ser una posibilidad*
Maestra:	*¿Vos Nacho? Ustedes hicieron 32 x 4 + 27, les dio 155. Mi pregunta es para estar seguro que esto da resto 27, tengo que hacer la cuenta o ya puedo estar seguro que va dar de resto 27.*
Nacho:	*ya podés estar seguro porque esto es lo que hiciste sumándole los 27.*
Maestra:	*Fíjense que 4 x 32 = 128 Si yo hiciera 128 dividido 32, qué resto me da*
Los tres:	*Cero*
Luciana:	*porque no le sumaste los 27.*

Notemos que Cecilia hace en primer lugar el cálculo 5 x 32 + 27 , obtiene 187 como dividendo y luego hace 187 – 32 x 5 y dice que *debe* dar 27. Luego, como reafirmando la insuficiencia del primer cálculo, sostiene que es necesario hacer la cuenta para verificar. La interacción entre las diferentes posiciones de los integrantes del grupo que es favorecida por las preguntas de la maestra, contribuye a que se elabore entre todos la idea de que la aplicación del procedimiento es simultáneamente un medio para resolver y para validar el problema.

3.1.2 De los ensayos a la producción de un procedimiento general. El papel de los ejemplos.

Como analizamos a priori, las posibilidades de exploración que ofrece este problema nos llevaron a ubicarlo primero en la secuencia de problemas sobre división entera con un grado de libertad entre las variables. Mirando el total de las producciones vemos que muchos alumnos arrancan haciendo 32 + 27 (suma de los datos) y dividiendo ese número por 32. Si bien algunos niños se detienen ahí, hay otros para los que esa misma cuenta actúa como palanca hacia un procedimiento general. Interpretamos que las diferencias se explican en términos de las hipótesis de partida. Si los alumnos "ingresan" al problema suponiendo que hay varias (o infinitas) soluciones, y conciben aunque sea implícitamente que las mismas pueden obtenerse a partir de un único procedimiento, podrán leer en los ensayos que realicen, pistas que los lleven hacia un procedimiento general. A través de <u>cinco ejemplos</u> describiremos a continuación distintas aproximaciones posibles a un procedimiento general, a partir de ensayos iniciales.

<u>*Ejemplo 1*</u>*. Una primera cuenta, punto de arranque para la generalización*

Tomamos el ejemplo del grupo de Julio, Román y Santiago, de la Escuela Julio Cortázar, aunque procesos muy similares hemos observado en otros casos. En este grupo los alumnos habían resuelto sin dificultades el problema 0, apelando a la relación divisor x cociente + resto = dividendo. Para el problema que analizamos ahora, Román plantea hacer 32 + 27, probablemente como dijimos recién, porque es una manera de operar con los datos que tiene. Resuelve la división 59 dividido 32 sin anticipar que el cociente es 1 y luego, para verificar hace 32 x 1 + 27. A partir de ahí Santiago dice: *"también podemos hacer 32 x 2 + 27"* y Román acepta probar con varios números. Vemos entonces que en el curso de la interacción con el problema, Santiago y Román pasan de usar la relación *divisor x cociente + resto = dividendo* como comprobación de un algoritmo a concebirla como productora de cuentas que cumplen las condiciones del problema. El hecho de realizar la comprobación teniendo en la mira la búsqueda de otras cuentas, parece jugar un cierto papel en dicha transformación.

Ejemplo 2. Los posibles cocientes ligados entre sí

Presentamos un ejemplo de la Escuela Despertar (año 1999) en el que pareciera que si bien se conciben varios cocientes posibles, los mismos no son completamente independientes sino que guardan una cierta dependencia de los datos. Esto se pone de manifiesto en el momento de la puesta en común.

Maestra:	*Matías, ¿cómo hicieron ustedes?*
Matías	*nosotros hicimos una cuenta, 27 más 27 por 32. Porque se nos dió*
Maestra:	*¿Todo o sólo el último 27 por 32?*
Matías:	*Todo*
Maestra:	*(anota (27+27)32). Esto es 54 por 32, ¿cuánto es?*
Matías:	*1728. Después lo dividimos por 32*
Maestra:	*¿cuánto te da?*
Matías:	*54*
Maestra:	*¿cuánto te da de resto?*
Matías:	*Nada*
Maestra:	*Así que ustedes hacen 54 por 32 y después al dividir 1728 por 32 les da 54.*
Matías:	*Entonces para que dé resto 27 le sumamos 27*
Maestra:	*anota 54x32 + 27*
Matías:	*Después hicimos 27+37 igual 64. Después hicimos 64 x 32*
Maestra:	*¿y entonces?*
Matías:	*le sumamos 27*
Maestra:	*anota 64 x 32 + 27 y abajo*

	54 x 32 + 27
Matías:	*después 47*
Maestra:	*¿podríamos haber hecho 27 + 8 y después multiplicarlo por 32?*
Matías:	*no sé, no probamos.*

Dos cuestiones parecerían inferirse de la intervención de Matías. Por un lado, los posibles cocientes se van generando de alguna manera, no son cualesquiera. Por otro lado, va recorriendo la relación "paso a paso". Primero multiplica por 32, luego suma 27. Lo va haciendo con algunos números y necesita probar. Es decir, el cálculo no es anticipatorio del resultado de la cuenta. A tal punto que cuando la maestra sugiere algún posible número, Matías dice "no probamos". Hasta que no se pruebe, los números son "posibles candidatos", pero no son seguros. Podemos hacer la hipótesis de que esta serie de ensayos tiene un valor para Matías desde el punto de vista de la elaboración del funcionamiento de la fórmula. Si bien no es anticipatoria, se va elaborando como tal en el transcurso de la producción de ejemplos acerca de los cuales va reflexionando. Esto se pone de manifiesto, sobre todo, en los problemas que siguen en la secuencia. Podríamos inferir que la producción de ejemplos tiene el valor de contribuir a transformar la manera en que él concibe la relación euclideana.

Ejemplo 3. *Del dividendo al cociente como punto de arranque*

Es interesante recuperar el hecho de que algunos alumnos comienzan tomando el dividendo como punto de partida y en la interacción con el problema pasan a considerar el cociente como elemento de arranque. Es lo que ocurre, por ejemplo, con el grupo de Laura, Andrea y Emiliano, de la Escuela 19. Estos alumnos atribuyen un dividendo cualquiera, lo dividen por 32 y retienen el cociente sin considerar el resto. Luego multiplican ese cociente por 32 y le suman 27 para obtener el dividendo. En ese proceso se dan cuenta de que podrían atribuir directamente los cocientes y pasan a utilizar la relación "Dividendo = divisor x cociente + resto" con valores cualesquiera para obtener los correspondientes dividendos.

Ejemplo 4. *La evaporación de las funciones de los números.*

Como muchos chicos en las distintas escuelas, bajo el supuesto de que las incógnitas dependen de los datos, Martín propone hacer 27 x 32 para obtener el dividendo, como si éste estuviera determinado. Florencia lo acompaña, los dos dividen por 32 con la calculadora, y para obtener el resto hacen 864 (dividendo) menos el resultado de multiplicar 32 x 27 (divisor por cociente). Recién en ese momento dicen que el resto de la división es cero. Una primera interpretación nos llevaría a pensar que estos alumnos no tienen incorporado el hecho de que si a x b = c entonces c/a es b y c/b es a. Sin embargo, pensamos que esta manera de hallar el resto, da cuenta de una cierta pérdida del registro de los cálculos que van realizando. Podríamos interpretar que hay una primera centración en hacer 27 x 32 para obtener el dividendo, sin mucha conciencia de la función que cumplen esos números en la división que están buscando. Luego, para hallar el resto, hacen 27 x 32 en tanto multiplicación de cociente por divisor y ese parece ser otro cálculo diferente porque se hace con un objetivo distinto y probablemente también por el hecho de que están fijadas ahora las funciones de esos números en la cuenta de dividir. Luego de este primer ensayo, Martín reflexiona: *"si multiplicás 32 x 27 y después lo dividís por 32 es lo mismo que no hacer nada"*, es decir, la lectura del resultado le permite coordinar estos dos cálculos que inicialmente se vieron como diferentes. Por otro lado, esta primera exploración le permite a Florencia lanzarse a la tarea de atribuir dividendos "al azar". Lo veremos a continuación.

Ejemplo 5. La posibilidad de atribuir valores informa que hay varias soluciones.

A partir del trabajo conjunto con Martín que acabamos de relatar, Florencia emprende el camino de buscar dividendos "a la suerte", como ella lo expresa. Es así como esta alumna prueba con 90 como dividendo y al obtener resto 26 dice *"por uno, me está dando"*. Realiza 91 dividido 32 con cierta expectativa y se alegra al comprobar que obtiene resto 27. Sus gestos parecen indicar que recién está segura cuando realiza la cuenta efectivamente. Pareciera que Florencia usa la relación " si se aumenta algo al dividendo, el resto aumenta ese algo", sin tener necesidad de definir el dominio en el que dicha relación es válida.[12] La insistencia en que se trata de números " a la suerte" le permite tener para cada ensayo un punto de arranque a partir del cual se ubica en una racionalidad totalmente experimental. Es como si dijera "a partir de este dividendo, veo qué pasa". Este posicionamiento no resulta favorable para la elaboración de las relaciones entre el cociente y el dividendo que son las variables de este problema.[13] Cuando la maestra se acerca a preguntarle acerca de la cantidad de soluciones, ella insiste en que hay varias *"porque **nosotros*** (resalta esta última palabra) *tenemos que sacar el dividendo*". Florencia destaca unas cuantas veces que hay varias soluciones porque ellos tienen que poner los números "a la suerte". El hecho de que el argumento de que hay varias soluciones se base en que ellos atribuyen valores arbitrariamente, estaría indicando la estrecha relación entre la posibilidad de concebir que hay varias soluciones y el permiso que se da de atribuir valores arbitrariamente. Por contraposición, quienes no se toman ese permiso están más lejos de concebir varias soluciones.

3.1.3 La dificultad de concebir un único procedimiento

[12] Dado que la relación que usa se pone en acto como un instrumento para resolver un problema, no tiene su dominio de variación definido ni está cuantificada, tiene para nosotras las características de un Teorema en acto (Vergnaud, G; 1990).

[13] El hecho de que los dividendos se "tiren a la suerte" y luego se realicen las correcciones necesarias para "llegar" al resto deseado, va a tener –como veremos más adelante- influencia en el estatuto que tendrá para Florencia la relación "divisor x cociente más resto", que ella utilizará en el problema 2.

En nuestro análisis a priori identificamos distintos procedimientos posibles, según los alumnos tomaran el dividendo o el cociente como punto de arranque. A partir de esta clasificación concluimos que en ambas centraciones los niños podrían establecer que el problema tiene una, varias o infinitas soluciones. Sin embargo, el análisis de las producciones efectivas, nos permitió "ver" algo que no surgía del análisis a priori: algunos alumnos encuentran varias soluciones sin concebirlas como el producto de un único procedimiento. Para estos alumnos, el hecho de que una misma relación pueda ser utilizada para generar varias soluciones, sería un conocimiento en juego. Sin esta concepción les resulta difícil anticipar la cantidad de soluciones y cuando se les pregunta específicamente si hay más soluciones, suelen responder: *"no sé, estamos viendo"*. Relatamos como ejemplo el trabajo desarrollado en el grupo de José María, Gabriel y Paula, de la Escuela 19. Veamos.

Estos alumnos operan primero con los datos: 32 + 27 y 32 x 27 y realizan las operaciones 59 dividido 32 y 864 dividido 32. Al obtener resto 0 en el segundo caso, suman 27 a 864 (resultado de 32 x 27). Luego dicen que "hicimos la división por 32 y nos dio 27 de cociente, y el resto es 27 porque multiplicamos 32 x 27 y al resultado lo restamos de 891 (32 x 27+ 27). Veamos sus pasos de manera sintética:

32 + 27 ⌊ 32		32 x 27 ⌊ 32	
27	1	0	27
		32 x 27 + 27 ⌊ 32	
		27	27

Verificación: 32 x 27 + 27 - 32 x 27

Todo parece indicar que estos alumnos no están usando la relación *Divisor x cociente + resto = dividendo* para obtener el dividendo, aunque los números que manipulan "encajan" en esa fórmula. Efectivamente, pareciera que 32 x 27 es para ellos "una cuenta posible con los datos" y luego aplican la relación "si tengo resto 0 y quiero tener resto 27, debo sumar 27 al dividendo". Esto es distinto de concebir que el cálculo *Divisor x cociente + resto*, permite obtener el dividendo. Esta interpretación explicaría también porqué necesitan verificar el resto a través de un cálculo (ellos hacen 32 x 27 + 27 – 32 x 27): desde la perspectiva de los niños recién ahora estarían usando la relación euclideana, una vez que están definidos los cuatro elementos de la operación. La transformación de "cálculo para verificar" a "cálculo para producir" sigue pendiente para este grupo de niños. Después de estas dos cuentas, la docente les pregunta si hay más posibilidades y la respuesta de José María es: *"no sé, estamos buscando"*.

Gabriel, que hace cuentas con la calculadora, propone 155 (que dividido por 32 da cociente 4 y resto 27) pero dice que la obtuvo de casualidad y no puede recuperar los cálculos que hizo para llegar al número. En sus carpetas anotan lo siguiente:

a) sumamos el resto más el divisor y hacer la cuenta

59	32
27	1

c) Multiplicamos el divisor por el resto y le sumamos 27

891	32
27	27

d) Lo sacamos de casualidad

155	32
27	4

Recordemos que en el problema 0, el trabajo de José María mostró que este alumno no tenía elaborada la noción de que un algoritmo de verificación para ser tal, debía basarse en relaciones que valen para la operación en general y no sólo para los números específicos con los que trata en cierto momento. En este caso, su producción muestra un aspecto relacionado con el anterior: las distintas soluciones que se proponen no se inscriben en la misma estructura, no tienen relación entre sí. Estos resultados nos llevan a establecer que en este problema está en juego la noción de "procedimiento generador de soluciones", y que la elaboración de dicha noción – relevante para el trabajo algebraico– se ve favorecida por la interacción con problemas cuya solución general puede expresarse a través de una fórmula en la que intervienen variables.[14]

[14] Notemos que no estamos poniendo como condición que los alumnos utilicen la fórmula, sino que estamos caracterizando un tipo de problemas.

3.1.4 El proyecto aritmético. Los efectos de las retroacciones de "los otros" sobre los alumnos que sostienen que hay una única solución

En todos los casos hemos encontrado alumnos que operan con los datos, y sostienen que hay una única cuenta que cumple las condiciones del problema. Habíamos previsto a priori que estos niños modificarían su perspectiva al encontrar en la escena del aula compañeros que sostuvieran que hay infinitas soluciones o que pensaran que hay una única solución, pero distinta de la que ellos habían encontrado. Sin embargo, informarse que hay más soluciones no es lo mismo que cambiar de perspectiva: para algunos alumnos el contacto con otras producciones pone verdaderamente en cuestión lo que ellos han realizado, los deja perplejos (veremos esto a través del *ejemplo 1*); mientras que para otros, esa información parece ser un hecho externo que no alcanza para modificar en profundidad la conceptualización que hacen del problema (*ejemplo 2*). Estas diferentes "reacciones" se explican desde nuestro punto de vista en función de las anticipaciones realizadas, de los significados movilizados y del grado de satisfacción con la respuesta obtenida.

Ejemplo 1. Las producciones de los compañeros cuestionan el punto de vista "aritmético"

A través del ejemplo que analizamos a continuación, intentamos precisar las condiciones en las cuales las producciones de los alumnos que argumentan que hay infinitas soluciones, funcionan como retroacción para quienes sostienen que hay una única solución, y contribuyen a la evolución de estos últimos. Silvina y María Sol, dos alumnas de la escuela Despertar (año 1999), "obtienen" el cociente operando con los datos de la siguiente manera: 32 x 27 – 27 = 837. Luego usan la relación "*divisor x cociente más resto tiene que dar el dividendo*":

837 x 32 + 27 = 26 811 y anotan:

26 811	32
837	

Ellas explicitan que se trata de la única solución. Todo ocurre como si pensaran que en algún lugar la cuenta está hecha y ellas ahora la están verificando. Una vez obtenido el cociente, se está en las condiciones del problema 0. Pareciera que para estas alumnas, el cociente depende de alguna manera de los números que están dados y el dividendo depende del cociente y de los datos. En la puesta en común, al escuchar la explicación de una compañera, Silvina "descubre" que el cociente es independiente de los datos:

Silvina: *Nosotras hicimos 32 x 27 – 27 y nos dió 837*

Maestra:	*¿y qué hicieron con ese 837?*
Silvina:	*Ese 837 vendría a ser el cociente. Para sacar el dividendo hicimos 32 x 837 + 27*
Maestra:	*Y cuando lo dividimos por 32, les da cociente 837 y resto 27*
	(anota 837 x 32 + 27).
Julieta	*Nosotros hicimos 32 por.... Bueno hicimos 32 x 10 pero puede ser cualquier número.*
Maestra:	*¿cualquier número o diez?*
Julieta:	*Puede ser cualquier número pero pusimos por ejemplo 10*
Maestra:	*32 por 10 más 27, igual 347*
	(anota en el pizarrón 32 x 10 + 27 = 347)
Silvina:	*(Con tono muy eufórico)* ***Entonces sí pueden haber un montón de cálculos!!!*** *Lo puede multiplicar por cualquier número y ese va a ser el cociente. Por ejemplo si multiplicás por 1, te va a dar 1 de cociente; si multiplicás por 3, te va a dar 3 de cociente, y así.*
Maestra	*Se puede inventar cualquier número o hay que usar los números que me dieron?*
Silvina:	*Nosotros lo hicimos y nos dió. Pero da igual*
A1:	*(con un tono un poco desafiante o desconfiado) a ver, probá con otro!!!*
Maestra:	*Probemos, decime un número*
A1:	*3*
Maestra:	*Díctenme*
A1	*3 x 32 + 27 = 123*
Maestra:	*¿Cuánto va a dar el cociente?*
A1:	*Te tiene que dar de cociente 3*
Maestra:	*¿seguro?*
Algunos:	*sí*
Maestra:	*¿Ilan, seguro?*
Ilan:	*No sé.*
Maestra:	*¿tenemos que hacer la cuenta?*
Ilan:	*Sí*

¿Por qué Silvina se da cuenta de una manera tan neta en la puesta en común, que el cociente es independiente de los datos y, por lo tanto, que puede haber "un montón" de cuentas? Si bien ella "obtiene" el cociente, su modo de explicar da cuenta de una cierta incertidumbre respecto de los cálculos realizados para ello, como si le resultaran algo arbitrarios. Por otro lado, ella utiliza la verificación de la división entera, es decir moviliza un significado específico de esta operación. Vemos entonces que Silvina obtiene la cuenta solicitada pero hay algo que para ella no resulta del todo satisfactorio. Desde esa posición –habiendo establecido relaciones específicas sobre la división entera y con cierto grado de insatisfacción por su propia producción- puede reconocer la contradicción entre su producción y la de compañera. Es decir, Silvina puede integrar la explicación de Julieta, porque responde a una pregunta que ella se estaba haciendo y porque la contradicción que ella percibe no se sitúa solamente al nivel de los resultados sino de las relaciones establecidas. Esto se manifiesta como un "darse cuenta" sorprendente y eufórico.

El alumno que interviene después de Silvina, pareciera estar elaborando el papel anticipatorio de la fórmula. Por un lado, pide que se pruebe, que se realicen ejemplos, por otro lado, anticipa (*te tiene que dar 3*). Podríamos pensar que acá también se pone de manifiesto al papel transformador que tienen en este problema por un lado, los numerosos ensayos y por otro, las intervenciones de los compañeros en el momento grupal. La intervención del último alumno (Ilan) viene a mostrarnos que no para todos los alumnos la relación euclideana se anticipa a la realización efectiva de la operación.

Ejemplo 2. Las producciones de los compañeros no atraviesan el punto de vista aritmético

El ejemplo que daremos a continuación en cierto sentido es contrario al anterior: en este caso las cosas no funcionan de acuerdo con lo analizado a priori y vemos cómo los niños más "empíricos" no pueden integrar el trabajo de los compañeros que muestran que hay varias soluciones. Constanza, Pablo, Pamela y Matías, de la Escuela 19, dicen de entrada que hay dos posibilidades: 32 x 27 o 32 + 27. Dividen 864 (32 x 27) por 32al no obtener resto 27, descartan esta posibilidad (*porque en vez de darnos resto 27 nos dio cociente 27 y de resto 0).* Luego realizan la cuenta 59 dividido 32, pero sin conciencia de las razones por las cuales el cociente es 1 y el resto es 27. Vemos entonces que el proyecto es "operar con los datos y mirar si da" sin apelar a significaciones de la división entera y sin anticipar la cantidad de soluciones (de entrada esperan obtener dos soluciones, ya que los datos podían sumarse o multiplicarse). Cuando se les pregunta cuántas soluciones hay, Constanza dice:

Constanza: Una porque mirá, si yo a 59 le subo más números, no me va a dar resto 27.

Esta alumna utiliza la misma justificación que fue aceptada en el problema 0, sin tener en cuenta que en aquel caso el cociente estaba determinado. El hecho de que estos alumnos se imaginen sólo algunos pocos ejemplos para concebir la variación del dividendo, los lleva a homologar este problema con el anterior y, en consecuencia establecer que hay una única cuenta. Es difícil saber si hacen pocos ensayos porque están convencidos de que hay una única solución, o, si por el hecho de pensar que con pocos ensayos alcanza, no llegan a "ver" que podrían obtener resto 27 con otro cociente. De todos modos, el ejemplo permite establecer una estrecha relación entre dos aspectos: las conceptualizaciones sobre el objeto y los instrumentos que usan para dar por válida una cuestión. Si para justificar, ellos ampliaran un poco el dominio en el cual producen ensayos, podrían llegar a establecer la repetición cíclica del resto.

En la puesta en común, Constanza habla en representación del grupo y su intervención nos permite comprender más claramente la "lógica" desde la cual resuelven el problema:

Constanza:	*Nosotros nos confundimos porque primero hicimos 32 x 27 y nos dio 864. A eso lo dividimos por 32,* ***pero en vez de darnos resto 27 nos dio cociente 27 y de resto 0. Entonces estaba mal. Entonces lo tachamos.*** *Entonces después hicimos 32 + 27 y nos dio 59 y lo dividimos por 32 y nos dio resto 27.*
Maestra:	***¿por sumaron 27 + 32?***
Constanza:	***para ver cuál era ese***
Maestra:	*¿el dividendo?*
Constanza:	*sí.*
Maestra:	*¿única posibilidad ?*
Constanza:	*(se ríe) en realidad,* ***nosotros pensábamos que no había más, porque si poníamos 60 nos daba 28 y si poníamos 58 nos daba 26***
Maestra:	*entonces antes de que expusiera este otro grupo pensaban que había una única posibilidad, ahora no lo piensan?*
Constanza:	*no (se ríe y sus gestos muestran que no está muy convencida)*
Constanza:	*viendo lo de los otros grupos nos dimos cuenta de que había más porque nosotros* ***lo que hicimos no fue adivinar,*** *nosotros* ***tratamos de no adivinar o sea sacar el número que tenía que ir ahí pero sin adivinar, usando los números que teníamos.***
Maestra:	*¿Qué piensan en cuanto a las posibilidades?*
Constanza:	*(riéndose) no sé.*

Las expresiones de Constanza parecen confirmar que ella opera con un muy bajo nivel de anticipación. En la medida en que no parecen haberse movilizado relaciones relativas a la división entera –sólo está en juego el algoritmo- los resultados de los otros no cuestionan su producción.

"Mirando" los dos ejemplos en conjunto, "vemos" que las alumnas del primer ejemplo tienen una posición más teórica según la cual conciben el problema de manera genérica y pueden movilizar entonces relaciones vinculadas a la división entera; en tanto que los niños del segundo ejemplo se manejan en el marco estricto de la cuenta que manipulan y sólo operan con números. Esto nos lleva a precisar -una vez más- la noción de retroacción del "medio", en el marco de la Teoría de Situaciones: la información que ofrece el "medio" modifica el sistema de conocimientos del alumno si la misma interpela relaciones anticipadas por él, y no si opera simplemente al nivel de los resultados del problema que el alumno obtiene. Es por esta razón que no todos los alumnos que desde una lógica aritmética operan con los datos y piensan que el resultado de este problema es único, están en las mismas condiciones de integrar otras producciones y evolucionar en la consideración del problema.

3.2 La necesidad de las intervenciones del docente para la emergencia de ciertas relaciones

Al analizar el tipo de conocimientos que se producen en la clase a partir de la secuencia propuesta, hemos identificado algunas cuestiones que "requieren" para su emergencia de la interacción entre las producciones de los alumnos, pero que sólo pueden ser planteadas por el docente que es quien las identifica como una cuestión relevante a tratar. Analizaremos a través del *ejemplo 1*, el proceso por el cual se llega a discutir que si dos procedimientos son equivalentes entonces "producen" las mismas soluciones.

Por otro lado, la intervención del docente en los pequeños grupos permite "rescatar" relaciones que aportan a la comprensión de todos los niños pero que ellos hubieran descartado en pro de estrategias más eficaces. Analizaremos este fenómeno de "fuga" a través del *ejemplo 2*.

Ejemplo 1. La emergencia de la noción de procedimientos equivalentes

La gran mayoría de los alumnos considera los dividendos por un lado y los cocientes por el otro, sin que lleguen a darse cuenta de que se trata de pares solución. Esto está ligado al hecho de que una vez que atribuyen un valor al dividendo o al cociente, realizan una cuenta que les da el "resultado". Ligado a esta cuestión, surge también del análisis de las discusiones colectivas en las que se confrontan los dos grandes tipos de procedimientos, que la mayoría de los alumnos puede pensar que dos procedimientos son correctos sin que una consecuencia de ello sea que se obtienen las mismas soluciones por uno y por otro. **Agotar todas las soluciones no parece ser una cuestión incluida en la consideración de un procedimiento.** Notemos que la equivalencia de procedimientos suele reducirse a propósito de los típicos problemas aritméticos con solución única, a constatar que todos conducen al mismo número, que es la respuesta del problema.

Veamos a propósito de esta cuestión, un tramo de la puesta en común de la Escuela 19 en la que se discute luego de que cada grupo expone su producción.

Maestra:	*¿qué piensan, cuántas posibilidades hay?*
Florencia:	***no son infinitos, porque no todos los números caen en 27 y 32***
Maestra:	*¿Quiénes no caen en 27 y 32?*
Florencia:	*No podemos tener muchos dividendos que divididos por 32 den resto 27*
Constanza:	*Casi todos son múltiplos de 32*
Laura:	***Fuimos tirando y no todos los números daban resto 27***
Florencia:	***No cualquier número sirve***

Nicolás:	***Son infinitas porque cualquier número que inventás de cociente y lo multiplicás por el divisor y le sumás el resto te va a dar el dividendo justo***
Maestra:	*Ustedes eligieron 5, ¿qué otro cociente podrían haber elegido?*
Nicolás:	*Cualquier otro. Pusimos 1500, lo multiplicamos por 32 y le sumamos 27*
Maestra:	*¿Por qué infinitos?*
Nacho:	*Porque podíamos hacer cualquier número, desde uno hasta infinito.*
Maestra:	*¿Qué piensa el resto de lo que dicen estos grupos?*
Julián:	*Está mal*
Maestra:	*¿Por qué?*
Cynthia:	***No son infinitos porque probás con otros números y no te da. No te da con todos los números***
Maestra:	*Ese número con el que probás, ¿qué representa, cociente o dividendo?*
Cynthia:	*El dividendo*
Maestra:	*¿Y?*
Cynthia:	*Hacés la divsión y no te da 27 de resto*
Maestra:	*¿Y cómo harías para que te de 27 de resto?*
Cynthia:	*Sumar*
Maestra:	*Si vos pensaras cualquier número que dividido por 32 te da un cociente cualquiera, pero no te da resto 27, ¿lo podrías cambiar para obtener resto 27?*
Cynthia:	*Sí*
Maestra:	*Este dividendo yo lo podría cambiar todas las veces que yo quiera*
Cynthia:	*Pero no muchas, infinitas no*
Laura:	***Para el cociente sí son infinitas; pero para el dividendo son infinitos pero no del todo. Hay muchos, pero no son todos.***

Además de la confusión entre "infinitos" y "todos" que refleja la discusión anterior, pareciera poder inferirse de estas intervenciones, que los alumnos están considerando: 1) que las soluciones son los números que obtienen como resultado de la cuenta que realizan y 2) no se obtienen las mismas "cuentas" a través de los dos procedimientos, aunque ambos sean correctos. La última intervención de Laura es elocuente al respecto.

Ante este panorama la maestra se ve en la necesidad de proponer un problema específico que apunte a mostrar que la cuenta que se obtiene por un procedimiento podría haberse obtenido por el otro. Aparecen entrelazados un conocimiento específico de la división entera y uno más general que concierne a las prácticas algebraicas. Dos cuestiones nos interesan resaltar de este ejemplo: 1) la cuestión de la igualdad de los conjuntos solución vía dos procedimientos correctos, "necesita" para ser planteada de la interacción entre los problemas ya resueltos por los alumnos y 2) sólo puede ser propuesta por el docente ya que para los alumnos no parece estar en el campo de sus preguntas posibles.

<u>Ejemplo 2.</u> La intervención docente en un pequeño grupo "recupera" relaciones pertinentes que los alumnos estaban a punto de descartar

Cuando los alumnos trabajan en pequeños grupos, muchas veces lo hacen en forma conjunta y otras cada uno se centra en su producción para luego confrontar. Suele ocurrir que cuando surge en el grupo alguna estrategia que "funciona" de manera más o menos económica, los alumnos tienden a descartar aquello que está en curso de realización, sin terminar de analizar su pertinencia. Esto supone la "fuga" de una cierta cantidad de relaciones, que si bien son relevantes para la cuestión que se está aprendiendo, son desechadas por los alumnos en función de otras que se muestran más eficaces para la finalidad que se está buscando. Relatamos a continuación un episodio en el que la presencia casual del docente permite "rescatar" una relación que aporta a la comprensión de todos los integrantes del grupo. Ya hemos citado al grupo de Cecilia, Luciana y Nacho, de la Escuela 19. En este grupo, Cecilia ya había propuesto la estrategia de arrancar del cociente tomando un número cualquiera y Luciana había realizado 59 (suma de 32 y 27) dividido 32. A partir de esta última cuenta, Nacho propone hacer 118 (el doble de 59) dividido 32. Los tres hacen la división y, al obtener resto 22, Luciana y Cecilia dicen que está mal y Nacho propone sumar 5. Esto no es aceptado por las niñas y, los tres están a punto de descartar este ensayo antes de verificarlo, cuando la maestra interviene solicitándole a Nacho que pruebe qué obtiene si hace 123 (118 + 5) dividido 32.

Maestra:	*La cuenta 123 dividido 32 sirve o no? A él (a Nacho) 118 le dio con resto 22 y le sumó 5 al 118 y le dio 123. Esa cuenta, sirve?*
Luciana:	*sí da 27 de resto*
Maestra:	*Nacho por qué le sumaste 5 a 118?*
Nacho:	*porque 118 daba de resto 22, entonces agarré y le sumé 5*
Luciana:	*no entiendo de donde lo sacaste el 5*
Nacho:	*porque el 118 daba de resto 22 entonces para llegar a 27 le agregué 5*
	....
Nacho:	*también lo que se puede hacer es poner un número cualquiera, hago la cuenta y después que la terminé cuento cuánto me faltó en el resto para llegar a 27*

Nacho reconoce y enfrenta un problema (obtener resto 27, a partir del resto 22) y para ello pone en acto una relación (para pasar de resto 22 a 27, hay que sumar 5 al dividendo) de la que probablemente no se dispondría fuera de este contexto. Luciana que no ha necesitado de la relación, no llega a comprenderla y ese es el interés que puede tener para esta alumna (con muy buen desempeño) reflexionar sobre un procedimiento como el de Nacho, aunque ese procedimiento sea menos económico que el utilizado por ella. Es decir, en el episodio se movilizan relaciones que son pertinentes sobre la división entera que aparentemente Luciana no tiene tan elaboradas.

3.3 Conclusiones del problema 1

El hecho de que algunos alumnos no hayan logrado inscribir las distintas soluciones que encontraron en un único procedimiento, nos dificultó "encajar" sus producciones según la clasificación que habíamos hecho a priori basada en un análisis matemático del problema. Efectivamente, entre las distintas cuentas que proponían estos alumnos, algunas respondían al procedimiento de partir del dividendo y otras tomaban al cociente como punto de arranque. Al intentar una nueva clasificación centrada en la perspectiva del alumno, se hizo observable para nosotras que para los alumnos que producen cuentas aisladas sin reparar que las mismas podrían obtenerse a través de la misma estrategia, **es la noción misma de procedimiento la que está en juego como uno de los objetos de aprendizaje en este problema**.

La mayoría de los alumnos realiza **ensayos como medio de explorar el problema. El nivel de anticipación que tienen dichos ensayos también es función del proyecto de cada alumno:** quienes se ubican en un proyecto más general hacen **ensayos con una gran carga predictiva basada en relaciones puestas en juego**, lo cual les permite **confrontar entre la anticipación y el resultado obtenido**, en tanto quienes se reclinan más en una **perspectiva empírica**, no salen del universo de cada cuenta particular, suelen leer el resultado a posteriori, **sin que el mismo reoriente de manera sustancial la búsqueda**.

Por ejemplo muchos alumnos realizan ensayos definiendo de antemano –aunque sea de manera implícita– la función en la cuenta de dividir que tienen los números con los que trabajan; otros en cambio no consideran dicha significación. Los primeros están más cerca de elaborar la fórmula como anticipatoria de la operación ya que el haber definido previamente las funciones de los números los lleva a esperar ciertos resultados y no otros, en tanto que los segundos se ubican en una lógica del tipo "hago esto a ver qué pasa" sin que evidencien demasiada conciencia de los resultados que esperan, y apelando a la realización de la cuenta como instrumento de verificación. Se identifica acá un aspecto interesante de la relación aritmética álgebra: frente a los problemas aritméticos usuales que provienen de un contexto extra matemático, los alumnos conservan para los números con los que operan un significado ligado a dicho contexto, el problema que acá analizamos, estaría poniendo a los alumnos en contacto con la necesidad de retener para los números con los que operan una significación interna a la operación con la que están tratando.

Para muchos de los alumnos ubicados en un proyecto aritmético, el poder **considerar como objeto de análisis una cierta cuenta obtenida y usarla como intermediaria para obtener otra cuenta** que responda a las condiciones del problema, así como el hecho de **concebir la existencia**

de variables independientes de los datos cuyos valores pueden fijar arbitrariamente, son aprendizajes que están en juego a través de la resolución del problema.

El hecho de que algunos alumnos sostuvieron que hay una única solución a partir de constatar que con pequeñas variaciones del dividendo se modifica el resto, sin explorar un poco más allá, nos lleva a reafirmar la perspectiva según la cual hay **una estrecha relación entre la conceptualización que los alumnos tienen de un cierto objeto matemático y los instrumentos que utilizan para dar por válida una cuestión vinculada a ese objeto.**

Tomar el cociente como punto de arranque, movilizar la noción de variable y usar la fórmula *Dividendo = divisor x cociente + resto*, no constituyen elementos suficientes para que la fórmula sea anticipatoria de la cuenta de dividir. Algunos alumnos, aún teniendo un proyecto general, necesitan verificar que el resto obtenido es el que el problema requiere. Para hacer esto, hemos encontrado quienes utilizan un cálculo equivalente al que realizaron para obtener el dividendo (dividendo – divisor x cociente tienen que dar el resto). En muchos casos, estos alumnos no llegan a percibir la equivalencia, probablemente debido a que este cálculo cumple una función diferente –obtener el resto en lugar de obtener el dividendo–. **Concebir la fórmula como anticipatoria de la operación y por lo tanto considerar que es simultáneamente un medio de producción y de validación de la cuenta que se busca** y reconocer la equivalencia de los cálculos Dividendo = divisor x cociente + resto y Dividendo – divisor x cociente = resto, son entonces aprendizajes imbricados que estarían involucrados en este caso y que **movilizan simultáneamente algo específico de la división entera y algo más general que concierne al trabajo algebraico**. Para dar lugar a estos aprendizajes es necesario que los docentes formulen preguntas específicas que apunten a considerar como objeto de discusión el grado de "confianza" que puede tenerse en la aplicación de la formula.

Poner en juego la relación *Dividendo = divisor x cociente + resto, 0 ≤ resto < divisor*, no implica conocer relaciones que se derivan de la misma (por ejemplo establecer cómo varía el resto en función de una variación en el dividendo). Este hecho nos lleva a valorizar las interacciones entre procedimientos más y menos avanzados, como una oportunidad para que se expliciten en la clase diversas relaciones vinculadas a la división entera, que enriquecen las conceptualizaciones de todos los alumnos.

La discusión que se genera en la clase acerca de los procedimientos que arrancan del cociente y los que parten del dividendo, nos permite tomar conciencia de que **la cuestión de la equivalencia de los conjuntos solución que se obtienen por uno u otro camino, no es observable para la mayoría de los alumnos**: ellos pueden considerar que los dos procedimientos son correctos sin que lleven a las mismas soluciones. Para que este nuevo conocimiento emerja es necesario: 1) **provocar la interacción entre los diferentes procedimientos que los alumnos pusieron en juego** y 2) que **sea el docente quien proponga problemas específicos para tratar la cuestión ya que los alumnos no la reconocen como pregunta posible.**

Aprender que la discusión sobre un procedimiento no abarca sólo los resultados sino también su potencia para agotar todas las soluciones posibles, concebir la dependencia entre cociente y dividendo y reconocer que las soluciones de este problema son pares de números, son cuestiones completamente imbricadas que se juegan en el problema.

4. Problema 2

Recordamos el enunciado del problema:

> *Proponé una cuenta de dividir cuyo cociente sea 43 y cuyo resto sea 27. ¿Cuántas soluciones hay? Si pensás que hay menos de tres, escribilas todas y explicá porqué no hay más. Si pensás que hay más de tres soluciones, proponé al menos cuatro y explicá cómo pueden obtenerse otras soluciones*

Estructuramos el análisis alrededor de un único punto:

4.1 Las estrategias puestas en juego por distintos tipos de alumnos, las relaciones allí implicadas y los elementos que contribuyen a su evolución.

Habíamos previsto en el análisis a priori que para los alumnos que utilizaran la relación *Dividendo = divisor x cociente + resto* sin tener en cuenta que el divisor debe ser mayor que el resto, la elaboración de esta última restricción sería el "asunto" de este problema: al obtener un cociente diferente del requerido, los alumnos buscarían las razones por las que su procedimiento "falla". A través del análisis del <u>ejemplo 1</u> precisaremos las condiciones en las cuales esta previsión "funciona" y el <u>ejemplo 2</u> nos permitirá interpretar las razones por las cuales en algunos casos los alumnos no "reaccionan" en el sentido esperado.

Nos interesa analizar el caso de los alumnos que obtienen diferentes cuentas sin que todavía puedan estructurarlas alrededor de un único procedimiento. Dos elementos –a nuestro juicio relacionados- convergen para esto: el hecho de concebir la relación *Dividendo = divisor x cociente + resto* como instrumento de verificación pero no como nstrumento para producir cuentas y la dificultad para atribuir valores arbitrariamente a una de las variables. Analizaremos a través del <u>ejemplo 3</u> la producción de un grupo de alumnos que conciben la relación *divisor x cociente + resto = dividendo,* como un algoritmo cuya fundamentación no parecen conocer. Esto hace que encaren la búsqueda de cuentas de forma tan aleatoria que sólo pueden leer en el resultado de la verificación que "la cuenta está mal", lo cual no resulta suficiente para avanzar hacia una solución. Nos apoyaremos en el <u>ejemplo 4</u> para poner de relieve el papel de posible "puente" que juega la noción de variable para la construcción de la relación euclideana como característica de la división entera.

El <u>ejemplo 5</u> servirá para analizar las intervenciones docentes que se dirigen a los niños más flojos. En estos casos, para que los alumnos puedan evolucionar, el docente debe aportar tanto elementos que conciernen a la división entera como cuestiones más transversales, como por ejemplo el comunicar de alguna manera que, si los procedimientos no funcionan, deben buscarse cuáles son las razones que provocan el fracaso. Las dificultades de estos alumnos para interpretar algunas de las propuestas y preguntas de su maestra nos hablan de las distancias entre los supuestos del docente y las concepciones de aquellos niños que se ubican en una posición muy "empírica". A su vez, esas distancias nos permiten identificar más claramente, cuáles son los conocimientos en juego para estos alumnos.

Ejemplo 1. La elaboración de la condición r < d, a partir de la fórmula dividendo = divisor x cociente + resto y del análisis de las cuentas propuestas

En todas las aulas observadas, algunos grupos de alumnos comienzan aplicando la fórmula *Dividendo = divisor x 43 + 27*, sin tener en cuenta que el divisor debe ser mayor que 27. En algunos casos realizan espontáneamente las correspondientes divisiones "para verificar" y a partir del análisis de las cuentas "que dan" y las "que no dan" llegan a establecer que el divisor debe ser mayor que el resto *"porque si no, se puede seguir dividiendo"*. En otros casos es el docente quien propone a los alumnos que realicen las divisiones con el objetivo de que revisen las condiciones en las que usaron el procedimiento. Analizaremos a través del trabajo del grupo de Nacho, Cecilia y Luciana, de la Escuela 19, el proceso de elaboración de la condición sobre el resto en el caso en que los alumnos no apelan espontáneamente a una verificación a través de la realización del algoritmo. En este proceso hemos accedido también a una interesante visión de Luciana respecto de qué es para ella un procedimiento.

En este grupo los alumnos usaron la relación *dividendo = divisor x 43 + 27*, atribuyendo a los divisores los valores 90, 3, 55 y 27. Distribuyeron los cálculos en la forma cuenta y afirmaron que de la misma manera se podrían obtener infinitas cuentas *"poniendo un divisor cualquiera"*. Relatamos algunos tramos de la interacción de este grupo con la maestra, luego de que ellos propusieran las cuentas recién mencionadas:

Nacho:	*Nosotros pensamos que poniendo un divisor cualquiera íbamos a obtener el resultado, que al divisor, lo multiplicábamos por el cociente, le sumamos el resto y nos daba el número y el divisor podía ser cualquiera que nosotros queramos. Nosotros pensamos números, cada uno dijo un número y lo pusimos.*
Maestra:	*Y les dio*
Nacho:	*Sí*
Maestra:	*Por ejemplo acá, ¿tienen la calculadora? Por ejemplo 156 (3 x 43 + 27) dividido 3, ustedes dicen que es 43 y resto 27. A ver Cecilia vos la tenés anotada esa cuenta?*
Nacho:	*sí todos la tenemos*
Maestra :	*bueno, hagan la cuenta con la calculadora*
Nacho:	*pero va a dar con coma*

Maestra:	*no importa,* ***¿cuánto les tendría que dar de cociente entero?***
Los tres:	***43***
Maestra:	*háganla*
Nacho	*52*
Cecilia	*no da*
(Gran consternación en los tres)	
Maestra:	*De las cuentas que ustedes tienen, verifiquen si todas dan, si algunas dan y otras no, si ninguna dá*

Es evidente que los alumnos se sienten desestabilizados por este "imprevisto" que contradice sus anticipaciones. Esto genera buenas condiciones para buscar las razones del desfasaje. Incluso en un primer momento Nacho se pregunta si la calculadora funciona bien, lo cual sería una muestra de la confianza que él tiene en lo que acaban de hacer. Notemos que el hecho de que sea la maestra quien les solicita a los niños que verifiquen las cuentas, no impide que los alumnos reconozcan una contradicción entre lo esperado y lo obtenido. Al preguntarles a los niños cuánto tendría que dar el cociente de una de las cuentas que ellos propusieron, se asegura conocer cuáles son las condiciones en las que los niños usan la fórmula.

Estos alumnos establecen que los divisores que "no funcionan" son 27 y 3. El análisis de los casos en los que la cuenta "da" y la contrastación con los que "no da", le permite a Cecilia explicitar las razones por las que ocurre algo distinto de lo previsto:

Maestra:	*Ahora hay que pensar qué pasa*
Luciana:	*44 da ésta (por 1188 dividido 27)*
Cecilia:	*¿hiciste bien la cuenta Nacho?*
Nacho:	***porque la calculadora no anda muy bien***
Nacho	*(Vuelve a hacer 1188 dividido 27)* ***Cuando yo la multiplico*** *(27 x 43 + 27)* ***me da bien***
Maestra:	*¿y cuando la dividís?*
Nacho:	*me da mal, pero ¿por qué?*
Luciana:	*Las únicas que están bien son ésta y ésta*
Maestra:	*Piensen qué está pasando*
Cecilia:	*Ah ¡!!!!! (con tono de haberse dado cuenta de algo importante) Ya sé cuál es el problema*
Nacho:	*son múltiplos de 3*

Cecilia:	*No, acá pusimos 27 y de resto también 27, alcanzaba para un número más y acá pusimos 27 de resto y el divisor era 3, el resto es más grande que el divisor.*
Nacho:	*ahora recién lo cambié y le puse 28*
Maestra:	*¿Y cuánto te da?*
Nacho:	*y me da bien, mirá.*

Notemos que al principio de este extracto Nacho se intenta explicar a sí mismo **porqué** *"cuando multiplico me da bien"* y *"cuando divido me da mal"* lo cual estaría mostrando que reconoce ahí que es suficiente usar la relación *divisor x 43 + 27 = dividendo* para establecer los elementos de la división. Pareciera que la contradicción que reconoce entre lo que espera (que la división "le muestre" lo mismo que la multiplicación) y lo que obtiene, lo mueve a encontrar una explicación. Cuando Cecilia establece que los divisores deben ser mayores que 27, Nacho está convencido que dejando el mismo dividendo y poniendo divisor 28, le va a dar. Hace una apreciación global, como si pensara: "si 1188 dividido 27 da 44, dividido 28 dará 43". Al fijar el 1188, pierde la idea de atribuir un valor al divisor y después obtener el dividendo correspondiente. Es decir, pierde la idea de dependencia entre dividendo y divisor. Se queda pensando y explorando con el objetivo de entender qué sucede:

Maestra:	*¿Te da Nacho? Si vos decís que acá va 28, ¿qué tendrías que hacer para verificar?*
Nacho:	*multiplicar este por este más este*
Maestra:	*¿Y?*
Nacho:	*Eso no lo hice. Lo que tendríamos que hacer es ahora sacar esa cuenta pero tenemos que saber por qué no nos da con esa cuenta.*
Maestra:	*¿Cuál no te da?*
Nacho:	*ésta (1188 dividido 28)*
Maestra:	***No, no te da, ¿por qué?***
Nacho:	***Eso es lo que no sabemos***
Maestra:	*Cuando decís "tendríamos que sacar esa cuenta, a qué te estás refiriendo, no te entiendo.*
Nacho:	***A que esta cuenta no sirve. Pero tenemos que saber por qué no sirve esa si el procedimiento está bien y lo hicimos igual que todas.*** *(Pausa) Ah, no ....está bien, porque yo tengo que cambiar este también (dividendo), me da 1231 (28 * 43 + 27)*
Maestra:	*Entonces, ¿cuál es la cuenta?*

Nacho:	*La cuenta es 1231 dividido 28 (verifica cociente y resto con la calculadora)*

Nacho recupera la noción de relación entre las variables en juego que la centración exclusiva en el divisor le había hecho perder momentáneamente. Su interacción sostenida con el problema como consecuencia –pensamos– de un trabajo con hipótesis bastante estables y desde una posición que "requiere" de explicaciones para sí mismo –varias veces habla de saber "por qué"- le posibilita entender qué sucede y corregir su error.

Finalmente nos interesa analizar a propósito de la interacción de la maestra con este grupo, la conclusión de Luciana al constatar que dos de las cuentas realizadas eran incorrectas:

Maestra:	*¿Y por qué con algunos números da y con otros no, cuando hacés esto por 43 más 27?*
Luciana:	***porque no hicimos el mismo procedimiento***
Maestra:	*¿Por qué no es el mismo procedimiento?*
Luciana:	***Porque si hubiéramos hecho el mismo procedimiento nos hubiera dado.*** *Porque nosotros probamos de muchas formas.*

Interpretamos que el supuesto de Luciana es que si en un caso dio y en otro no, es porque no aplicó el mismo procedimiento. Es decir, Luciana pareciera estar sosteniendo una idea según la cual un procedimiento queda caracterizado por las operaciones que se realizan para ponerlo en juego y debe poder aplicarse de manera indiscriminada a "todos los números". Cuando ella se quiere explicar a sí misma la contradicción surgida entre lo anticipado y lo obtenido, considera que ello se debe a la aplicación de otro procedimiento y no a la extensión del mismo a un dominio en el cual no es válido. La intervención de Luciana nos permite detectar que la consideración del dominio de validez como uno de los elementos que caracterizan un procedimiento resulta "extraña" para esta alumna.

<u>Ejemplo 2</u>.*Los resultados de la división no conducen a la elaboración de la restricción $r < d$. La fórmula Dividendo = divisor x cociente + resto, como ensayo.*

En el ejemplo que planteamos a continuación, los alumnos aplican la fórmula euclideana sin considerar la restricción sobre el resto. Sin embargo, el resultado de la división no los lleva a revisar el procedimiento utilizado, tal como habíamos previsto a priori. ¿Por qué? Pensamos que para algunos de estos alumnos la fórmula *Dividendo = divisor x cociente + resto* funciona como un ensayo a partir del cual exploran qué sucede. En la medida en que la fórmula no define los resultados de la división, obtener un cociente que no es el que en principio se esperaba, no les plantea a estos alumnos una contradicción, como en el ejemplo anterior. Analizaremos esto a través de la producción de Florencia y Martín, de la Escuela 19.

Esta alumna –recordamos- había utilizado para el problema anterior la estrategia de arrancar del dividendo. Probablemente por el hecho de que el divisor ahora no es un dato y porque en la puesta en común del problema anterior se privilegió la estrategia de atribuir valores al cociente y usar la relación "divisor x cociente + resto = dividendo" por sobre el procedimiento de tanteo de dividendos posibles, ahora estos alumnos plantean el procedimiento de asignar valores al divisor. Martín propone tomar "8" como divisor y realizan 8 x 43 + 27 para hallar el correspondiente dividendo. Verifican con la calculadora, y al no obtener cociente 43, no parecen verse para nada afligidos. Al leer el resultado 46,375, Florencia pone divisores más bajos, observa que de esa manera obtiene un cociente aún mayor y entonces dice *"tengo que poner números más grandes"*. Interpretamos que Florencia se ubica en una posición exploratoria, con preguntas claras, con relaciones que utiliza para su exploración, con posibilidad de analizar los resultados que va obteniendo y reorientar la búsqueda. Pero no espera resultados "seguros" y esto la libera de alguna manera de contrariarse cuando no obtiene la cuenta que busca. A medida que va modificando su estrategia como producto de los análisis que hace, va encontrando algunas explicaciones. Veamos ahora un momento del diálogo con la observadora en el que parece quedar claro que el cálculo que realiza para obtener el dividendo es para ella sólo una hipótesis de trabajo cuya no "verificación" no logra desestabilizarla:

Florencia:	*Probé con 8 y me dio 46, probé con 3 y la cuenta me dio más alto, entonces yo estoy probando con números más altos a ver si me da.*
Observadora:	*¿Qué es el 8?*
Florencia:	*el divisor*
Observadora:	*¿8 es el divisor?*
Florencia:	*Claro, y se va multiplicando y 43 es el cociente, te lo da acá, te da el cociente y el resto. Entonces voy probando: 8 por 43 me da un número, más 27, me da otro y si lo divido por 8 nos da 46. Entonces tengo que poner números más altos para llegar a la conclusión*
Observadora:	*¿Más altos que quién?*
Florencia:	*más altos que 8 para llegar a que me de 43*
Observadora:	*¿y por qué con números más altos te va a dar?*
Florencia:	*y porque si yo sigo probando con números más bajos, la cantidad lo divide a menos partes va a ser mayor la cantidad.*

Florencia dice al realizar el cálculo para obtener el dividendo, que 43 es el cociente pero después, cuando el resultado de la cuenta de dividir es otro número, no siente que haya alguna contradicción. Esto nos lleva a interpretar que para ella, el cálculo que hace no es seguro, es un ensayo, una especie de posibilidad. Hay una separación entre el cálculo euclideano y la operación de dividir que no la "obliga" a conservar el mismo cociente en uno y otro caso. Si recordamos que para el problema anterior, ella había atribuido dividendos probables y después los había ajustado, podemos pensar que en este caso se está manejando con la misma idea: si antes las atribuciones eran probables, ¿por qué ahora habrían de ser seguras? En última instancia, Florencia no ha construido aún la diferencia que existe entre atribuir valores al dividendo y atribuir valores al divisor. La realización de la cuenta con la calculadora sólo la mueve a seguir buscando posibles divisores pero no la mueve a buscar las razones por las que esos cálculos "no dan", como es el caso de otros chicos como Nacho, Cecilia y Luciana.

Estos resultados nos llevan a hacer la siguiente hipótesis: para que la realización de la cuenta con calculadora -como verificación de la cuenta propuesta- funcione como una retroacción que mueva a elaborar la restricción sobre el resto, es necesario que los alumnos reconozcan una contradicción entre su predicción y el resultado que obtuvieron y, para que tal contradicción tenga lugar, la realización del cálculo "divisor x cociente + resto" como medio para obtener el dividendo, debe ser anticipatorio de la cuenta.

Por otro lado, queremos poner de relieve que Florencia va modificando el divisor a partir de analizar los cocientes que va obteniendo al hacer las correspondientes cuentas. Es decir, ella actúa sobre la relación variación del divisor- variación del cociente, - podría estar operando allí una cierta idea según la cual una variación es siempre monótona- sin pasar por la relación entre divisor y resto.

Dado que Florencia encuentra tres cuentas sin llegar a establecer el conjunto de divisores posibles, la maestra interviene preguntando con cuáles da y con cuáles no. Luego de haber probado con 21, 22, 23 y 24 Florencia dice que los de "veinti" no sirven. A continuación ensaya con 32. La maestra le plantea que pruebe con 29. Luego de hacerlo, Florencia dice que el 29 sirve, pero sigue sin centrarse en la relación entre divisor y resto y la maestra decide explicar que el divisor debe ser mayor que el resto. A pesar de que Florencia no encuertra por sí misma esa relación, toda la exploración realizada genera buenas condiciones para comprender la intervención de la docente. De todos modos no queda claro si este trabajo le permitió avanzar en la elaboración de la fórmula euclideana como característica de la división entera.

Ejemplo 3. La relación Dividendo = divisor x cociente + resto: de algoritmo de verificación a instrumento de producción

Como ya hemos señalado, algunos alumnos no pueden concebir que la relación que utilizan para verificar el algoritmo de la división pueda ser utilizada para resolver el problema planteado. En realidad, pensamos que para ellos la verificación no es considerada como una relación entre los elementos de la división entera, sino que es un algoritmo acerca de cuya fundamentación no han reflexionado. Esto los inhabilita para concebir un procedimiento a partir del cual puedan producir distintas cuentas posibles y proponen una exploración que tiene de entrada muy bajo nivel de anticipación. Para que estos alumnos puedan evolucionar son necesarias numerosas intervenciones docentes que "tironean" para que los alumnos abandonen el universo estricto de los números "sueltos" de este caso particular y entren en un juego de relaciones que les ayude a "atar los distintos cabos" del trabajo que realizan.

Tomaremos como ejemplo la producción del grupo de José María y Gabriel, de la Escuela 19, quienes al abordar el problema, separan claramente la etapa de producción de la cuenta de la etapa de verificación. La búsqueda de cuentas es al tanteo y parece obedecer a reglas generales que tienen los niños, como por ejemplo "operar con los datos" más que estar basada en relaciones específicas de la división entera. Esto explicaría que no puedan leer en el resultado de la verificación, elementos que los ayuden a avanzar en la resolución. Comencemos analizando el momento de arranque:

Gabriel:	*hice 43 x 27 y el resultado lo divido por 43 y me da 27. (ubica los datos en forma de cuenta)*
José María:	*capaz que ese número que te dio puede ser el dividendo. Lo vemos*
	anota: $\begin{array}{l\|l} & \\ \hline 27 & 43 \end{array}$

Luego agrega 1161 (resultado de 43 x 27) como dividendo en la distribución "cuenta" que había hecho previamente, pero queda desconcertado al no disponer de un divisor. Aparece acá una clara diferencia con el problema 1 ya que ahora de alguna manera el problema fuerza a invertir el sentido habitual de los cálculos. Se queda pensando y escribe:

$$\begin{array}{l|l} 1161 & 27 \\ \cline{2-2} 43 & \end{array}$$

Esta distribución lo lleva a hacer la verificación 43 x 27 + 27 con cierta expectativa y, al no obtener 1161, dice *"no, no da"*. Pareciera que en el momento en que hace el cálculo para verificar, José María no puede recuperar que acaba de obtener 1161 como producto de 27 x 43. Observemos que el cálculo 43 x 27 + 27 tiene una función específica –verificar– y que este alumno no puede modificarla, probablemente porque no la liga a la caracterización de la división entera. Interpretamos que esta manera de proceder de José María es también una muestra de la gran distancia que existe entre aplicar la fórmula a los cuatro elementos ya dados y utilizar la "misma"[15] relación pero en la que dos de las variables no están determinadas. En otros términos, la significación "funcional" de la fórmula requiere de una construcción específica y no se hereda

[15] Al poner las comillas en la palabra "misma" estamos queriendo comunicar que justamente para alumnos como José María, la significación de la relación Dividendo = divisor x cociente + resto está ligada a las tareas que él puede hacer con ella, y en ese sentido no se trata de la misma relación aunque sí de la misma escritura.

automáticamente de un sentido más estático consistente en reemplazar en ella todos los elementos por valores determinados previamente.

José María vuelve a hacer 43 x 27 = 1161 y dice: *"habría que buscar 1161, dividido cuánto me da 43. Acá* (señalando el lugar del dividendo) *puede ser que sea 1161. Acá puede ir 1161".*

José María:	*Hice 1161 dividido 43 y eso me dio 27 y ahora voy a hacer 1161 dividido 27 y puede ser que me de 43 y ahora voy a verificar, sacar 27, ...27 x 43....ah...no, es igual que antes, por más que haya hallado 1161 dividido 43*
Maestra:	*a ver ¿1161 dividido?*
José María:	*dividido 27 que es lo que me dio esa cuenta*
Maestra:	*sí, ¿cuánto te dio?*
José María:	*43*
Maestra:	*¿ y de resto?*
José María:	*ahora voy a sacar...27 x 43...no, más 27. No, no nos da porque hicimos 27 x 43 y nos da 1161 y después le sumamos 27....1161 más 27 me da 1188 , no nos da.*

Vemos que José María tampoco logra actualizar la relación entre multiplicación y división como una herramienta necesaria para la pregunta que se está haciendo. Los intercambios entre José María y la maestra que se dan a continuación, muestran claramente cómo este alumno ensaya una y otra vez sin poder recuperar los resultados de la verificación para proponer una cuenta adecuada y perdiendo de vista –como producto de la gran cantidad de cálculos que realiza- las funciones que tienen en la cuenta los números con los que manipula.

Maestra:	*¿qué quiere decir que no te da?*
José María:	*sacamos a ver si estaba bien esto (la cuenta 1161 dividido 27 con cociente 43 y resto 27) 27x43+27 y nos dio 1188*
....	
José María	*1161 dividido 43 me da 27, 1161 dividido 27 nos da 43*
Maestra:	*¿qué resto?*
José María:	*y de resto capaz que 27, habría que averiguar*
Maestra:	*Fijate cuánto te da de resto.* ***¿Te acordás que cuando vos tenías una cuenta con un resto para poder llegar a otro resto cómo hacías?***

José María:	*esto (divisor) por esto (cociente) y después lo que me faltaba para llegar a este número (por el dividendo) era el resto. José María hace 27x43+27 y dice : me da 1188, y a eso le voy a restar 1161. Y me da 27.*
Maestra:	*¿entonces?*
José María:	*está bien la cuenta que yo hice*
Maestra:	*¿cuál es la cuenta?*
José María:	*1161 dividido 43 y a eso me dio 27; a 1161 lo dividí por 27 y me dio 43 pero después hice 27 x 43 más 27 y me dio 1188 y a eso le resté 1161 y me dio 27.*
Maestra:	*sí pero vos decís que esto (1161) dividido 27 te da cociente 43 y resto 27*
José María	*sí*

Notemos que todas las intervenciones de la maestra apuntan a comunicar que se puede anticipar el resto y a recuperar relaciones ya utilizadas en la clase (*¿Te acordás...?*). En ese marco le pregunta a José María cómo calcular el resto de 15 dividido 7 y, a partir de esta referencia el alumno toma conciencia de su error y dice que el resto de 1161 dividido 27 es cero.

Una vez que José María llega a que el resto de 1161 dividido 27 es cero, quiere restar 27 a 1161. Al observar que el cociente de 1134 dividido 27 es 42, inmediatamente dice: "ah, no...tengo que sumar 27". Le preguntamos por qué y dice: "porque como antes me daba resto 0, le sumo para que tenga 27, por ejemplo caramelos, le sumo para que tenga 27 más". Es la primera vez que este alumno utiliza él mismo la referencia al reparto como medio de justificación de lo que va a realizar. Al realizar 1188 (1161 + 27) dividido 27 y obtener 44, se queda perplejo. Interpretamos que esta perplejidad es producto de haber anticipado con cierta convicción que obtendría cociente 43 y resto 27. Es clara acá la diferencia con otros momentos en los que, al no haber realizado anticipaciones, José María no era desestabilizado por el hecho de no obtener los resultados buscados. En ese momento se acerca la maestra quien le explica, refiriéndose a una situación de reparto, porqué no puede tener divisor 27 y resto 27. José María propone entonces cambiar el divisor:

José María:	*Sí. O sea que habría que cambiar el divisor*
Maestra:	*ahá*
José María:	*vamos a probar con 26...*
Maestra:	*Gabriel, ¿me contás en qué andás, qué ensayos hacés?*
Gabriel:	*primero sumé estos dos 27 y 43, después el resultado lo multipliqué por 43 y dividí por 70 (43 + 27)*
Maestra:	*¿Cuál es el resto de esa cuenta?*
Gabriel:	*Esperá que la saco. Cero*
Maestra:	***Ahora te dio resto 0, ¿cómo podés hacer para que te dé resto 27?***
Gabriel:	***cambio esto (por el dividendo)***

Maestra:	***¿por qué lo cambiás?*** *(José María, fijate si te sirve aprovechar la cuenta de él). Vos (a José María) ¿en qué andás? ¿Cómo volviste a 1188?*
José María:	*estoy probando con diferentes divisores. Con 25 me da 47; dividido 26 me da 45, con 27 me da 44, con 28 capaz que me da,....42. Dividido 29 ya me da más chico*

José María pareciera tener el supuesto de que puede ir pasando por todos los cocientes posibles si va aumentando de a uno los divisores. El hecho de tener candidatos a divisores, lo habilita para volver a usar el procedimiento de arrancar del dividendo. La maestra incorpora a Gabriel a la discusión y nuevamente vuelve a comunicar la "idea" de que se puede modificar una cuenta para obtener un cierto y que hay razones para ello.

Maestra:	*A ver, él (por Gabriel) puso 3010 dividido 70, le dio 43 y resto 0. Si yo tengo que el resto es cero:..díganmelo en términos de caramelos y chicos...*
José María:	*(muy rápido) le sumás 27*
Maestra:	*¿por qué?*
José María:	*tendría 3010 caramelos*
Maestra:	*¿los reparto entre cuántos?*
José María:	*entre 70*
Maestra:	*¿cuánto le doy a cada uno?*
José María	*43*
Maestra:	*¿ y cuánto sobra?*
José María:	*cero. Si quiero que sobren 27 agrego otros 27.*
Maestra:	*¿donde agrego los 27?*
José María:	*al dividendo*

José María y Gabriel hacen 3037 dividido 70 y verifican que el cociente es 43 y el resto es 27. Las intervenciones sostenidas de la maestra apuntando a las relaciones a través de la referencia a la situación de reparto parecen clarificar para José María las funciones de los elementos de la división y esto explicaría el "darse cuenta repentino" que se observa. Digamos que estas alusiones vienen haciéndose en el aula desde el comienzo de la secuencia y, ha sido necesario un tiempo para que estos alumnos puedan incorporarlas de manera productiva, es decir como referencias para pensar las relaciones que subyacen a la operación de dividir.

Cuando se les pregunta si habrá otras cuentas, José María dice: "hay que fijarse". Por ahora estos alumnos llegan a la cuenta sin posibilidad de recuperar claramente las relaciones que usaron para armarla. José María y Gabriel siguen trabajando y proponen divisor 28, lo multiplican por 43 y le suman 27. Para estar seguros, hacen la correspondiente cuenta de dividir. La estrategia puesta en juego con el 28 como divisor no está aún generalizada. Los alumnos siguen explorando juntos y llegan a la conclusión -ayudados por la distribución de los datos en la representación "cuenta"- de que lo que hicieron con el 28 lo podrían hacer con cualquier número mayor que 27. La exploración les permite en este caso llegar a una estrategia general. Sin embargo, luego de cada ensayo sostienen que hay que comprobar haciendo la cuenta. De manera que si bien para ellos la relación "divisor x cociente + resto = dividendo" pasa de ser una herramienta para verificar a ser un instrumento para producir los dividendos, -esto es de aplicarse a elementos ya dados a poder utilizarse con un sentido funcional de producción de unos valores a partir de otros asignados libremente- no alcanza para caracterizar a la división entera. Hacemos la siguiente interpretación de este hecho: así como antes, los alumnos "se encontraron" con la restricción de que el resto debía ser menor que el divisor, nada les asegura que no "aparezca" alguna otra restricción desconocida. Esto queda expresado así por José María:

Maestra:	*¿Y cómo se hace para obtener una cuenta?*
José María:	*Acá ponemos 43 y 27 (se refiere a la distribución "cuenta") que son los datos que nos daban. Inventamos un divisor, eso lo multiplicamos por 43 y le sumamos 27, y eso nos da y después hay que revisar la cuenta a ver si te da cociente 43 y resto 27 y si no hay que ir cambiando el divisor o el dividendo, depende*
Maestra:	*O sea uno inventa el divisor, hace esto por esto más esto, pero después tiene que hacer la cuenta?*
José María:	*sí, porque puede ser que no de*
Maestra:	*¿Por qué?*
José María:	*Porque puede ser que pusiste el divisor muy chico, o muy grande, por cualquier cosa que no te de el resto, por un número que no te pueda dar el resto.*

Todo ocurre como si, para "cubrirse" de condiciones aún desconocidas, el último reaseguro fuera la realización efectiva de la cuenta. Estos alumnos han avanzado evidentemente en el transcurso de la resolución del problema, han comenzado a operar con las relaciones involucradas en el mismo, pero la realización de las cuentas sigue siendo para ellos la fuente última de la verdad. Un trabajo de explicitación de condiciones sobre la división entera pareciera necesario para ayudarlos a avanzar.

Ejemplo 4: la noción de variable como puente hacia la caracterización de la división entera

Hemos recortado el ejemplo que analizaremos a continuación porque nos "muestra" qué "agrega" a una conceptualización bastante fundamentada de la división entera, pero apoyada en una lógica completamente aritmética, incorporar un problema que involucra la noción de variable.

Juan Alejo, un alumno de la Escuela Despertar cuya producción analizaremos, parece dominar la relación entre multiplicación y división exacta y utilizar relaciones vinculadas a la división entera. Sin embargo, cuestiones más normativas como la dificultad de atribuir él mismo valores a una de las variables, asociada a la creencia de que todo número que aparece en el problema debe "obtenerse" a partir de los datos numéricos, le obturan la posibilidad de concebir un procedimiento generador de cuentas posibles y aprehender a partir del mismo, que las condiciones *Dividiendo = divisor x cociente + resto; 0 ≤ resto < divisor*, caracterizan la división entera.

Describamos primero la estrategia utilizada por este alumno. Juan Alejo que en el problema anterior había puesto en juego un procedimiento que arrancaba del dividendo, intentó sostener ese modo, con las dificultades que le acarreó el hecho de no disponer del divisor. Este alumno, muy concentrado, y tomándose bastante tiempo, plantea la siguiente secuencia de cuentas:

43 : 27 = 1.5925;
43 : 27 = 1.593; (Observemos que transformó el punto decimal en un punto que separa las unidades de mil)
43 : 27 = 1593: 43 = 37 x 43 = 1591 + 27 = 1618 y propone como cuenta de dividir 1618 dividido 37.

Al observar que su compañero realiza 4327 dividido 100, "aprovecha" ese resultado y propone:

4327 + 1618 = 5945; 5945 dividido 43 y obtiene cociente entero 138

Hace la división entera entre 5945 y 138, obtiene cociente 43 y resto 11 y suma 16 a 5945 para tener resto 27.

La maestra se acerca a preguntarle si hay otra cuenta y responde: "*¿Otra más? Me sale humo!!!!!!!!*"

Observemos que las dos cuentas que obtiene están orientadas por las mismas ideas. ¿Cuáles son?

1) De una u otra manera, "obtiene" un primer número que será un dividendo provisorio;
2) luego divide ese número por 43 para calcular un divisor posible, apoyándose en la relación *si a: b = c entonces a : c = b,*
3) finalmente, para la primera cuenta "aplica" correctamente el algoritmo de comprobación de la división, sin tener en cuenta su primer candidato a dividendo y, para la segunda usa la relación "*si el resto debe aumentar una cierta cantidad x, entonces debe sumar esa cantidad x al dividendo*".

Pareciera quedar claro entonces, que ese primer dividendo que "obtiene" manipulando con los números que tiene a su alcance, no es para él una incógnita determinada por los datos del problema, sino una especie de punto de arranque que puede ser desechado en el camino, pero que le permite obtener un divisor "seguro" para luego calcular el dividendo a partir de él. La dificultad para conseguir ese primer número para empezar, le impide encontrar otras cuentas, aunque parece intuir que las mismas existen. Notemos de paso que Juan Alejo no parece estar considerando la posibilidad de invertir la dirección a la que está acostumbrado, de dividendo y divisor a cociente y resto.

Un episodio de la puesta en común nos permite profundizar en la interpretación que hacemos de las concepciones de Juan Alejo. En un determinado momento –y luego de que varios alumnos expusieron sus procedimientos- la profesora intenta escribir una fórmula para obtener diferentes dividendos:

Profesora:	*Para hacer una "fábrica" de números, puedo escribir así:* *□x 43 + 27* *↓mayor que 27*
Silvina:	*No hace falta hacer tanto cuenterío*
Juan Alejo:	*Claro, por ejemplo ponés 30 y lo vas aproximando*
Profesora:	*Decime*
Juan Alejo:	*Por ejemplo, ponés 30, hacés 30 x 43 + 27, que da 1317 y después hacés 1317 dividido 28*

¿Por qué ahora Juan Alejo no conserva el 30 como divisor y sí lo había hecho con el 37 de su primera cuenta? Interpretamos que en este caso, en el cálculo 30 x 43 + 27, Juan Alejo no le está atribuyendo al 30 la función de divisor. El simplemente está tomando en cuenta que la profesora acaba de decir que esa es la manera de obtener dividendos, pero no son los "dividendos seguros", son los dividendos para "arrancar", a partir de los cuales él va desplegar su estrategia de obtener el divisor y después aplicar la relación "divisor x cociente + resto = dividendo". En cambio cuando trabajaba solo, él había obtenido el 37 como respuesta a una búsqueda específica: por cuánto hay que dividir el dividendo para obtener 43 de cociente. Es decir, la cuenta que Juan Alejo hizo en ese momento para obtener el 37, fue realizada para obtener un número que iba a cumplir la función de divisor en la operación que él buscaba, en tanto que ahora el cálculo que hace tiene estatuto de ensayo para obtener un dividendo, sin que en ese cálculo el 30 tenga asignada una función en la cuenta que va a obtener. Por otro lado, todo pareciera funcionar como si cada cálculo que se realiza fuera para obtener un único valor y no podría ocurrir que en un mismo cálculo (30 x 43 + 27, por ejemplo) se estén definiendo los valores de dos variables al mismo tiempo.

Aunque este alumno hace un tratamiento del problema que tiene un cierto grado de generalidad a través del empleo de diferentes relaciones -usa la división exacta en el interior de la división entera, varía el dividendo para alcanzar un cierto resto, pone en juego el algoritmo de verificación- al no poder concebir un uso funcional de la fórmula, no llega a producir un procedimiento general. Vemos acá el rol específico que juega la elaboración de la noción de variable en la construcción de una concepción de la división entera más independizada de "las cuentas de dividir".

<u>Ejemplo 5</u>. *El docente frente al trabajo de los alumnos "flojos": la necesidad de intervenir sobre diferentes planos.*

Los alumnos más flojos –lo hemos ido señalando- suelen encarar el problema haciendo ensayos con muy bajo nivel de anticipación. El desconcierto que manifiestan estos alumnos frente a ciertas intervenciones docentes permiten identificar más claramente las cuestiones que estos niños deben aprender para "entrar" en el problema que se les propone. Tomaremos un ejemplo del grupo de Rocío, Micaela y Agustina, de la Escuela Julio Cortázar.

Estas alumnas se ubican en una posición muy empírica, según la cual cada número que usan se obtiene a partir de alguna cuenta. Es así como comienzan atribuyendo 16 al divisor, resultado de restar 43 – 27. Si bien utilizan el algoritmo de verificación queda claro a través de toda la interacción, que no pueden fundamentarlo. En un momento hacen 43 x 16 + 27 = 715. Cuando dividen 715 por 16 y obtienen 44 de cociente, simplemente dicen que el 715 no sirve, sin buscar alguna razón. Una de las alumnas propone 702 dividido 16, al obtener resto 14, poniendo en acto la propiedad "si se suma n al dividendo, se suma n al resto", propone sumar 13 al 702 y cuando obtienen 715 dice: "siempre llegamos a 715" sin establecer relaciones entre este cálculo y el anterior.

En ese momento la maestra pregunta:

"¿ Por qué te da 44 cuando le sumás 14? ¿ Por qué nunca podés llegar a que sobren 27?"

Esta pregunta tiene dos supuestos:

1) las alumnas han detectado como problema que no pueden lograr que sobren 27 y
2) hay razones por las que ello ocurre.

Ninguno de estos dos supuestos parecen ser compartidos por las niñas y por eso no comprenden la intervención de la maestra, y quedan desconcertadas. La docente continúa:

Maestra:	*Ustedes dicen que con 702 sobran 14 y con 703, ¿cuánto sobra?*
Micaela:	*15*
Maestra:	***¿Y no puedo ir así hasta que sobren 27?***
Micaela:	*Pero si ponés 715 acá ya va a dar 44.*
Maestra:	***¿Pero por qué da 44?***
Rocío:	*Porque necesitás 44*
Maestra:	*Pero ¿Por qué?*

Rocío:	***Porque sí***
Micaela:	*Porque le faltan 44, a éste le faltan 44 para llegar a éste.*
Maestra:	*¿Cómo que le faltan 44? 44 es el cociente. Si vamos sumando 1 al dividendo, van sobrando cada vez uno más.* ***¿Por qué no puedo hacer que sobren 27?***
Rocío:	***No entiendo***
Maestra:	*Con 702, sobran 14, con 703, ¿cuántos sobran?*
Rocío:	*15*
Maestra:	*¿con 704?*
Rocío:	*16*
Maestra:	*Puedo seguir...*
Rocío:	*(interrumpiendo) No, porque cuando sigo sumando acá me va a dar otro cociente*
Maestra:	*Claro. ¿Por qué te va a dar otro cociente?* ***¿Pueden sobrar 16?***
Rocío:	*Sí*
Micaela:	***No, porque la consigna dice que no.***
Maestra:	*No importa la consigna, en la cuenta, ¿puede sobrar 16?*
Micaela:	*Sí*

La pregunta *"por qué"* formulada por la maestra por un lado informa de manera implícita que hay razones internas a la operación por las cuales no puede obtenerse resto 27 si el divisor es 16 y, por otro lado, apunta a que las alumnas establezcan dichas razones. Las niñas parecen priorizar razones "externas" (*"la consigna dice que no"*) y simplemente constatan –a posteriori- que el resultado no da. La pregunta de la maestra y la respuesta de las alumnas, se ubican en dos lógicas completamente diferentes. Las niñas se ubican en una posición que no parece considerar una "teoría" desde la cual interpretar el "hecho" de que después de resto 15, viene resto 0 cuando dividen por 16. Para superar este posicionamiento son imprescindibles las intervenciones de la docente que con sus preguntas apunta a que las alumnas comprendan la condición sobre el resto y simultáneamente avancen en la consideración de qué es una explicación. Vemos que hay dos cuestiones totalmente imbricadas: llegar a que se den cuenta de las razones por las que no podrán obtener resto mayor que 15, modificará la capacidad explicativa de sus argumentos y lograr que busquen explicaciones basadas en razones internas, contribuirá a que comprendan porqué no pueden obtener resto mayor que 15.

Ahora bien, las representaciones que puedan tener los alumnos acerca de qué es una explicación constituyen un tipo de conocimiento cuya elaboración se describe bien desde la noción de contrato didáctico. Efectivamente, es a través de las aceptaciones y rechazos que se desprenden implícitamente de las intervenciones del docente – también de los pares-, a propósito de la explicación de algún alumno, que los estudiantes irán formándose una idea de aquello que se considera una explicación satisfactoria, noción que además está ligada a los conocimientos con los que se está trabajando en un momento dado. Ni las retroacciones de un medio, ni una explicitación textual dada por el docente, pueden ofrecer elementos que le permitan a alumno atrapar lo esencial de esta modalidad discursiva. El problema que estamos analizando, ofrece un espacio de negociación interesante al respecto, en la medida en que los ensayos infructuosos dan sentido a la búsqueda de una explicación. A su vez, comunicar una idea de explicación que incluya las relaciones específicas de la división entera, es en este caso, parte de la devolución del problema.

La maestra continúa "batallado" e insiste a través de sus intervenciones con dos tipos de referencias: a las situaciones de reparto y a los problemas anteriores de la secuencia. Son éstas, las maneras que la docente encuentra para intentar que estas alumnas miren las relaciones más que los números "sueltos".

4.2 Conclusiones del problema 2

A pesar de que al finalizar el problema 1 se institucionaliza el uso de la relación Dividendo = divisor x cociente + resto, como una fórmula que permite producir cuentas, este uso no está todavía disponible al iniciar el problema 2, para muchos de los alumnos que se ubicaron de entrada en un proyecto aritmético. Se ponen en juego entonces **distintos significados para diferentes tipos de alumnos**. Estos **significados están dados fundamentalmente por lo que los alumnos conciben que es posible realizar con la fórmula** (producir una cuenta, verificarla) y **por el grado de "confianza" que tienen en la misma como medio para resolver el problema** (es segura, es un ensayo que hay que verificar a través de la realización de la cuenta, define o no los elementos de la división que se busca).

El hecho de que muchos alumnos posicionados en un proyecto aritmético "obtuvieran" un dividendo y un divisor, usaran la fórmula para verificar, constataran "que no daba" y sin embargo no tomaran la iniciativa de usar ese resultado para modificar el dividendo, sumado a que esto se repetía varias veces para un mismo alumno, nos hizo pensar que **pasar de concebir la fórmula como medio de verificación a pensarla como instrumento de producción de cuentas, supone transformaciones importantes tanto a nivel de la división entera como a nivel de aquello que los alumnos conciben como legítimo en el trabajo matemático.** Efectivamente, la fórmula "para verificar" se "aplica" a cuatro elementos ya dados y no supone la modificación de ninguno de ellos. Lo que un alumno se responde una vez usada, es si la cuenta que realizó es o no correcta. La fórmula "para producir" en cambio tiene un carácter funcional que vincula dos variables, exige la elección de valores para una de estas variables, la obtención del otro valor, la aceptación de que en esa operación de asignación de un valor y obtención del correspondiente se define un par de valores que "arman" la cuenta que se busca.

Los alumnos que pueden fundamentar el algoritmo de verificación de la división entera pero que, desde una posición que parece obedecer al régimen contractual de resolución de los problemas aritméticos, piensan que hay que "obtener" el dividendo y el divisor operando con los datos, no pueden llegar a producir un procedimiento generador de todas las soluciones. Obtener soluciones y concebir todas las soluciones posibles son entonces dos asuntos diferentes.

Ahora bien, concebir un procedimiento general contribuye a que se pueda pensar la relación euclideana como característica de la división entera. Vemos entonces dos cuestiones imbricadas: la elaboración de la noción de variable resulta necesaria para concebir un procedimiento general y la consideración de dicho procedimiento contribuye a la conceptualización de la relación euclideana como característica de la división entera.

Como señalamos al introducir el análisis de este problema, habíamos previsto que para los alumnos que utilizaran la relación *Dividendo = divisor x cociente + resto*, sin tener en cuenta que el divisor debe ser mayor que el resto, la invitación por parte del docente a realizar la cuenta y la constatación de que el cociente es diferente del anticipado, los movilizaría a buscar las razones por las cuales no obtienen lo esperado. Sin embargo, esta previsión tiene el supuesto de que los alumnos al usar la fórmula, tienen conciencia de que definen el dividendo y el divisor de la cuenta que buscan y **que es la contradicción entre lo que esperan y lo que obtienen lo que motorizaría la elaboración de la restricción sobre el divisor**. Para muchos alumnos esto funciona de acuerdo con lo previsto pero, como vimos en el análisis de los ejemplos, **para otros, la utilización de la fórmula no es "segura" sino "probable"**. Para estos últimos, el hacer la cuenta les informa que algo está mal, pero **no los ubica en la posición de buscar razones** por las que ocurre algo diferente de lo que ellos anticiparon, simplemente porque no hicieron tal anticipación. Ellos siguen explorando hasta encontrar cuentas que "funcionen" sin que necesariamente tomen conciencia de que en esas cuentas el divisor es mayor que el resto. Este análisis nos ayuda a precisar los conocimientos del alumno, necesarios para que pueda interpretar las retroacciones del "medio".

Para los alumnos que se ubican en una racionalidad más empírica, la resolución del problema **requiere de intervenciones del docente** tanto relativas al objeto específico "división entera" como a cuestiones más transversales - como por ejemplo la búsqueda de razones por las que una estrategia fracasa- , que apunten a que los alumnos realicen un trabajo más teórico.

Las intervenciones que **se refieren específicamente a la división entera** apuntan a que los alumnos establezcan variaciones de unos elementos en función de otros, (*si acá sumamos, ¿cuánto va a dar el resto?) y* que busquen razones por las cuales no puede lograrse un resto mayor que el divisor.

Las **intervenciones** que responden a la lógica del contrato didáctico son necesarias para lograr la devolución y conseguir que los alumnos "entren en el juego". Efectivamente, a través de sus preguntas el docente comunica que hay razones por las que se pueden lograr o no ciertos resultados, enseña a tomar las situaciones de reparto como referencia para analizar el problema, propicia que los alumnos analicen los problemas anteriores para usar relaciones que fueron puestas en juego en los mismos, exige precisar las explicaciones negociando de esta manera qué puede considerarse una explicación aceptable. Todas estas intervenciones apuntan a que los alumnos salgan del plano estricto de los números que manipular y comiencen a pensar el problema en términos de relaciones. De manera transversal, estas intervenciones apuntan a un cambio de racionalidad que trasciende esta secuencia y contribuye a la devolución no solamente del problema sino de un proyecto basado en búsqueda de razones. Sin este cambio de posicionamiento -

imprescindible por otra parte para entrar en prácticas algebraicas- los alumnos no pueden avanzar en la resolución del problema.

Las **intervenciones docentes que evocaban contextos de reparto han mostrado cierta fertilidad para algunos alumnos.** Al respecto señalemos que esto no fue así al inicio de la secuencia, a propósito de los primeros problemas. ¿Cómo lo interpretamos? A lo largo de la escuela primaria, la tarea central sobre división entera ha sido para los alumnos resolver problemas de enunciado vinculados a contextos extra matemáticos. En general esta tarea se concibe en dos etapas independientes entre sí: identificar que se trata de un problema de división y resolver el correspondiente algoritmo cuya fundamentación se desconoce. Pensamos que esta falta de relación entre el contexto y el algoritmo hace que la evocación del contexto no sea de entrada una referencia productiva para los alumnos. Sin embargo, al sostenerla, el docente comunica de manera implícita que siempre es posible interpretar una división como una situación de reparto y esto invita a los alumnos a razonar sobre el contexto particular. Los alumnos comienzan entonces a considerar las relaciones entre los elementos de la división entera en términos de sus respectivos "roles" en la situación de reparto y esto redunda en un nuevo aprendizaje para estos niños: **referirse a un contexto extra matemático para pensar cuestiones internas a la matemática.**

5. Problema 3

Recordamos el enunciado del problema:

> *Proponé una cuenta de dividir que tenga como divisor el número 234 y como cociente el número 23. ¿Cuántas se pueden proponer?*

El problema resulta en general más sencillo que los anteriores, probablemente porque acá sí, el operar con los datos sin necesidad de atribuir valores, es una estrategia que conduce a una solución. La mayoría de los alumnos tiende a privilegiar la operación de multiplicar el divisor por el cociente, omitiendo sumar un resto que tendrían que definir ellos. Es por esto que –interpretamos- muchos alumnos dicen que el problema tiene una única solución, ya que, implícitamente, consideran el resto 0. Al respecto es significativo el comentario de Román, de la escuela Julio Cortázar: *"La única manera de saber cuál es el dividendo es multiplicando el divisor por el cociente, siempre me va a dar un número, en este caso te da 5382. La única manera de cambiarlo sería cambiar también el cociente o el divisor, pero no se puede".* Para Román el resto parece ser transparente. En ese mismo grupo, conciben luego la posibilidad de sumar 1 al 5382. Frente a esto, la maestra pregunta cuántas soluciones hay. Julio dice: *"Al número lo podés cambiar, pero la solución es una sola, porque es la misma cuenta".* Todo ocurre como si lo que determinara el dividendo fuera la multiplicación 23 x 234 y el sumar un resto fuera "accesorio".

En los distintos grupos la discusión se centra en si hay 1, 233 o 234 soluciones, y en todos los casos se llega, sin mucho conflicto a establecer que hay 234. La función central de este problema es la de homogeneizar la clase, ofreciendo la oportunidad de revisar las relaciones ya establecidas, fundamentalmente para los alumnos con más dificultades. Los resultados obtenidos no ofrecen elementos para suponer que este problema podría cumplir la función de generar buenas condiciones para invertir la direccionalidad en la lectura de la fórmula D = d x q + r, tal como habíamos anticipado en el análisis a priori. Pensamos que esto se debe fundamentalmente a la posibilidad que da el problema de operar con los datos y al hecho de que no se requiera de entrada atribuir valores para avanzar.

6. Problema 4

Recordamos que el problema fue propuesto con diferentes pares de números, con el objetivo de dar lugar a una discusión acerca de las condiciones para que haya una, varias o ninguna solución:

a) *Proponé una cuenta de dividir en la que el dividendo es 61 y el resto es 13. ¿Cuántas hay?*

b) *Proponé una cuenta de dividir en la que el dividendo es 64 y el resto es 23. ¿Cuántas hay?*

c) *Proponé una cuenta de dividir en la que el dividendo es 170 y el resto es 86. ¿Cuántas hay?*

6.1 Las estrategias desplegadas por los alumnos y las explicaciones propuestas para justificarlas.

Habíamos analizado a priori dos grandes tipos de procedimientos: los centrados en la diferencia entre dividendo y resto y aquellos basados en el tanteo de divisores mayores que el resto y menores que el dividendo dados. Los alumnos han utilizado mayoritariamente la primera estrategia. Sin embargo, las diferentes explicaciones que brindan para justificarla, nos muestran que los mismos "actos" pueden ser la manifestación de diferentes relaciones y niveles de conceptualización puestos en juego.

A través del <u>*ejemplo 1*</u> analizaremos un procedimiento basado en relaciones específicas de la división entera y en conocimientos sobre divisibilidad que aseguran "atrapar" todas las soluciones.

Nos ha interesado el trabajo de un grupo de niños –ese será nuestro <u>*ejemplo 2*</u>- que al explicar el procedimiento que utilizan se basan en la idea de "deshacer" las operaciones que componen el dividendo, dejando en un segundo plano los significados específicos de la división entera. Esta estrategia –favorecida por los datos que hemos elegido– nos permitió analizar la necesidad de retener significados del contexto para resolver adecuadamente el problema.

Aunque encuentren las cuentas requeridas, los alumnos que siguen atados a la idea de operar con los datos para resolver el problema, "necesitan" ayuda para justificar la estrategia utilizada y argumentar sobre la cantidad de soluciones. A través del ejemplo 3 veremos cómo ha sido fértil el recurso de una de las docentes que se apoyó en el análisis de la fórmula para lograr que estos alumnos avanzaran en la comprensión del procedimiento utilizado.

El hecho de que el caso a) admita varias soluciones, el caso b) una única y el c) ninguna, ha favorecido un análisis por parte de los alumnos, basado en significados relativos a la división entera y a conceptos de divisibilidad. Dicho análisis ha sido realizado casi siempre, luego de haber propuesto las cuentas correspondientes y ha favorecido la producción de argumentos de tipo general para concluir respecto de la cantidad de cuentas posibles. Desarrollamos los ejemplos a continuación.

Ejemplo 1. Los significados de la división entera como argumento para justificar el problema.

El hecho de poder concebir la diferencia entre el dividendo y el resto como el producto del divisor por el cociente, contribuye a que los alumnos puedan realizar un análisis de la cantidad de soluciones apoyado en la búsqueda de divisores de dicho producto. Esto los lleva a explicitar las condiciones para que haya soluciones enriqueciendo las relaciones que hacen sobre la división entera. Veamos por ejemplo, la explicación de Nicolás, de la Escuela 19.

Nicolás:	*Sí. En el primero restamos el* ***dividendo menos resto****, y eso dijimos que iba a ser* ***la multiplicación del cociente y el divisor****. Después buscamos formas, el resultado de esto nos dio 48, hicimos 48 y 1, nos dio la primera, 24 y 2, buscamos los divisores, algunos no nos daban, y el último que buscamos fue 16 y 3. Tienen que ser divisores de 48 más grandes que 13. Después en el problema 7 hicimos lo mismo, pero hay una sola posibilidad porque es un número primo, 41 y 1. Y en el último problema no nos dio ninguna posibilidad porque restando al dividendo el resto, nos iba a dar un número menor al resto. Nos daba 84, y todos los números que nos daba los verificamos y no nos daba bien.*

Notemos que el pedido de explicación favorece la producción de argumentos. Efectivamente, este alumno define una estrategia general que después "aplica" a cada uno de los casos dados, haciendo un análisis de los números particulares.

Ejemplo 2. Deshacer las operaciones: una estrategia "algebraica" que deja ocultos algunos significados relativos a la división entera.

Un alumno de la Escuela 19 poner en primer plano la idea de que desarmar las operaciones que se usan para componer el dividendo. Si bien se refiere a los elementos de la división entera, centrado en "hacer la inversa" pierde de vista que está tratando con números enteros que cumplen ciertas condiciones. Por otra parte, la estrategia de este alumno nos hace tomar conciencia sobre lo poco convenientes que resultan los números que nosotros elegimos.

Nacho:	*Lo tengo, lo tengo! Este (dividendo) menos éste (resto) dividido éste (señalando el lugar del cociente) y me va dar éste (señalando el lugar el divisor).*
Maestra:	*A ver. ¿Cómo dijiste Nacho?*
Nacho:	*El dividendo menos el resto dividido el cociente me va a dar el divisor*
Maestra:	*¿Y dónde está el cociente?*
Nacho:	***Hay que inventar uno cualquiera**. Decime (dirigiéndose a Cecilia) un número rápido.*
Cecilia:	*4*
Nacho:	*61 menos 13, ..48, dividido 4, ... 12. (Realiza con la calculadora 61 dividido 12). Me da 5 el entero.... éste tiene que quedar mayor que 13, tiene que ser todo arriba de 4.....Vamos a probar con 6. O sea que es 61 menos 13 dividido 6 .... 8. 61 dividido 8...., me da siempre un número más.....No, tiene que ser menor que 4.*
Cecilia:	*Hacelo con 3.*
....	
Maestra:	*¿Vos Nacho por qué hiciste 61 menos 13?*
Nacho:	*Porque yo pensé que se podía hacer a la inversa.*
Maestra:	*¿Inversa de qué?*
Nacho:	*Al revés, porque si antes nosotros teníamos que multiplicar el divisor por el cociente, sumarle el resto y nos iba a dar, yo al dividendo le resté el resto, porque antes se sumaba, y a éste lo dividí porque antes se lo multiplicaba, entonces yo hice todo al revés.*

Nacho hace una especie de "despeje" del divisor. El hecho de que le pida a Cecilia un número cualquiera, permite suponer que él no ha establecido que, para conservar su función en la cuenta, ese número debe ser un divisor de 48 (diferencia entre el dividendo y el resto dados). Empieza a marcarse una tendencia que se acentuará a través de todo el trabajo de Nacho, según la cual su centración en "desarmar" las operaciones, le hace perder de vista que 48 es el producto del cociente y del divisor y, por lo tanto, el producto de dos naturales. Pareciera que Nacho está invirtiendo un cálculo cualquiera, sin tener en cuenta que ese cálculo es una de las relaciones que caracterizan la división entera. Al ocuparse de deshacer las operaciones, omite de alguna manera considerar el significado de los pasos intermedios (Vergnaud, G. et. al.: 1987), significado que en este caso es necesario controlar para asignar a las variables valores adecuados. En algún sentido podríamos decir que para este problema no es fértil "dejar librado" al álgebra la resolución de este problema, ya que es necesario tener presente el contexto para controlar los valores que se asignan a las variables.

En varios momentos durante la interacción con sus compañeras, Nacho, apoyado en las propiedades de las operaciones en general, apela a *"hacer todo al revés"* para justificar su procedimiento. Cuando la maestra le pregunta cuáles son las soluciones dice:

Maestra:	*¿Cuáles son?*
Nacho:	*48 dividido 1, 48, acá es 48, y el cociente da 1, 48 y cociente 1. Después puedo hacer 48 dividido 2, me da 24, siempre mayor que 13. si hago 48 dividido 3 me da 16, que también es mayor que 13, si yo hago 48 dividido 4 me da 12 y es menor que 13 entonces está mal. Hay 3 posibilidades nomás.*

Observemos que la necesidad de concluir acerca de la cantidad de cuentas posibles, lleva a Nacho a realizar un razonamiento general. Aunque él no lo expresa exactamente en estos términos, su razonamiento parece ser: "si al dividirlo por 4, da un número menor que 13, al dividirlo por un número mayor, seguirá dando menor que 13 y, por lo tanto no se cumple la condición de que el divisor debe ser mayor que el resto". Por otro lado, el hecho de que la diferencia entre el dividendo y el resto tenga, en este caso, a 2, 3, y 4 como divisores, no favorece que Nacho identifique la necesidad de dividir a 48 por números que sean divisores de éste.

Veamos ahora el pasaje en el que este alumno parece haber perdido de vista la función que el número por el cual divide, tiene en la cuenta de dividir que busca:

Nacho:	*Y eso lo dividí, primero le pregunté un número a Ceci y dijo 4, y de casualidad me dio 12, y después hice 61..dividido 12*
Maestra:	*Ese número por el que dividís el 48, ¿es algo de la división?*
Nacho:	*No, yo lo dividí porque antes había que multiplicarlo para sacar el dividendo y yo pensé que para sacar el divisor lo tenía que hacer todo al revés*
Maestra:	*Pero ese número por el que dividís, por 3, por 2, es algo en la cuenta de dividir que vas a formar o no tiene nada que ver?*
Nacho:	*No tiene nada que ver.*

Si bien en un comienzo Nacho nombra el cociente, ahora cuando se refiere a la "inversión" que realizó dice "yo al **dividendo** le resté el **resto**, porque antes se sumaba, y a **éste** lo dividí porque antes se lo multiplicaba." Las palabras "éste" y "lo dividí", sin explicitar la función del número por el cual divide, parecen consistentes con esta interpretación, además por supuesto de la explicitación que él hace cuando dice que esos números "no tienen nada que ver con la cuenta".

En la puesta en común se hace más claro que Nacho no estaba considerando los números por los que dividía a 48, entre el conjunto de sus divisores sino entre los naturales. Luego de diferentes intervenciones, tanto de otros compañeros como de la maestra, Nacho repara en la necesidad de restringirse a los divisores de 48:

Maestra:	*A ver, ¿cuáles son todos los divisores de 48?*
Laura:	*Seño no hay más soluciones. Si hay más divisores. Para mi no hay más soluciones una porque los números tienen que ser divisores de 48 y porque el divisor siempre tiene que ser mayor que 13 y ahí buscamos los mayores de 13 y encontramos el 24, el 48 y el 16, los demás son todos menores.*
Maestra:	*¿Esto siempre tiene que ser un divisor de 48?*
Laura:	*Si. El divisor tiene que ser mayor que el resto.*
Maestra:	*Pero, yo le preguntaba a Nacho si estaba seguro de que las únicas posibilidades eran estas 3, que sí se puede, y estas que no se puede por el problema que decía que el resto es mayor que el divisor. Sólo estas posibilidades, ustedes están seguros que son solamente esas 3 posibilidades? 3 que sí y una que no.*
Nacho:	*No, son varias que no.*
Maestra:	*¿Cuáles son las varias que no?*
Nacho:	*Son todas las mayores que 4, infinitas son las que no, porque de 4 para arriba ninguna es.*
Maestra:	*Vamos a empezar de nuevo. De las que tenés acá (por los divisores de 48), ¿cuáles no podrían ser?*
Nacho:	*12, 6, 8, 2, 3, 1 y 4 (Nacho explicita los divisores de 48 que no pueden ser divisores de la división) porque son todos menores que 13 y se les pueden seguir agregando números*
Maestra:	*Entonces todas estas posibilidades no las tenemos y las otras tres sí. ¿Hay otras posibilidades además de estas tres que sí y todas estas que no?*
Nacho:	*Ahh....(con tono de clic) Entonces si dividimos por 48 nos tiene que dar resto 0, entonces al sumarle 13 si nos da resto 13 tienen que ser los*

divisores, no se puede pasar porque sería decimal si no pongo divisor de 48.

Como hemos señalado, Nacho selecciona únicamente la condición de que el resultado de dividir 48 por el número elegido, sea mayor que 13 y no tiene en cuenta que debe ser divisor de 48. Lamentablemente, como los datos del problema hacen coincidir las dos condiciones, no hay muchos elementos para hacerlo revisar su punto de vista. Nacho y la maestra se refieren a conjuntos diferentes (Nacho piensa en todos los números y la maestra en los divisores de 48) y durante un tiempo de la interacción esto produce un malentendido. Sin embargo, la "insistencia" de la maestra en referirse a los divisores de 48 –que en realidad creemos que no es intencional porque ella no parece haber detectado el malentendido- y probablemente la explicación de Laura, hacen posible que Nacho acceda a considerar los "candidatos" a divisor de la operación, entre los divisores de 48. Observemos que la última explicación de Nacho, mejora la explicación que él había dado cuando decía que "hay que invertir". Pareciera que ahora está más cerca de considerar que el 48 es el producto de divisor por cociente y esta consideración le ayuda a producir un argumento en términos del significado de la división entera.

Pensamos que la consideración de que la diferencia entre el dividendo y el resto representa el producto del cociente por el divisor, supone una nueva lectura de la fórmula euclidiana que aporta otro punto de vista y, por lo tanto, contribuye al proceso de objetivación de la operación de división entera al que apunta esta secuencia.

<u>Ejemplo 3</u>. *La necesidad de las intervenciones docentes para hacer avanzar el proyecto aritmético de operar con los datos.*

Muchos de los alumnos que arrancan en la secuencia desde un proyecto claramente aritmético y a lo largo de la misma comienzan a usar relaciones más generales, "van y vienen" entre una perspectiva más general y fundamentada y un posicionamiento más empírico del tipo "pruebo a ver qué pasa". Para este problema muchos de esos alumnos hacen la diferencia entre dividendo y resto pero no pueden decir "por qué" la hacen ni cuál es el significado de esa diferencia. Atribuyen el resultado de la resta al divisor, hacen la cuenta y ven que funciona. En esos casos se hace necesaria la intervención docente para "devolver" la necesidad de anticipar y fundamentar y para favorecer un avance hacia el análisis de la cantidad de soluciones a partir de considerar el productc divisor x cociente.

Hemos recortado un tramo de la puesta en común de la Escuela 19, en el que la docente. frente a alumnos que dicen haber hecho la diferencia entre el dividendo y el resto *"para probar"*, interviene en dos niveles: uno más transversal y a nivel de las normas, que comunica justamente la posibilidad de anticipar por qué una cierta relación puede funcionar y otro a nivel del objeto división entera, analizando con los alumnos las razones por las cuales realizar esa diferencia "funciona" como una estrategia adecuada. Para esto último utiliza como "soporte" la escritura de la fórmula. Veamos:

Constanza:	*A 61 le restamos 13 para que cuando lo dividiéramos nos diera de cociente 1 y de resto 13.*
Maestra:	*A ver, a 61 le restaron 13 y obtuvieron 48,* ***¿para qué?***
Constanza:	*Para el divisor.*
Maestra:	*Para que 48 fuese el divisor.*
Constanza:	*Sí.*
Maestra:	***¿Pero por qué a 61 le restaron 13 y no hicieron otra cosa?***
Constanza:	***Porque se nos ocurrió primero, porque estamos tanteando***
Maestra:	***¿Por qué?***
Constanza:	*Porque se lo restamos para que cuando....*
Maestra:	*Yo quiero saber si de casualidad restaron o si cuando restaron pensaron en algo, eso es lo que quiero que me contesten.* ***Cuando restaron, restaron por que sí o pensaron en algo más o simplemente salió***
Constanza:	***Es difícil.***
Maestra:	***Es difícil recordar eso.***
Maestra:	*¿Y no pensaron en ningún momento en hacer otra operación que no fuera resta?*
Constanza:	*No.*
Maestra:	*Solamente resta.*
Constanza:	*para ver si nos daba.*
Maestra:	***Pero no estaban seguros si esto iba a funcionar. A ver si mirás acá*** *(por la escritura de la fórmula),* ***a ver si esto te ayuda.***
Constanza:	*Ahhhh!*
Maestra:	*A ver, Constanza.*
Constanza:	*¿Qué es esa "d" que está en minúscula y la otra en mayúscula.*
Maestra:	*divisor x cociente + resto = dividendo.*
Constanza:	*Que al dividendo le restemos el cociente, le restemos el 13 para que nos de...*
Alumno:	*Dale decí!*
Constanza:	*La multiplicación*

La docente insiste con la necesidad de anticipar, de saber porqué se hacen ciertas operaciones y pregunta explícitamente en qué pensaron los alumnos cuando hicieron la resta, comunicando implícitamente que hay que pensar en las razones cuando se encara un procedimiento. El reconocimiento de que *"es difícil acordarse de eso"*, es una manera de contribuir a la toma de conciencia del acto de anticipar. Aunque esto no puede tener un efecto inmediato --por lo menos no puede reconocerse a través de la observación-, de alguna manera va instalando un modo de enfocar el trabajo.

Apoyarse en la escritura de la fórmula para justificar el procedimiento de restar, es por una parte un recurso fértil para la docente que contribuye a hacer observables las relaciones sobre división entera que quiere que se establezcan y por otra parte un modo de instalar la escritura como soporte de relaciones.

6.2 Conclusiones del problema 4

El problema introduce un aspecto nuevo: el dominio de variación de las variables (cociente y divisor) es un conjunto finito y de una caracterización más compleja que en los problemas anteriores, dado que hay que buscar entre los divisores de la diferencia entre el dividendo y el resto. Este aspecto podría no ponerse en primer plano si la tarea sólo consistiera en producir las cuentas, pero la necesidad de concluir sobre la cantidad de soluciones, fuerza a mover relaciones específicas de la división entera que llevan a tomar conciencia de que las variables se eligen en el mencionado conjunto. Por otro lado, se hace necesaria la puesta en juego de alguna técnica para buscar todos los divisores posibles de un número.

La pregunta sobre la cantidad de soluciones favorece por un lado la identificación de relaciones específicas de la división entera -el producto del cociente por el divisor es igual a la diferencia entre el dividendo y el resto- y, por otro lado, plantea la exigencia de considerar condiciones sobre los datos del problema, cuestión esta última, nueva en esta secuencia.

Algunos de los alumnos que se centran en procedimientos de tipo "desarmar operaciones" no consideran el significado específico de los números en el contexto de la división entera. Esto los lleva a tomar las variables en el conjunto de "todos los números" y a tener en cuenta solamente la condición de que el divisor sea mayor que el resto. Este modo de proceder nos hizo tomar conciencia de que el problema no tolera un camino algebraico que se independice del contexto. Lamentablemente para el caso a) el hecho de que "los divisores de 48 que al dividir a 48 dan un resultado mayor que 13" sea el mismo conjunto que "los números naturales que al dividir a 48 dan un resultado mayor que 13", dificultó la toma de conciencia sobre la necesidad de restringir el dominio de las variables.

Para los alumnos que persisten en estrategias exploratorias con bajo nivel de anticipación, algunas intervenciones docentes sobre el plano normativo pueden operar sobre las conceptualizaciones sobre la división entera. La escritura de la fórmula se muestra como un soporte interesante para comprender porqué es necesario restar el resto del dividendo y cuál es el significado de esa diferencia.

7. Los alumnos analizan los problemas en conjunto

Aunque inicialmente habíamos previsto en la secuencia un análisis de todos los problemas, una vez realizados, este trabajo solamente pudo llevarse a cabo en la experiencia del año 1999 de la Escuela Despertar. Se les planteó a los alumnos que escribieran qué habían aprendido a través del conjunto de la secuencia y que establecieran semejanzas y diferencias entre los diferentes problemas.

La gran mayoría de los alumnos –aún los que más dificultades tuvieron- se refirieron a los problemas de manera general, usando los nombres de los elementos de la división. Muchos alumnos expresaron procedimientos y cantidad de soluciones, en función de los datos, tomados de manera genérica. Veamos, a modo de ejemplo, parte de las anotaciones de Silvina:

1. Siempre el resto tiene que ser menor que el divisor
2. ? x D + R = d→ Esto se hace en caso de que sólo te den un divisor y un resto.
3. Cuando te dan un cociente y un resto hay que tomarse la precaución con el divisor:

$$C \times \underset{\substack{\downarrow \\ d}}{?} + R = d$$

Siempre hay que acordarse de que el d tiene que ser un número mayor que el R

$$(28 \times \underset{\substack{\downarrow \\ D}}{5} + \underset{\substack{\downarrow \\ R}}{2})$$

D > R

Observemos que esta alumna distingue en su escritura, los "datos" (parámetros, para los que usa letras mayúsculas), la variable "independiente" (usa para ello un signo de interrogación) y la variable "dependiente" (usa letra minúscula). Notemos que la actividad ofrece la posibilidad de tomar como objeto de reflexión el conjunto de la secuencia y sintetizarla en términos de un tipo de problema en el que se fueron cambiando datos y variables. El "medio" con el que interactúa el alumno para este análisis es el conjunto de las relaciones producidas a través de los diferentes problemas particulares y, en la medida en que la tarea "fuerza" a realizar comparaciones, se promueve una mayor objetivación de las relaciones euclideanas.

8. Una mirada sobre las intervenciones docentes "a lo largo" de la secuencia.

Para dar una idea de los conocimientos en juego desde la perspectiva del docente, haremos un recorrido de algunas de las intervenciones de la maestra de la Escuela 19, a lo largo de toda la secuencia. Esto nos permitirá comprender que para que los conocimientos que identificamos en el análisis a priori de esta secuencia puedan vivir, deben entramarse con otros conocimientos, muchos de ellos apuntan a la construcción de criterios de validez, que dependen de aquello que los alumnos ponen efectivamente en juego y que por eso no podrían identificarse a priori. Estos conocimientos que se despliegan a partir de intervenciones de la docente a propósito de las producciones de los alumnos, constituyen una especie de combustible necesario para que los alumnos puedan evolucionar en el sentido delineado en nuestro proyecto. Veamos.

a) Un problema que la docente plantea desde el inicio y que sostiene a lo largo de toda la secuencia es el de **considerar una cuenta de dividir como objeto de análisis para anticipar los elementos de otra cuenta.** De este modo la maestra va promoviendo que se expliciten diferentes relaciones sobre la división entera y al mismo tiempo va enseñando que dichas relaciones pueden ser un punto de apoyo para justificar los procedimientos para obtener cuentas y para sustentar los argumentos sobre la cantidad de soluciones. Para el problema 0 por ejemplo –el divisor, el cociente y el resto son los datos-, muchos alumnos argumentan que hay una única cuenta *"porque si cambiás el dividendo cambia algo"*. Esta frase puede estar sostenida en diferentes relaciones y analizar las variaciones de unos elementos en función de la variación de otros para una cuenta particular, ha sido un modo de profundizar el alcance de dichas relaciones y de ajustar la justificación de la unicidad.

b) Durante toda la secuencia la docente propone usar la relación Dividendo = divisor x cociente + resto, como medio de justificación tanto para los procedimientos que se ponen en juego para proponer cuentas como para argumentar sobre la cantidad de soluciones. Damos a continuación dos ejemplos de intervenciones docentes: en el primero la maestra interactúa con una alumna que no sabe cómo justificar la unicidad y en el segundo hemos tomado extractos de una puesta en común en la que la maestra insiste en la posibilidad de anticipar el sentido de los procedimientos.

Ejemplo 1 .El siguiente extracto muestra cómo, a propósito del problema 0, la maestra apunta a que una alumna encuentre en la relación que usa, elementos para justificar la unicidad:

Florencia:	*¿Tenemos que explicar cómo hicimos? Por ejemplo yo puse que para saber cuál es el dividendo tenés que multiplicar el divisor por el cociente y sumarle el resto. ¿Qué más tengo que responder?*
Maestra:	***¿Y eso quiere decir que hay una sola?***
Florencia:	*Y sí, porque yo no puedo cambiarlos. Si cambiás....*
Maestra:	*Bueno, entonces decí porqué solo hay una en este caso*
Florencia:	*Ahh....*

Ejemplo 2. A propósito del problema 4, (los datos son dividendo y resto) muchos alumnos plantean que hicieron la diferencia entre el dividendo y el resto pero no la pueden justificar y dicen que probaron con las distintas operaciones hasta llegar a hacer la resta. Frente a la intervención de cada uno de estos alumnos la maestra intenta comunicar que esa resta es la consecuencia de alguna relación que se puede establecer de antemano. Para ello en algunos casos se basa en la escritura de la fórmula:

Maestra:	***¿Cuando restaron, restaron porque sí o pensaron en algo más?***
Alumna 1:	*Sí restamos para que cuando lo dividiéramos nos diera de cociente 1, entonces se lo restamos y nos dio de resto 13.*
Maestra:	*¿En ningún momento pensaron en hacer otra operación que no fuera resta?*
Alumna 1:	*No*
Maestra:	*Solamente resta*
Alumna 1:	*Para ver si nos daba*
Maestra:	***Pero no estaban seguros si esto iba a funcionar***
....	
Maestra:	*Es decir, se puede probar con suma, resta, multiplicación y división*
Alumno 2:	*No*
Maestra:	*¿Por qué no?*
Alumno 2:	*Porque hay que hacerlo a la inversa*
Maestra:	*¿A la inversa de qué?*
Alumno 2:	*De ahí, porque si ahí estás sumando...*
Maestra:	*Pero vos antes dijiste que probaste con la división, no sabés por qué*
Alumno 2:	*No, en todos los problemas hice eso*
Maestra:	*Siempre estás probando*
Alumno 2:	*Claro*
Maestra:	***Bien. Ahora mirá lo que está escrito acá y decime si realmente en necesario probar con todas las operaciones o ya podemos saber qué camino tomar***
....	
Maestra:	***¿Es necesario hacer todas estas pruebas o ya el camino lo tengo prácticamente marcado?***

Al preguntar a los alumnos si anticiparon porqué hacían determinado procedimiento y al mostrar en qué sentido la relación euclidiana puede funcionar como apoyo para comprender el significado de la estrategia desplegada, la docente apunta a instalar un proyecto en el están presentes las razones por las cuales se hace una u otra opción.

c) Numerosas intervenciones apuntan a **que los alumnos conciban procedimientos generales**. A medida que los niños van explicitando sus estrategias con respecto a los diferentes problemas, la docente pregunta de manera sistemática, **qué función cumplen los números que usan en la cuenta de dividir** que proponen y pide que expliciten el procedimiento en términos de los elementos de la división. Esto favorece que se piensen los números con los que se opera como ejemplos de una estrategia más general. A su vez, la maestra va comunicando que el análisis de los procedimientos generales permite conocer la cantidad de soluciones. Esto es especialmente interesante para los alumnos más empíricos que cuando se les pregunta cómo saben si hay o no más soluciones suelen responder: *"no sabemos, no probamos"*, *"estamos viendo"*, etc.

d) Frente a los dos procedimientos que surgen para el problema 1 (los datos son divisor 32 y resto 27 y las dos estrategias básicas consisten en partir del dividendo o partir del cociente) la docente plantea un problema específico que apunta a que se "vea" que **ambas estrategias conducen a las mismas soluciones**. Ella comienza escribiendo la cuenta con cociente 1 y pregunta cuál es el "próximo" dividendo para obtener resto 27. Aunque el problema no puede instalarse –a nuestro juicio porque la docente no da suficiente tiempo para que los alumnos lo piensen- la intervención nos hace tomar conciencia de la necesidad de problematizar la equivalencia de procedimientos.

e) Al finalizar cada uno de los problemas de la secuencia, la docente propone **comparaciones con los problemas ya realizados**. Esto apunta a que comience a concebirse que todos los problemas se estructuran alrededor de las condiciones *Dividendo = divisor x cociente + resto, 0 ≤ resto < divisor*. Este marco de comparaciones entre los diferentes problemas da lugar a que se analice el dominio de validez de las variables en cada caso y en particular que se discuta la relación entre resto y divisor. Veamos un tramo de la puesta en común en la que se comparan los problemas 1 y 2:

Maestra:	*¿Cuál es la diferencia entre el problema1 y el problema 2? Puedo poner acá (por el problema 2) 1, 2, 3, como divisor?*
Gabriel:	*No*
Maestra:	*¿Por qué no?* ***¿Cuál es la restricción que tengo acá y no tengo allá?*** *Eli*
Eli:	*Allá tenés el divisor y acá no*
Maestra:	***Esa no es la restricción. Estamos hablando de los tipos de números que se pueden colocar*** *para solucionar el problema 1 y los que se pueden colocar para el problema 2. Vuelvo a hacer la pregunta. En el problema 1, ¿se puede poner cualquier cociente?*

Emiliano	*Sí*
Maestra:	*En el problema 2, ¿se puede poner cualquier divisor?*
Emiliano:	*Tiene que ser mayor que 27*
Alumno:	*Tiene que ser mayor que 27 porque sino el resto es mayor que el divisor*
Maestra:	*Bien,* ***entonces, ¿cuál es la restricción?*** *Francisco*
Francisco:	*El divisor tiene que ser mayor que el resto que nos dieron.*

Notemos cómo la discusión va dotando de sentido a una palabra nueva: "restricción". Por otro lado, desde que se trata explícitamente la restricción sobre el resto, la maestra sostiene la discusión sobre esta cuestión para los problemas que siguen. Por ejemplo, en la puesta en común del problema 4 (los datos son 61 para el dividendo y 13 para el resto), un alumno dice que *"está bien porque hice 16 x 3 + 13 y 24 x 2 + 13 y me dio 61"*, a lo cual la maestra responde *"pero 4 x 12 + 13 también es 61, ¿porqué ésta no sirve?"*; de esta manera exige que se sigan explicitando las cuestiones nuevas que se van identificando.

f) La cuestión de la **evocación del contexto de reparto** como referencia para pensar estos problemas nos suscita dos reflexiones.

En primer lugar, esta referencia no es tomada de manera inmediata por los alumnos para pensar los problemas. Interpretamos que considerar un contexto de utilización particular de una operación para pensar sobre esa operación de manera descontextualizada, no forma parte de las prácticas de los alumnos y requiere un tiempo para instalarse. Además, en muchos casos el hecho de considerar el algoritmo de la división como un mecanismo cuya fundamentación se desconoce, hace más difícil entender en qué sentido pensar en el reparto sirve para resolver los problemas planteados. Por ejemplo, para el problema 0 (los datos son divisor, cociente y resto) cuando la docente trabaja con un grupo de niños flojos y evoca una situación de reparto (*"Piensen que tengo una cantidad de caramelos que reparto entre 34 personas, le tocan 18 a cada uno y sobran 21, ¿cuántos caramelos había?"*) los niños calculan correctamente 34 x 18 + 12, pero no lo relacionan con el problema que se les propuso. Según los niños la maestra se refiere a un problema de "multiplicación y suma" y aparentemente no tiene nada que ver con hallar una cuenta de dividir. Es necesario que la docente explicite entonces las relaciones entre ambas situaciones y, sobre todo, que sostenga bastante tiempo estas referencias para que los alumnos las consideren de manera productiva.

En segundo lugar, en algunas ocasiones una vez instalada la evocación al contexto de reparto, ésta "invade" el problema que se está tratando y se pierden de vista las relaciones que se espera identificar. Veamos un trozo de la puesta en común en la que se discute sobre el problema 2 (los datos son cociente 43 y resto 27):

Maestra:	*¿Qué cuenta propusieron?*

Constanza:	*primero hicimos 43 menos 27 y nos dio 16, después hicimos 16 por 43 más 27 y nos dio 715. Pero después nos dimos cuenta de que no podía ser 16 porque si el resto daba 27 tenía que ser mayor.*
Maestra:	*¿Por qué tenía que ser más grande?*
Constanza:	*Porque si te da 27 de resto, porque si dividís por 16 no te va a dar 27 de resto.* ***Porque yo lo puedo seguir poniendo más gente, y a parte porque es mayor el resto que el divisor. Entonces después hicimos a 27 le sumamos 1 y pusimos 28***
Maestra:	*¿Por qué eligieron 28?*
Constanza:	*Después hicimos 28 por 43 más 27 y nos dio 1231 y nos dio 43*
Maestra:	*¿Por qué pensaron que tiene que ser 28 y no menos de 28?*
Constanza:	*porque si es menos de 28 va a pasar lo mismo que con la primera cuenta que está mal*
Maestra:	***les van a sobrar más alfajores y van a poder seguir repartiendo****. Va a estar mal.*

Para una alumna floja como Constanza, que sigue operando con los datos –observemos que el 28 lo "obtiene"como 27 + 1-, el contexto sigue siendo algo "aparte" de la cuenta y pensamos que la "mezcla" en el discurso de la docente entre los elementos de la operación y los objetos concretos del reparto no contribuye a una utilización productiva del contexto. Tal vez habría que pensar en separar más claramente el contexto de reparto de la operación descontextualizada y establecer relaciones entre dos "espacios" más claramente delimitados.

8. Conclusiones del análisis a posteriori

El análisis realizado nos permite extraer conclusiones de dos tipos: las que se vinculan directamente con la problemática que estudiamos y las que nos llevan a una reflexión sobre la Teoría de Situaciones, el marco principal desde el cual concebimos este trabajo.

8.1. Explorar la fertilidad de esta secuencia en tanto medio en interacción con el cual los alumnos producen, transforman y validan conocimientos sobre división entera, estudiar las rupturas que los niños deben enfrentar con respecto a las prácticas aritméticas y analizar aspectos de la racionalidad matemática que se ponen en juego, han sido los objetivos que nos hemos planteado a través de este estudio. Nuestras conclusiones se referirán entonces –es ineludible- a estas cuestiones.

8.2. El análisis de las clases nos permitió recortar algunos tipos de intervenciones docentes que tienen, desde nuestro punto de vista, un interés didáctico que trasciende el marco específico de esta secuencia y que pueden aportar elementos para repensar nuestra visión de lo didáctico y lo a-didáctico en el marco de la Teoría de Situaciones. Incluimos nuestras conclusiones al respecto.

8.1Acerca de las conceptualizaciones sobre la división entera, la relación aritmética-álgebra y la racionalidad puesta en juego

Recordemos que en nuestro análisis a priori habíamos identificado diferentes estatutos posibles para las condiciones Dividendo = divisor x cociente + resto, 0 ≤ resto< divisor. Los mismos son:

- un algoritmo para verificar el resultado de una cuenta ya realizada, con o sin justificación del mismo,
- un algoritmo para obtener operaciones, sin llegar a ser suficiente para anticipar el resultado de dichas operaciones
- un medio para obtener operaciones y para anticipar el resultado de las mismas
- un "soporte" que contiene diversas informaciones relativas a la división entera e información acerca de la cantidad de soluciones de los problemas tratados
- la caracterización de la división entera

El análisis de las producciones efectivas de los alumnos, nos hace tomar conciencia de **la complejidad que supone pasar de usar la fórmula solamente para verificar una cuenta a concebirla como medio para producirla**. Esto se hace observable para nosotras a partir de constatar que los alumnos no pueden "aprovechar" el resultado de la verificación para modificar una cuenta que ellos mismos propusieron y que no cumple las condiciones requeridas. Al tratar de explicarnos esa resistencia, nos dimos cuenta de que en el acto de verificar, la fórmula se aplica a cuatro números ya establecidos y no se concibe la modificación de alguno de ellos para "adaptarlo" a las condiciones de la cuenta que se busca.

Concebir un cambio en la finalidad que se le atribuye a la relación, involucra aceptar una transformación en la naturaleza de los elementos con los que se opera ya que estos últimos pasan de ser cuatro números fijos a ser una combinación de constantes y variables. Vemos entonces que la movilización implícita de la noción de variable, juega un papel específico en el cambio de estatuto de la relación *Dividendo = divisor x cociente + resto.*

Por otro lado, la estanqueidad observada en algunos alumnos, entre el hecho de proponer una cuenta y el de verificarla, nos advierte sobre la separación tajante que hacen estos niños entre resolución del problema y validación del mismo. Esta separación pone de manifiesto dos cuestiones: 1) el modo de encontrar la cuenta a través de la fórmula no les permite anticipar la verificación de la operación a través de la fórmula y 2) la verificación que hacen no supone la comprensión de las relaciones que ligan los elementos de la división entera, de lo contrario estarían en mejores condiciones de usar el resultado de la verificación para modificar la cuenta que proponen.

Concluimos entonces que **la falta de articulación entre resolución y verificación, es la expresión de una lógica experimental** en la cual no están en juego ni las razones del procedimiento que se utiliza ni el poder anticipatorio que el mismo tendría.

Muchos alumnos, sobre todo al inicio de la secuencia, se centran en cada cuenta particular que buscan sin atribuir a los procedimientos que utilizan un **nivel de generalidad** que vaya más allá de la cuestión puntual que están pensando en ese momento. Al constatar esto nos hemos preguntado sobre el **nivel de fundamentación** del que dispondrían estos niños, respecto de la relación *dividendo = divisor x cociente + resto*. Se abre entonces una problemática a indagar, cuyas preguntas orientadoras podrían formularse de la siguiente manera: ¿cómo juega en la elaboración de la noción de "procedimiento general" la inclusión de algún nivel de fundamentación de los procedimientos que se utilizan?, ¿qué consecuencias tiene (qué obstáculos provocaría) el proponer actividades de generalización que no contemplan para nada la cuestión de la fundamentación?[16].

Movilizar la noción de variable requiere que los alumnos puedan **atribuir valores pertenecientes a un cierto dominio.** Se trata de una nueva práctica que provoca una **ruptura de contrato didáctico,** ruptura que pone de manifiesto una "creencia" arraigada en muchos alumnos: "todos los elementos que forman la respuesta a un problema, se obtienen operando con los datos dados". La resistencia a atribuir un valor es menor, cuando ese valor no tiene una función definida en el problema que se está abordando y puede ser considerado un punto de arranque que se modificará a lo largo del problema.

Aquellos alumnos que no movilizan la noción de variable, proponen diferentes estrategias de tanteo para arribar a las cuentas solicitadas. Estas estrategias más "artesanales" dificultan la posibilidad de tomara conciencia de que todas las cuentas posibles se podrían obtener aplicando un mismo procedimiento. Esto a su vez no les permite anticipar la cantidad de soluciones del problema. Al exigir a los alumnos que expliciten cómo podrían obtenerse diferentes soluciones, se pone en juego la noción de "**procedimiento generador de soluciones**", la elaboración de esta noción se ve favorecida por la interacción con problemas cuya solución general puede representarse a través de una fórmula en la que intervienen variables.

La pregunta por la cantidad de soluciones resulta relevante a lo largo de toda la secuencia y cumple distintas funciones. Es una pregunta que introduce un problema nuevo para los alumnos, diferente del de producir cuentas y que justamente sólo puede ser planteado una vez que los alumnos produjeron varias soluciones ya que ellos deben aprender a buscar argumentos al respecto, analizando los procedimientos utilizados.

A través de las producciones de los alumnos se hace evidente que ellos pueden resolver un problema sin cuestionarse si el mismo tiene o no más soluciones; pueden incluso producir varias soluciones sin reflexionar sin son todas las soluciones posibles. En un primer momento "agotar

[16] Por ejemplo las actividades de formulación de una ley a través del análisis de algunos ejemplos que se muestran sin explicitar cómo se constituyen. Nos hemos referido a estas cuestiones en las que se promueve una generalización inductiva en el capítulo 3, punto 4.2.

todas las soluciones" es para los alumnos del orden de lo normativo y es necesario un trabajo didáctico que les permita transformar la norma en acto.

En el problema 0, la pregunta por la cantidad de soluciones lleva a los alumnos a movilizar relaciones sobre la división entera, que serán reutilizadas en los problemas siguientes; en los problemas 1 y 2, mueve a los alumnos a concebir un procedimiento común a todas las soluciones posibles, noción que –acabamos de señalarlo- es uno de los "asuntos" que los alumnos tienen oportunidad de elaborar en esta secuencia; en el problema 4, favorece que los niños se centren en el dominio de las variables en juego. En todos los casos esta pregunta:

- pone al problema que se aborda en un plano reflexivo respecto de la acción,
- lleva a los alumnos a producir argumentos en los que las relaciones vinculadas a la división entera son un medio para convencer y estar seguro,
- da lugar a alcanzar un mayor nivel de generalidad que el producir soluciones particulares,
- permite incorporar la pregunta por la exhaustividad del procedimiento aplicado.

Construir la noción de procedimiento generador de soluciones, incluir la validación como parte del proceso de resolución y concebir las condiciones *Dividendo = divisor x cociente + resto, 0 ≤ resto< divisor* como características de la división entera, son procesos que aparecen imbricados con la elaboración de la noción de variable.

La discusión sobre diferentes estrategias, pone de manifiesto que muchos alumnos pueden considerar que dos procedimientos son correctos sin que ello implique establecer que se obtienen las mismas soluciones por uno y por otro. Las interacciones en la clase han mostrado que, en general, **la pregunta por la igualdad de los conjuntos solución, no está en el campo de preguntas posibles para los alumnos** y requiere, entonces, de una intervención específica del docente que instale la cuestión para luego discutirla.

Los distintos problemas de la secuencia se muestran fértiles para dar lugar a exploraciones por parte de los alumnos. **La lectura que los niños hacen del resultado de sus exploraciones está en función de las anticipaciones que hayan podido hacer**. Es así como puede ocurrir que un mismo alumno en un caso oriente su trabajo hacia la solución como resultado de una exploración y en otro caso, siga tanteando sin que pueda inferirse que lo hace teniendo en cuenta aquello que acaba de realizar.

Los alumnos que se posicionan en un **proyecto completamente empírico** y que tienen un muy **bajo nivel de anticipación**, funcionan en una **lógica del "todo o nada"** según la cual no pueden concebir una cuenta como intermediaria hacia otra que cumpla las condiciones requeridas, no buscan razones por las cuales no obtienen los resultados esperados. El docente debe en estos casos no sólo devolver el problema sino devolver un proyecto de búsqueda de razones que incluya explicaciones basadas en los conocimientos que se están tratando. Para estos niños, **la noción misma de explicación es un asunto que está en juego en la secuencia** dado que aparece como un elemento necesario para avanzar en la resolución de algunos problemas. En este sentido, la interacción con la secuencia modifica en algunos casos qué es aquello que los alumnos consideran como explicación satisfactoria. Para este trabajo alrededor de la idea de explicación han resultado fértiles las apelaciones sistemáticas del docente a que los niños se respondan "por qué" no obtienen los resultados esperados.

Habíamos previsto a priori una **representación "cuenta" y una representación "fórmula"**. En general los alumnos usan las condiciones *Dividendo = divisor x cociente + resto, 0 ≤ resto< divisor,* pero no las escriben. **La pregnancia que tiene la representación cuenta, vinculada a las prácticas aritméticas, no da mucho espacio a la escritura de la fórmula.**

La representación cuenta evoca, en general, el algoritmo de la división sin que necesariamente comprometa el significado de los términos de la división. Hemos observado que **algunos alumnos comienzan usando la representación "cuenta" en tanto algoritmo pero que, al incorporar las preguntas del problema que están resolviendo transforman el significado que le atribuyen a esta representación y entonces la misma puede empezar a concebirse como un soporte de las relaciones entre los elementos de la división entera.**

Muchos alumnos representan el problema a través de una ecuación. Al resolverla pierden de vista los significados específicos de la división entera para poner en juego aquellos vinculados al despeje de la incógnita y que se apoyan en propiedades de las operaciones aritméticas en general. Esta pérdida del significado específico conlleva en algunos casos una pérdida en el control del dominio de variación de las variables. Surge entonces como requerimiento del problema la necesidad de despejar la incógnita conservando el significado del contexto.

8.2 Acerca de las intervenciones del docente, lo didáctico y lo a-didáctico

Al pensar la implementación de la secuencia, hemos propuesto que los problemas se resolvieran en los pequeños grupos de alumnos, en un tipo de interacción que concebimos como a-didáctica. Tal cual hemos explicitado en nuestro marco didáctico general, esto exige de todos modos intervenciones del docente. En el caso de esta secuencia recortamos intervenciones en dos planos que nos interesa reseñar.

En primer lugar, **a nivel del conocimiento** el docente:

- plantea, a partir de las producciones de los alumnos, una nueva tarea que rompe con las prácticas usuales (por ejemplo, cuando pide que anticipen los efectos de la variación de un término de la división sobre otro, sin hacer la cuenta),
- formula una pregunta cuya respuesta requiere de una relación matemática que el alumno ha usado implícitamente en una acción o una afirmación,
- formula una pregunta a partir de un error cometido por un alumno,
- realiza una intervención dirigida a un alumno que viene trabajando en un problema, que ha producido relaciones pero que se encuentra bloqueado.

En segundo lugar, las intervenciones que intentan comunicar un modo de abordar, en el caso de una problemática que supone rupturas importantes con respecto a las prácticas que los alumnos vienen desplegando, son imprescindibles para que los estudiantes entren en el nuevo juego que se les propone. Estas intervenciones no pueden considerarse como producto de la insuficiencia del medio ya que corresponden a un plano metamatemático o metacognitivo, en el cual el medio no ofrece retroacciones. Se trata de intervenciones que apuntan a operar sobre la racionalidad matemática de los alumnos. A lo largo del análisis hemos identificado que el docente:

- Sugiere la necesidad de anticipar a dónde conduce un cierto procedimiento y porqué se pone en juego,
- Enseña que hay que agotar todas las soluciones posibles de un problema,
- Propone utilizar una relación y/o una cierta escritura para buscar pistas sobre el procedimiento empleado para producir soluciones o para argumentar acerca de la cantidad de soluciones,
- Instala la comparación entre distintos problemas encontrando ahí un espacio para analizar el dominio de las variables en cada caso,
- Plantea que diferentes procedimientos correctos deben llevar todos al mismo conjunto solución,
- Exige que se formulen las estrategias en términos generales como para que se amplíe la perspectiva del caso puntual que se está tratando,
- Enseña a evocar un contexto específico muy familiar para los alumnos (en este caso el de reparto) para pensar las nuevas cuestiones que surgen en estos problemas que se proponen en un contexto intramatemático.

Todas estas intervenciones van "formateando" un nuevo contrato didáctico y van configurando cambios en las prácticas del aula que exigen a los alumnos revisar tanto sus conocimientos como sus creencias y las herramientas que utilizan para validar sus producciones.

Capítulo 5

Problemas aritméticos a dos variables

Primera parte: análisis a priori

1. Introducción

Como ya hemos señalado, entre los objetos y prácticas que han constituido durante años el trabajo matemático de los alumnos con los que hemos realizado nuestra experimentación, los problemas vinculados a contextos cotidianos, formulados a través de un enunciado verbal, que requieren de las operaciones aritméticas para su resolución, han ocupado un lugar preponderante. ¿Qué nuevas perspectivas se abren en el horizonte matemático de los niños cuando esos conocidos enunciados, por el hecho de vincular dos variables con un grado de libertad,[1] abren el juego a la producción de varias o de infinitas soluciones? Nuevamente, lo viejo y lo nuevo se conjugan en este espacio que estamos intentando caracterizar, ofreciendo por un lado, la posibilidad de movilizar estrategias muy básicas –como lo son las relativas a los problemas aritméticos- y por otro, planteando una ruptura importante a partir de **enfrentar la necesidad de seleccionar variables, de definir su dominio, de decidir sobre la cantidad de soluciones y de encontrar maneras de expresarlas.**

En realidad, estos elementos estaban presentes en la secuencia de división entera y son los que han orientado nuestras opciones a través de todo el trabajo. ¿Qué nuevos costados, nos permitirían explorar estos problemas?

En **primer lugar**, el hecho de proponer problemas contextualizados que movilizan operaciones aritméticas cuyas ocasiones de empleo son muy familiares para los alumnos con los que trabajamos, ubica los aspectos nuevos a tratar en la clase, **mucho más al nivel de las prácticas del trabajo matemático que de los conceptos.** Efectivamente, el "asunto" en estos problemas no es tanto obtener soluciones –aunque es necesario obtenerlas para luego ubicarse en un plano reflexivo respecto de la producción de las mismas- sino plantear la consideración de la cantidad de soluciones y el análisis del dominio de las variables, para situaciones que los niños pueden reconocer con cierta facilidad. De esta manera, el énfasis está puesto en ampliar el espectro de preguntas posibles que involucran la resolución de un problema matemático y este

[1] Nos referimos a problemas de enunciado que pueden modelizarse a través de una ecuación lineal del tipo $a x + b y = c$. Por ejemplo: "El dueño de un negocio cuenta que en su depósito hay entre triciclos y bicicletas, en total, 100 ruedas. ¿Cuántos triciclos y cuántas bicicletas puede haber en el depósito?"

cambio –que no es específico de los problemas de esta secuencia- intenta instalar un modo de abordar que afectará el trabajo matemático en general [2].

Las modificaciones en el plano de las prácticas nos plantean cuestiones a considerar. Se trata de cambios en el contrato didáctico que –por lo menos antes de estar "naturalizados"- son del orden de lo normativo y que por esa razón resultan altamente dependientes de la intervención docente(ya hemos señalado que la interacción con el "medio" no ofrece respuestas a nivel de las normas). En otros términos, el docente a través de las preguntas que plantea comunica de alguna manera que resolver un problema incluye ahora nuevos aspectos y, a través de las discusiones que genera alrededor de esas nuevas cuestiones ofrece un espacio para construir criterios para validarlas. Se requerirá un tiempo para que estas normas se transformen en una acción "natural" incluida en la resolución de los problemas. Surge además –de manera relacionada con lo que acabamos de señalar- otra cuestión vinculada a modificaciones en el plano de las prácticas: cómo legitimar, es decir identificar, dar un estatuto, nombrar, inscribir en un sistema de conocimientos, los asuntos que queríamos trabajar[3].

En **segundo lugar**, al concebir estos problemas, pensamos que el trabajo de elaboración de escrituras personales para producir soluciones -o para describirlas- y la cuestión de su articulación con las más convencionales, tendría en este contexto mayor peso ya que en el caso de la división entera, la representación "cuenta" ocupa un lugar muy preponderante, que hace difícil la emergencia de otras alternativas.

Varios supuestos orientaron el análisis de la producción de escrituras para obtener o representar soluciones:

- al enfrentar la ruptura que supone tener que representar varias o infinitas soluciones, habría condiciones para la producción de nuevas herramientas semióticas por parte de los alumnos,
- la producción de una fórmula para obtener soluciones es una modelización del problema que supone concebirlo en términos de las operaciones generadoras de soluciones. Al realizar este recorte, se favorece la sistematización de las soluciones alrededor de una única relación y esto contribuye al proceso de generalización,
- las formas de representación que se pusieran en juego no serían las convencionales que los alumnos deben aprender para desenvolverse en el álgebra elemental. Estas últimas son el producto cultural de una compleja trama construida y reconstruida una y otra vez a lo largo de siglos, en contextos culturales muy diferentes a los de nuestros alumnos actuales. Pensar que la sola interacción con un tipo de problemas llevaría a producir las mismas escrituras sería considerar que el problema las determina, de manera independiente de los conocimientos, de la cultura en la que están inmersos, y de las funciones que le atribuyen quienes las producen. Es claro que no es esa nuestra posición,

2 Estas cuestiones también están presentes en la secuencia de división entera, pero al tratar sobre un objeto claramente identificado en la cultura matemática escolar –la división entera- el mismo actúa como "polo" de las institucionalizaciones realizadas.

3 Por ejemplo, las fórmulas que eventualmente pudieran surgir del trabajo con estos problemas, no pueden ser descontextualizadas; en consecuencia, no pueden ser objeto de institucionalización como lo son las fórmulas relativas a la división entera.

- los alumnos con los que trabajamos (habitantes de una gran ciudad) son usuarios tanto en el ámbito escolar como en el extra escolar, de múltiples sistemas de representación, algunos de los cuales (por ejemplo los relativos al uso de algunos programas de computación) tienen cierta proximidad con los símbolos del álgebra elemental. Esto genera buenas condiciones para instalar la problemática de la escritura para representar variables,
- algunas de las escrituras que producen los alumnos cumplen una función más "privada" de sostén del pensamiento para quien las elabora sin que esté necesariamente en juego la potencia de las mismas para comunicar a "otros". En muchas ocasiones estas producciones no se interpretan fácilmente y su difusión en el espacio público de la clase debe ser objeto de decisiones específicas del docente,
- la modelización de la producción de conocimientos en términos de adaptación a un medio resistente que ofrece retroacciones con relación a la validez de las relaciones matemáticas puestas en juego en la resolución de un problema, no resulta pertinente para la producción de escrituras,
- la validación de escrituras no se realiza a través de un sistema de teoremas matemáticos y esto distingue el proceso de emergencia de las mismas respecto de otros objetos matemáticos
- la validación de las escrituras se produce en la interacción social a través de la interpretación que los otros puedan hacer de dichas escrituras
- la validación de las escrituras en la interacción social da sentido a considerarlas objeto de reflexión y esto a su vez da sentido a la necesidad de establecer un sistema común de representación.

Finalmente, el hecho de que los conocimientos de base necesarios para comenzar a abordar estos problemas sean muy elementales, genera buenas condiciones –esa ha sido nuestra hipótesis de trabajo- para albergar una gran diversidad cognitiva en la clase, en la medida en que casi todos los alumnos tendrían elementos para tratar los problemas, aunque sea de manera parcial. Esto nos permite estudiar la posibilidad de hacer convivir en el aula alumnos recostados en diferentes "lógicas" y estudiar los efectos de esa "convivencia".

2. Los conocimientos matemáticos de los alumnos al abordar los problemas

Los niños con los que hemos trabajado, se encuentran en el séptimo año de su escolaridad. Su experiencia con problemas de enunciado verbal, que exigen movilizar una o más operaciones aritméticas, es muy vasta y es ese para nosotros un conocimiento de base fundamental.

Si bien en las clases en las que hemos trabajado, no se ha enseñado el tema "ecuaciones en una variable"[4], muchos alumnos han tratado la cuestión en los cursos de ingreso a la escuela secundaria, que realizan[5]. Esto genera una "diversidad adicional" en cuanto al vínculo con lo algebraico, que, como veremos en el análisis a posteriori, se ha manifestado durante nuestro trabajo. Es claro que no hemos elegido clases en las que hubiera alumnos que hacen ingresos, pero hemos aprovechado esta circunstancia para analizar qué sucede cuando los alumnos se encuentran con los límites del universo de ecuaciones en una variable.

Las letras para representar variables han entrado en las aulas en las que trabajamos a través de las fórmulas relativas a áreas y perímetros de figuras planas y en algunos casos – hemos visto que no ha sido el asunto central- han estado presentes en la secuencia de división entera que todos los alumnos con los que hemos trabajado[6], han transitado. Los alumnos de este nivel no han estudiado aún números negativos, razón por la cual descartamos de nuestro análisis problemas para los cuales serían razonables soluciones negativas.

3. *Los problemas aritméticos que se modelizan a través de la relación $a\,x + b\,y = c$*

3.1 Cuestiones generales

Resulta muy difícil avanzar en un análisis general de este tipo de problemas, sin tener en cuenta la gran cantidad de variables didácticas a las que los mismos están sujetos. Efectivamente, el dominio de las variables, el contexto al que se refieren y la manera de formular los problemas tienen influencia en los conocimientos que los alumnos pueden movilizar para abordarlos.

Tanto las variables como los coeficientes pueden ser enteros, racionales o reales. La variedad de contextos posibles es inagotable y juegan en la interpretación del problema y en la resolución del mismo la familiaridad que los alumnos tengan con el contenido al que se refiere, las magnitudes en juego y el tipo de representaciones que admita el problema. Estamos lejos de poder clasificar los problemas de acuerdo con todas estas variables. Ello requeriría de un estudio didáctico específico que fundamente la clasificación en función de los conocimientos movilizados para cada clase de problemas. Ese no es el objetivo de esta exploración, en la que apenas nos asomamos a un análisis de la potencialidad didáctica de los problemas aritméticos a dos variables en función de nuestra problemática y en la que las opciones para seleccionar los

[4] En el momento en que realizamos nuestra experimentación, transcurría un proceso de cambio curricular en la ciudad de Buenos Aires. Por esta razón, los programas varían de una escuela a otra. En particular, no en todos las escuelas se enseña "ecuaciones en una variable" en este nivel.

[5] Nos referimos fundamentalmente a los alumnos que preparan el examen de ingreso a las dos escuelas dependientes de la Universidad de Buenos Aires.

[6] Los alumnos de la Escuela Martín Buber, han realizado la secuencia de división entera pero no lo han hecho en el ámbito de nuestra experimentación.

problemas se han hecho a partir de algunas cuestiones que conocemos[7] y de muchas que desconocemos.

Para organizar nuestro análisis a priori haremos una primera gran separación según que las variables de los problemas sean enteras o racionales.

3.2 Las variables de los problemas toman valores naturales

Analizaremos en primer lugar problemas que se modelizan a través de la ecuación a x + b y = c, con a, b y c enteros mayores que cero.

Más allá de que se plantee o no la ecuación como soporte para hallar soluciones[8] –cuestión que analizaremos luego– en función de los coeficientes, este problema podría no tener solución, podría tener una única solución en la que las dos variables tomaran valores enteros mayores o iguales que cero, o podría tener una cantidad finita (más de una) de soluciones. Existen dos casos en los cuales la ecuación correspondiente al problema no tiene solución: o bien la ecuación no tiene soluciones enteras[9], o bien todos los pares de soluciones enteras tienen al menos una de las componentes negativa.

Ahora bien, decidir que una ecuación no tiene soluciones enteras apoyándose en argumentos teóricos, está completamente fuera del alcance de nuestros alumnos. Si ellos se enfrentaran con ese caso, tendrían el recurso de explorar soluciones particulares y proponer algún argumento que asegure que se han analizado todas las posibilidades. Si por ejemplo tuvieran que trabajar con la siguiente ecuación:

$$36\,x + 8\,y = 190$$

Los alumnos podrían explorar soluciones a través de una tabla de valores:

X	1	2	3	4	5	6
Y	19,25	14,75	10,25	5,75	1,25	

Y luego argumentar por ejemplo que *"como 36 x 6 es 216 que es más grande que 190, ya no es posible encontrar y. Eso mismo seguirá pasando con valores más grandes que 6"*. Sin embargo, un análisis de este tipo reposa más en un criterio empírico que en una perspectiva teórica ya que los alumnos no tienen elementos para anticipar que no encontrarán soluciones ni para reinterpretar a posteriori las razones por las cuales no hay solución. Por ese motivo hemos

[7] Para el análisis a priori nos hemos apoyado fundamentalmente en los resultados del test diagnóstico al cual hicimos referencia al plantear la metodología, en nuestro conocimiento de las prácticas aritméticas, en nuestras hipótesis sobre la articulación aritmética álgebra a partir de la producción didáctica sobre el tema.

[8] En realidad estamos usando la ecuación como medio de análisis didáctico del problema, pero en ningún sentido pensamos que este uso es probable –por lo menos de entrada– con nuestros alumnos.

[9] Sería el caso si el máximo común divisor de a y b no es divisor de c.

descartado el planteo de problemas cuyas variables son enteras y que se modelizan a través de una ecuación que no tiene soluciones enteras. Por otro lado, criterios de exhaustividad como los mencionados, basados en armar una tabla y argumentar de alguna manera que no habrá más pares solución, pueden ponerse en juego a propósito de problemas en los que sí hay solución; con lo cual no estaríamos agregando nada nuevo a las posibilidades de elaboración de los niños si incorporáramos ecuaciones sin soluciones enteras. Por razones similares, hemos descartado los problemas cuyas correspondientes ecuaciones admiten soluciones enteras pero en las que siempre alguna de las componentes es negativa. De hecho, los alumnos no tienen conocimientos como para distinguir estos dos casos y para avanzar en el problema estarían poniendo en juego siempre la misma cuestión: recorrer la tabla de valores y analizar que la misma "se agotó".

Para elegir los coeficientes hemos seguido los siguientes criterios:

- que la ecuación tenga una cantidad "suficiente" de soluciones, al menos 15[10] para que tenga sentido enfrentar el problema de cómo expresarlas y eventualmente para justificar el uso de una fórmula para ello,
- que los cálculos sean "fáciles" de realizar
- que sea accesible un análisis de los divisores de los coeficientes para favorecer la emergencia tanto de estrategias basadas en la consideración de las operaciones que vinculan las variables como de aquellas que establecen una manera de "pasar" de un par solución al "siguiente" (covariación)[11]

Para avanzar en el análisis nos apoyaremos sobre uno de los problemas seleccionados para realizar con los alumnos.

3.2.1 El problema de los triciclos

Veamos el enunciado:

El dueño de un negocio cuenta que en su depósito hay entre triciclos y bicicletas, en total, c ruedas. ¿Cuántos triciclos y cuántas bicicletas puede haber en el depósito?

Hemos seleccionado este problema porque:

- plantea un contexto familiar, lo cual resulta un buen sostén para modelizar la situación

[10] Somos concientes de la ambigüedad de la palabra "suficiente" y de la arbitrariedad del número 15. Estamos tratando de marcar la necesidad de un salto respecto de los clásicos problemas de solución única.

[11] Es claro que el procedimiento de covariación considera también las operaciones que vinculan las variables, pero él mismo se apoya más en una idea de compensación para conservar el coeficiente "c" que en la relación $a\,x + b\,y = c$

- no se explicitan los coeficientes en el enunciado sino que los mismos están dados por las palabras "triciclos" y "bicicletas" y esto requiere que los alumnos seleccionen estos rasgos del problema
- los coeficientes que surgen son fáciles tanto para realizar operaciones aritméticas como para establecer relaciones que permitan obtener la manera de pasar de un par solución a otro
- enfrenta a los alumnos con la necesidad de manejar cuatro magnitudes (cantidad de ruedas de bicicletas/triciclos y cantidad de bicicletas/triciclos), agregando una complejidad que podría justificar la introducción de nuevas herramientas de representación para tratar el problema.

Analizaremos entonces a propósito del problema de los triciclos y las bicicletas cuatro tareas: **producir soluciones, pronunciarse por la cantidad de soluciones, argumentar sobre el dominio de variación de las variables, encontrar una fórmula que permita "producir" las soluciones**[12].

Si bien más adelante justificaremos la elección del coeficiente c que finalmente hemos hecho, digamos por ahora que si c es par, la variable "cantidad de triciclos", toma valores pares en tanto que si c es impar, la cantidad de triciclos será también impar. Consideraremos c par ya que el análisis con respecto a esta cuestión no cambia sustancialmente si fuera impar.

3.2.1.1 Procedimientos para obtener soluciones

Para clasificar los procedimientos tenemos en cuenta el siguiente criterio: consideramos por un lado los procedimientos a través de los cuales los alumnos ponen de manifiesto estrategias sistemáticas para producir las soluciones y para asegurar haberlas agotado (sean o no correctos) y, por otro lado, aquellos a través de los cuales los alumnos obtienen soluciones "sueltas" sin relacionarlas entre sí y sin que se propongan criterios para analizar si se han buscado o no todas las soluciones posibles. Estamos considerando como "frontera" entre unos y otros tipos de procedimientos, el nivel de generalidad de los mismos y por eso nos atrevemos a llamar "algebraicos" a los primeros y aritméticos a los segundos.

Identificamos como procedimientos "sistemáticos"(algebraicos):

- la producción de una fórmula en la que se despeja una de las variables en función de la otra. Aunque ya hemos dicho que el aspecto predictivo no es para nosotros la cuestión central del análisis a priori, no podemos dejar de señalar que en función de los conocimientos de los niños es poco probable la producción espontánea de una fórmula. Nos parecía de todos modos arbitrario, dejar de considerarla entre los posibles procedimientos.

[12] Insistimos en que tomamos el caso particular a modo de "ejemplo genérico" y que en realidad nuestra intención es desplegar el análisis de los problemas con variables enteras y coeficientes enteros.

- la realización de una tabla de valores con variación sistemática de las variables. Puede ocurrir que se establezca la variación de cantidad de ruedas (de triciclos y de bicicletas), de cantidad de triciclos y de bicicletas o de las cuatro variables. La tabla puede confeccionarse básicamente de dos maneras:

a. dando valores a una de las variables y obteniendo la otra, invirtiendo las operaciones. Este procedimiento (podríamos llamarlo de "despeje") permite por un lado tomar conciencia de la relación de dependencia entre las variables y por otro, a partir de la variación sistemática, establecer que las variables no pueden tomar cualquier valor

b. utilizando procedimientos que denominamos de covariación. Estos procedimientos se basan en encontrar maneras de conservar el coeficiente c, canjeando valores de las variables a través de un "paso mínimo" que permite pasar de una par solución a otro, siguiendo un orden para alguna de las variables. Este paso de variación puede darse a nivel de las variables x e y (dos triciclos se cambian por tres bicicletas) o a nivel de las variables 3x y 2y (se sacan 6 ruedas de un rodado y se agregan al otro). Los alumnos que establecen la variación sobre x e y coordinan las cuatro variables en tanto que los que operan sobre 2x y 3y solo manejan dos. Es decir, estos últimos realizan una reducción de las variables en juego, lo cual les facilita el control (operan sobre una relación implícita de coeficientes 1, pero pierden la traza de la estructura del cálculo y el significado de los coeficientes y de las variables. En función de un mayor control, reducen la complejidad de la relación con la que operan (de hecho evitan las multiplicaciones y se manejan con una ecuación del tipo $x + y = c$) pero al mismo tiempo se dificulta el acceso a la respuesta en términos de las variables en las que se formula el problema. Encontrar el paso de la covariación requiere un análisis de la situación que puede hacerse a partir de establecer una relación entre los coeficientes de la ecuación, a partir del contexto o estableciendo una interacción entre el contexto y la relación. En cualquier caso, establecer el paso de covariación supone vincular los coeficientes de la ecuación correspondiente al problema a través de una relación que no es una de las cuatro operaciones aritméticas conocidas por los alumnos.

Los procedimientos de covariación, al basarse en una relación entre los pares solución, por un lado ponen más de relieve que se trata de pares de soluciones (por contraposición a números "sueltos") y por otro hacen más factible la posibilidad de concebir el conjunto solución. Por el contrario, a través de los procedimientos basados en las operaciones aritméticas, la idea de par puede perderse y además cada par solución guarda cierta autonomía respecto de los otros. En algún sentido la covariación "objetiva el conjunto solución" ya que para los alumnos es difícil concebir la descripción de todas las soluciones si no es por la enumeración. Al mismo tiempo, este procedimiento deja más ocultas las relaciones aditivas y multiplicativas de la ecuación correspondiente al problema que sí se ponen más en evidencia en los procedimientos de "despeje".

Identificamos como procedimientos "no sistemáticos" (aritméticos):

- Obtener una única solución usando implícitamente una condición adicional (igual cantidad de triciclos y de bicicletas, o igual cantidad de ruedas para cada tipo de rodado).
- Poner dos números hipotéticos, multiplicar uno por tres, el otro por dos, sumarlos y comparar ese resultado con c, ajustando los valores en función de lo obtenido y sin búsqueda de todas las soluciones posibles. Se trata de un procedimiento en el que la relación $3x + 2y = c$ funciona como una especie de "caja" en la que se "prueban" pares, sin producir ningún tipo de inversión de esa relación. Notemos que esta estrategia estaría dando cuenta de que los alumnos no "ven" la dependencia entre las variables, asunto que justamente no es accesible en los típicos problemas aritméticos en los que un dato determina al otro sin que esa determinación "atraviese" la conciencia de los alumnos.
- Partir el número c en dos grupos y luego dividir uno de esos números por dos y el otro por tres, sin haber anticipado que los números que resultan de partir c deben ser múltiplos de 2 y de 3 respectivamente. Si bien acá se invierten las operaciones de multiplicar el procedimiento no da pistas para establecer la relación de dependencia entre las variables. Por otro lado, queda "disimulado" el hecho de que hay una atribución arbitraria de valor a una de las variables.
- Atribuir un valor a una de las variables y obtener el otro invirtiendo las operaciones correspondientes, sin buscar sistemáticamente soluciones y sin anticipación de condiciones para obtener un valor posible de la variable (cantidad de triciclos par).

Cuando los alumnos –aún habiendo arrancado con procedimientos de tipo aritmético- se dan cuenta de que la cantidad de triciclos debe ser par, están comenzando a establecer comparaciones entre los valores que "sirven" y los que no. Aunque no puedan dar cuenta de las razones por las que ello ocurre, esto supone ya una posición de generalización (García, R.; 2000) y ubica a los niños en buenas condiciones para una búsqueda más sistemática.[13]

Contrastar los dos grandes tipos de procedimientos que hemos identificado, nos permite tomar conciencia de las transformaciones que supone pasar de procedimientos más "aritméticos" a estrategias más "algebraicas". Es claro que este pasaje no es espontáneo y se verá favorecido por el conjunto de tareas que hemos previsto para este problema y no sólo por la búsqueda de soluciones. En este sentido consideramos que las tres próximas tareas que analizaremos "empujan" hacia lo algebraico. Es así como muchos alumnos -ya lo hemos visto a propósito de la secuencia de división entera- pueden comenzar a explorar el problema recostados en procedimientos menos sistemáticos y luego "pasarse" a procedimientos más sistemáticos.

Cualquiera sea el método que utilicen los alumnos para producir soluciones, las mismas pueden verificarse movilizando conocimientos básicos de las operaciones aritméticas.

[13] Más adelante tratamos específicamente la cuestión del dominio de variación de la variables.

3.2.1.2 Contar la cantidad de soluciones

Como ya lo hemos analizado a propósito de la secuencia de división entera y lo hemos señalado en la introducción de este capítulo, pronunciarse por la cantidad de soluciones pone a los alumnos en un nivel reflexivo con relación a la obtención de soluciones, contribuye a que éstas se sistematicen profundizando el nivel de generalidad que los alumnos pudieron concebir al producirlas y "comunica" de manera implícita que ocuparse de la cantidad de soluciones es parte del trabajo de resolución de un problema.

Los niños que han producido soluciones a través de la variación sistemática de la variable utilizando procedimientos de inversión de operaciones, pueden contar las soluciones si saben que han agotado todas las posibilidades –esto se verá más o menos facilitado por la cantidad de soluciones del problema, que depende del valor del coeficiente c-, o bien pueden hacer un análisis para establecer cuántos valores podría tomar la variable, considerando los extremos del intervalo de variación y el dominio de variación[14]: por ejemplo, si c fuera 100, podrían preguntarse cuántos números pares (la cantidad de triciclos debe ser par) hay entre 0 y 32 que son la cantidad mínima y máxima de triciclos posibles. En el caso en que este último análisis se pusiera en juego, se estarían generando condiciones todavía muy incipientes para establecer que cuando se analiza la cantidad de valores que puede tomar una de las variables, se tiene al mismo tiempo, la cantidad de soluciones del problema.

Quienes produjeron soluciones a través de procedimientos de covariación, o bien las contarán o bien intentarán establecer alguna relación entre el paso de la covariación y la cantidad de valores naturales que hay en el intervalo de variación de la variable. Habría ahí un uso de la división en tanto operación que permite contar cuántos números naturales distribuidos en intervalos regulares hay en un cierto intervalo de números naturales.

Para los alumnos que han hallado soluciones a través de los procedimientos que hemos denominado "aritméticos" la tarea de decidir sobre la cantidad de soluciones "empuja" hacia una sistematización de las mismas, a través de la búsqueda de algún criterio que asegure que se han contado todas las soluciones.

En todos los casos en los que los alumnos hallaron pares solución invirtiendo operaciones, se han enfrentado con la necesidad de interpretar la obtención de un resultado no entero como la señal de que la variable no puede tomar el valor que ellos han atribuido. Este tipo de práctica que requiere interpretar si el resultado de un cálculo (pertinente para el problema) tiene o no sentido en función del contexto es nuevo para los alumnos y es la base a partir de la cual podrán producir argumentos con respecto al dominio de variación de las variables.

---

[14] C (par) puede ser de la forma 3 k, 3 k+ 1 o 3 k + 2. En el primer caso, la variable "cantidad de triciclos, varía entre 0 y c/3; en el segundo, dicha variable varía entre 0 y (c-4)/3 y si c es de la forma 3 k + 2, la cantidad de triciclos varía entre 0 y (c-2)/3.

3.2.1.3 Argumentar sobre el dominio de variación de las variables

Tanto en el proceso de producción como en el análisis de la cantidad de soluciones, los alumnos "encuentran" que las variables no pueden tomar cualquier valor natural, dentro del intervalo en el que se encuentran. Se empiezan a movilizar acá ciertas relaciones - implícitas para muchos niños- que serán conocimientos que podrán usarse como base para argumentar sobre el dominio de variación.

Recordemos que estamos haciendo este análisis considerando que el coeficiente c es par. Cuando c es par, la cantidad de triciclos debe ser par y la cantidad de bicicletas debe ser congruente a 0, 1 ó 2, módulo 3, según c sea de la forma 3k, 3k+2 ó 3 k + 1.

Argumentar sobre el dominio de la variable "cantidad de triciclos" requiere analizar bajo qué condiciones el cálculo $(c - 3x)/2$, da como resultado un número natural. Para decidir que esto ocurre si x es par, los niños deberían establecer que para que $c - 3x$ sea par, x debe ser par. Esto se basa, en las siguientes propiedades: 3 multiplicado por un número impar, da impar; un número par menos un impar da como resultado impar y un número par menos un par, da como resultado par. Ahora bien, las tres propiedades recién enunciadas podrían ser a su vez demostradas. Nos encontramos acá con un problema didáctico reconocido por numerosos investigadores que han estudiado la problemática de la iniciación al razonamiento deductivo en este nivel de la escolaridad. ¿Cómo seleccionar aquello que se da por válido sin justificación (sistema axiomático de base) y aquello acerca de lo cual es necesario producir un argumento? ¿Cómo podrían los alumnos hacer dicha distinción? (Arsac,G.; 1992). Nuestra opción es dar lugar a la producción de argumentos explicativos que acepten las propiedades mencionadas como "axiomas de base". ¿Cómo la justificamos? La producción de argumentos de tipo general constituye uno de los aspectos del espacio de articulación que estamos concibiendo y dicha producción podría verse entorpecida por el requerimiento a los alumnos de justificar propiedades que ellos consideran válidas de manera "intuitiva". Se trata de no perder el hilo del problema principal para dar lugar a un proceso de argumentación deductiva, postergando en todo caso el momento de abordar específicamente la demostración de las propiedades mencionadas.

Ahora bien, como los alumnos han tenido que decidir acerca de la cantidad de soluciones y probablemente las hayan enumerado, es razonable pensar que algunos niños dirán que la cantidad de triciclos debe ser par *"porque lo vi en la tabla"*. Planteamos como hipótesis de trabajo que la gestión de la interacción entre quienes dan argumentos explicativos y quienes hacen constataciones empíricas, permite reconocer la diferencia entre ambos tipos de validaciones, y ese reconocimiento puede actuar como motor para promover la evolución hacia argumentos explicativos.

Acerca de la elección del coeficiente c

Decidir acerca del dominio de variación de la cantidad de bicicletas es más complejo porque requiere conocimientos sobre las condiciones en las que un número de la forma $c - 2x$ es múltiplo de tres. El caso más sencillo sería que c fuera múltiplo de 3, en cuyo caso la cantidad de bicicletas también debe serlo, pero aún así pensamos que no hay conocimientos suficientes para negociar con los alumnos la producción de argumentos al respecto. Esa es la razón por la cual hacemos la opción de pedir solamente argumentos con relación al dominio de la variable "cantidad de triciclos". Una vez que hemos decidido que no plantearíamos el problema del dominio de variación de la cantidad de bicicletas a los alumnos, hemos hecho la opción de no trabajar con un coeficiente c múltiplo de 3, ya que para este caso, los alumnos constatarían empíricamente que la cantidad de bicicletas es múltiplo de tres, sin que haya elementos para gestionar la correspondiente explicación como sí los hay para el análisis de la otra variable. Pensamos que es más difícil que los alumnos "descubran" empíricamente que la variable "cantidad de bicicletas" debe ser de la forma $3\ q + 1$ ó $3\ q + 2$ y que formulen enunciados cuyo tratamiento argumentativo está fuera de las posibilidades en estas clases. Teniendo en cuenta estos elementos hemos planteado el problema con el coeficiente ***c = 100.*** De esta manera el problema tiene 16 soluciones. La cantidad de soluciones está pensada para que sea razonable escribirlas todas y se puedan coordinar procedimientos de enumeración con procedimientos de cálculo de la cantidad de soluciones.

3.2.1.4 Una consideración a propósito de las tres tareas anteriores

Una mirada de conjunto sobre las tres tareas que acabamos de analizar, nos lleva a señalar que las explicaciones que exigirían justificar cada una de estas tareas son de naturaleza diferente. Efectivamente, para explicar cómo se obtienen soluciones, es necesario movilizar significados relativos a las operaciones aritméticas - además de la aceptación de atribuir un valor-; para explicar cómo se obtuvo la cantidad de soluciones o bien hay que explicar que el método de enumeración puesto en juego es exhaustivo o bien hay que fundamentar algún procedimiento que se haya puesto en juego, para argumentar sobre el dominio de validez, es necesario apoyarse en propiedades aritméticas. Estas últimas explicaciones son más próximas de los razonamientos para probar en matemática. Esta consideración nos permite identificar como **observable, el tipo de explicación** que dan los alumnos a propósito de cada una de las tareas mencionadas.

3.2.1.5 Proponer una fórmula para generar soluciones

Como lo hemos señalado en la introducción, se trata de una tarea esencialmente diferente de las otras tres.

En primer lugar, porque producir soluciones, decidir cuántas hay y establecer el dominio de validez de la variable, son problemas cuya validación se apoya en significados y propiedades de las operaciones que tienen un estatuto claro para los alumnos, más allá de que ellos puedan o no realizarlas con éxito. La producción de fórmulas en cambio tiene un aspecto formal que no puede "defenderse" apelando a los conocimientos numéricos de los alumnos. Se valida entonces la función comunicativa de cada fórmula a través de la eficacia que "los otros" (los que no la produjeron) pueden atribuirle para "generar" las soluciones. Aceptar cada una de las fórmulas que se propongan será el producto de discusiones entre el docente y los alumnos quienes las pondrán a prueba haciéndolas funcionar y eventualmente proponiendo correcciones.

De esta manera irá emergiendo en la clase el significado de qué es una fórmula. El espacio colectivo de discusión sobre la base de las producciones individuales o de pequeños grupos cobra de esta manera una relevancia fundamental.

Señalemos que muchas de las retroacciones a cada producción provienen de los otros integrantes de la clase quienes al no dominar los modos de representación acerca de los que se discute no tienen muchas veces fundamentos para argumentar a favor o en contra de la propuesta de un compañero. Este modo de concebir la emergencia de escrituras es delicado en cuanto a la gestión del docente: por un lado, favorecer las producciones originales de los niños y transformarlas en objeto de discusión da lugar a que se perciba la instrumentalidad de la escritura (Bosch, M; 1994), por otro lado, en tanto los niños no tienen demasiados elementos para llevar muy lejos la discusión, el docente debe encontrar un buen punto de articulación entre las propuestas de los niños y aquello que quiere dejar establecido y este punto debe decidirlo sobre la marcha, analizando la riqueza que puede o no tener el dar lugar a las discusiones que los alumnos entablen.

Estas especificidades influencian el tipo de análisis que podemos hacer a priori ya que las categorías que se identifiquen tienen que ver con el estatuto y la función que los alumnos otorgan a las letras y a las fórmulas mismas.

Una fórmula es un algoritmo que permite obtener un dato en función de otros. Los alumnos tienen experiencia al respecto a propósito de las fórmulas de áreas de figuras planas. En estas fórmulas, las letras han funcionado como "lugares" a ser reemplazados por los datos de un problema específico (parámetros) ¿será posible que sean ahora concebidas como variables?

¿Cómo enfrentarán el hecho de que para estos problemas tienen que proponer respuestas que involucran valores para dos variables distintas? ¿Aceptarán que **una única fórmula** permite producir **todos los pares de soluciones posibles** o "necesitarán" una fórmula para cada variable? ¿Se darán cuenta de que las soluciones son pares o las concebirán como números "sueltos"?

¿Existen condiciones a lo largo del trabajo propuesto, para que los alumnos transformen sus primeros significados y puedan "ver" la fórmula como un **soporte para representar las soluciones o para contarlas?**

La fórmula que los alumnos propongan no es independiente de la manera de producir pares solución, ni del grado de generalidad invertido en las tareas anteriores, ni de las formas de representación utilizadas. Nos preguntamos entonces: ¿qué relación existe entre el "método" utilizado para producir soluciones y la fórmula encontrada, en particular, cómo operan los cálculos aritméticos realizados? ¿Qué relación hay entre la producción de tablas de valores y la producción de fórmulas?

Señalemos también que nos interesa indagar cómo incluyen los alumnos en sus fórmulas, el dominio de variación de las variables.

En síntesis, a propósito de la producción de fórmulas nos interesa estudiar **cuál es la relación matemática implícita** en la misma, **cuál es la función que los alumnos le atribuyen a esa escritura**, cuál es el **estatuto que tienen la o las letras en la misma** y **cómo se considera el dominio de las variables.**

3.3 Las variables de los problemas toman valores racionales

El hecho de que en este caso haya infinitas soluciones supone cambios importantes respecto de los procedimientos analizados a propósito de los problemas con variables enteras.

Los procedimientos de covariación para **producir soluciones** no permiten atrapar todas las soluciones y se agregan dos complejidades más: la necesidad de operar con números racionales y la de controlar las unidades de medida correspondientes a las magnitudes representadas por las variables. Podría ocurrir que los alumnos operaran como si se tratara de variables enteras ignorando la complejidad que se agrega. En ese caso, la oferta de soluciones no enteras debería funcionar como una retroacción tendiente a que los niños revisen su visión del problema. El hecho de que quede bloqueada la posibilidad de enumerar las soluciones - que es para los alumnos una manera de objetivar el conjunto solución- puede dar sentido a la búsqueda de nuevas herramientas para representarlas. Los alumnos pueden hacer esto básicamente de dos maneras: 1) planteando dos fórmulas, una para cada variable, cada una de las cuales es un algoritmo de cálculo que permite conocer una de las variables en función de la otra y 2) planteando una única fórmula concebida como una ecuación a dos variables, que "soporta" los infinitos pares solución Pensamos que esta última es poco probable y un asunto de las clases podría ser el pasaje de dos fórmulas a una. **Observar y analizar cómo resuelven los alumnos la imposibilidad de enumerar las soluciones, es para nosotras una cuestión de esta investigación.**

Para pronunciarse sobre **la cantidad de soluciones** los alumnos deben considerar los posibles valores que puede tomar la variable. La noción de densidad está entonces en juego en el problema. Ahora bien, los contextos posibles se refieren a magnitudes para las cuales existen sistemas de unidades de medición que le "quitan densidad" al dominio de variación. Encontramos una cuestión interesante a tratar con los alumnos de este nivel: la distancia entre el modelo matemático usado y la "realidad" a la que el mismo se refiere. Se trata de una cuestión que debe ser aportada por el docente a modo de explicación y para la cual podrá apoyarse en las dificultades que los alumnos encontraron para atribuir valores a las variables.

La confrontación entre los problemas con dominio entero y con dominio racional apunta a instalar la necesidad de explicitar de alguna manera el conjunto en el que toman valores las variables y a poner a los alumnos en contacto con el hecho de que una "misma" escritura puede estar representando conjuntos diferentes[15]. Nos interesa estudiar hasta qué punto estas son cuestiones identificables para los alumnos.

4. Los problemas llevados al aula

[15] Obviamente la representación del problema exige la explicitación del dominio, con lo cual no se trataría de la misma fórmula, de ahí las comillas. Señalemos además que, como en otros casos, el lenguaje usado en este tramo no es el que estamos suponiendo en la interacción con los niños.

Los "objetos" que estamos tratando de analizar en esta secuencia, no "viven" usualmente en el sistema de enseñanza y esto nos dejó poco tiempo para llevar a cabo el trabajo con los alumnos. Por esta razón nos vimos obligados a descartar muchas de las opciones que hubiera sido interesante explorar (por ejemplo, formular el problema explicitando una de las variables en función de la otra). Finalmente hemos desarrollado tres problemas en una de las clases y dos problemas en la otra. Los problemas seleccionados fueron:

El dueño de un negocio cuenta que en su depósito hay, entre triciclos y bicicletas, 100 ruedas. ¿Cuántos triciclos y cuántas bicicletas puede haber en el depósito?"

Un comerciante tiene $100 para comprar harina y yerba. Estos productos se venden sueltos. El kilo de harina cuesta $2 y el de yerba $3. ¿Qué cantidades de harina y de yerba puede comprar?

Marisa tiene 20 pesos en monedas de 10 centavos y de 50 centavos. ¿Cuántas monedas de cada clase puede ser que tenga?

Notemos que el problema de "la yerba y de la harina" tiene la "misma ecuación" que el problema de los triciclos y quisimos explorar qué distancias planteaban los alumnos al tratar uno y otro: ¿Cómo se desempeñarían los alumnos que en el problema de los triciclos propusieron estrategias de covariación, al enfrentar un problema con infinitas soluciones? ¿Qué conocimientos sobre los números racionales suponen las estrategias de los niños? Pasar de un problemas con varias soluciones a uno con infinitas soluciones, ¿"empuja" a la escritura de la fórmula?

El problema de las monedas admite también una representación con coeficientes decimales. Ya sea que se elijan coeficientes enteros o decimales, es necesario hacer algún cambio de unidad (20 pesos a centavos o los centavos a pesos). El análisis a priori no cambia sustancialmente respecto del realizado a propósito del problema de los triciclos, aunque la necesidad de cambiar de unidades puede plantear una mayor complejidad en cuanto a la modelización. Por otra parte, estábamos interesados en explorar la reutilización de las cuestiones identificadas en los problemas anteriores.

Hemos analizado cuatro tareas a propósito de estos problemas. En la medida en cada una de ellas genera elementos para la siguiente, no las hemos planteado todas al mismo tiempo. Es decir, se propuso para cada problema en primer lugar el enunciado "pelado" y luego se pidió que los alumnos se abocaran sucesivamente a las otras tareas (cantidad de soluciones, dominio y fórmula para generar soluciones). Los docentes han hecho opciones diferentes para gestionar los problemas y analizaremos las mismas en la segunda parte de este capítulo.

5. Los observables que surgen del análisis a priori

De la misma manera que lo hemos hecho a propósito de la secuencia de división entera, este análisis nos lleva a identificar un conjunto de observables que nutrirán el análisis de las producciones de las clases. Como dijimos al principio, los objetos a tratar e institucionalizar se sitúan más a nivel de las prácticas que de los conceptos. Incluimos dos tipos de observables: los vinculados a la relación aritmética-álgebra y los vinculados a la racionalidad matemática de los alumnos.

Con relación a la problemática aritmética-álgebra se constituyen en observables:

- La selección de variables que hace el alumno (una variable, dos variables, las variables x e y o ax y by)
- El tipo de procedimiento que utiliza (covariación, dependencia)
- La posibilidad de concebir las soluciones como pares
- Las escrituras que utiliza para generar las soluciones
- Las escrituras que utiliza para representar las soluciones
- La función que le otorga a la(s) fórmula(s)
- Las relaciones que representa en la fórmula
- El nivel de objetivación del conjunto solución
- Las relaciones que establece el alumno entre el modelo y la situación que el mismo representa
- El estatuto que adquieren las letras

En cuanto a la racionalidad matemática de los alumnos, se constituyen en observables:

- el tipo de procedimiento que utiliza (aritmético, algebraico)
- el tipo de justificación que da para resolver sobre la cantidad de soluciones
- la posibilidad de decidir sobre el dominio de variación a partir de argumentos o de constataciones empíricas
- los elementos que tiene en cuenta para decidir si dos procedimientos son o no igualmente correctos
- los criterios de exhaustividad que pone en juego

Con estos elementos como marco, comenzamos ahora el análisis de los desarrollos en las clases. La variedad y riqueza de problemas nuevos (no anticipados) que surgen como producto de las interacciones en cada grupo, da lugar a recorridos muy diferentes entre sí, que no podrían haberse atrapado a priori. Sin embargo, los caminos que describiremos, aún con todas sus distancias incorporadas, nos permitirán reconocer las grandes ideas alrededor de las cuales estructuramos esta experimentación. Esta diversidad desplegada a partir de un diseño común, nos habla una vez más de las muchas maneras de vivir que son posibles para los objetos matemáticos cuando ellos se instalan en las aulas y son tratados por las personas

Segunda parte: análisis a posteriori

1. Fuentes y Criterios para el análisis

El trabajo con problemas aritméticos en dos variables fue implementado en dos séptimos grados durante el año 1999[16]. Recordemos que antes de comenzar el trabajo en cada clase, nos hemos reunido con la profesora a cargo del curso, para realizar un análisis didáctico de los problemas y puntualizar los aspectos que buscábamos indagar en este tramo de nuestra investigación.[17] En los dos casos se trató de cursos en los que era usual que el docente planteara problemas para que los alumnos intentaran resolver por sus propios medios, solos o en pequeños grupos, que el profesor interviniera en los grupos y que hubiera momentos de discusión colectiva.

Como ya hemos señalado al presentar la metodología, hemos optado por no especificar de entrada y de manera muy detallada cuestiones vinculadas a la gestión de las clases, dejándoles a las docentes un espacio claro para que nos propongan modalidades y también para que decidan por su propia cuenta. Hemos intentado dejar en claro cuáles son los conocimientos matemáticos que están en juego para los alumnos a través de las situaciones planteadas -el análisis a priori ha sido aquí el punto de apoyo fundamental- abriéndonos a diferentes trayectorias posibles y, en consecuencia, a la posibilidad de que en cada caso se privilegiaran aspectos diferentes[18]. Esta es una opción que marca nuestra postura de manera general con respecto a la participación del docente en la ingeniería didáctica y que, si en algún caso debiera ser revisada[19], seguramente no es éste. Efectivamente, la naturaleza exploratoria de nuestro trabajo -todavía no podemos establecer exactamente ni los conocimientos matemáticos que integran el espacio de articulación aritmética-álgebra ni cómo se inserta el mismo en un sistema más general de conocimientos escolares- hace especialmente interesante estar abiertas a las diferencias que se producen en los distintos recorridos, sobre la base –claro- de un proyecto común.

Recordemos que les hemos planteado a los alumnos en primer término el enunciado del problema para enfrentarlos con la situación de producir soluciones y luego les hemos propuesto la discusión de la cantidad de soluciones, la definición del dominio de variación de las variables

[16] Hemos llevado a cabo estos problemas en la Escuela Despertar, y en el Instituto Martín Buber. Las profesoras de los correspondientes cursos conocían nuestro trabajo y discuten periódicamente con nuestro equipo de Didáctica de la Matemática, cuestiones vinculadas a la enseñanza de la matemática en la escuela media.

[17] En el Instituto Martín Buber, la secuencia sobre división entera fue realizada por la docente fuera del marco de esta investigación.

[18] Es claro que aún cuando el investigador pretenda comunicar una anticipación muy detallada de las acciones del docente, no puede garantizar que los recorridos en las diferentes clases, en términos de los conocimientos elaborados por los alumnos, sean iguales. Desde nuestro punto de vista, la anticipación detallada refleja más la ilusión del investigador de poder controlar lo que sucederá en la clase, que la posibilidad real de lograrlo.

[19] Como cualquier posición adoptada, esta también está sujeta a revisión en función del problema que se estudia.

y la producción de fórmulas. Dado que las tres últimas tareas, se basan en la primera, hemos decidido que el docente fuera proponiéndolas sucesivamente en una segunda etapa. Al plantear en primer lugar el enunciado "pelado", pretendíamos analizar si algunas de las cuestiones que propondríamos después, surgían por parte de los alumnos a través del proceso de producción de soluciones. Además, no queríamos que se filtrara a través de la formulación de las otras tareas, la inevitable carga de supuestos que -ocurre siempre- cualquier planteo conlleva[20]. Ahora bien, las dos docentes con las que hemos trabajado, han privilegiado de maneras diferentes cada una de las tres tareas a las que venimos haciendo referencia, lo cual ha dado, en suma, dos secuencias distintas. Por ejemplo, con relación al problema de los triciclos y las bicicletas, en el Instituto Martín Buber, se ha destinado mucho tiempo a la discusión sobre una posible fórmula, en tanto que en la Escuela Despertar, la discusión sobre el dominio de variable "cantidad de triciclos" consumió casi una clase y la fórmula fue propuesta por la docente sin dar lugar a todo el proceso de negociación colectiva que ocurrió en el primer caso. Estas consideraciones nos llevan a realizar para este análisis a posteriori un recorte diferente del realizado para la secuencia de división entera: haremos ahora un análisis escuela por escuela en tanto antes lo habíamos hecho –recordamos– problema por problema. En las conclusiones de este trabajo tomaremos en perspectiva los dos análisis a posteriori para realizar consideraciones sobre cada tipo de recorte, su relación con las secuencias, los modos de gestión, y el tipo de conocimientos en juego- sobre las opciones hechas en uno y otro caso.

Por otra parte, al enfatizar distintos aspectos en cada una de las experiencias realizadas, también fueron diferentes los momentos más ricos de producción por parte de los alumnos. Por ejemplo, en el caso de la producción de fórmulas, -lo hemos señalado en el análisis a priori- los alumnos pueden defender una cierta fórmula que hayan producido porque para ellos ha sido sostén de su propio pensamiento, pero la naturaleza de este producto hace que no puedan disponer de un sistema de teoremas matemáticos que les permita validarla (para ellos mismos y frente a los demás) sobre todo si no se los está invitando a que operen con los símbolos que propongan (ver análisis a priori). Un proceso de negociación colectiva mediado por el docente, en el cual por un lado los alumnos van poniendo a prueba la función comunicativa que tienen sus propias escrituras y, por otro, se establecen convenciones y se atribuyen funciones y significados, se hace entonces ineludible. Esto hace que las relaciones que los alumnos vayan estableciendo a propósito de las escrituras, las funciones que ellos les vayan atribuyendo, los avances que hagan al respecto, sean accesibles para nosotros en las fases colectivas en las que se discuten las producciones. Resulta entonces que en el caso de la producción de fórmulas analizamos centralmente el momento de trabajo colectivo coordinado por el docente. Cuando se trata de definir el dominio de una variable en cambio, los alumnos tienen más elementos para sostener un trabajo de producción de manera independiente del docente, aunque luego ese trabajo también se valide en el intercambio con los otros bajo la "vigilancia matemática" del docente. En esos casos, analizamos momentos de trabajo en los pequeños grupos y momentos colectivos porque ambos nos permiten conocer sobre el proceso de producción de conocimientos de los alumnos y de la clase en su conjunto. En síntesis, en cada caso hemos

[20] Preguntar, por ejemplo, acerca del dominio de variación antes de que los alumnos se hayan enfrentado al hecho de que con algunos valores no pueden arribar a una solución, por una parte supone que ellos son capaces de comprender la pregunta y, por otra estaría "agregando" la información de que la cantidad de triciclos no puede ser cualquiera.

recortado aquellos momentos en los que resultó más rica la producción en función de nuestra problemática.

De la misma manera que en la secuencia de división entera, todas las clases que presenciamos han sido registradas por dos observadoras y grabadas en audio. Los criterios de selección de los pequeños grupos que se observaron fueron descriptos en el capítulo 3. También hemos recogido las carpetas de los alumnos y en este caso, hemos realizado un relevamiento de los trabajos escritos de todos los niños hayan o no participado en las puestas en común o en los grupos observados con más detalle. Esto nos permitió tener una visión de la producción del conjunto de las clases, pero en general, la información que nos ofrecen solamente los trabajos escritos nos mantiene en un plano descriptivo sin permitirnos avanzar mucho en la interpretación. Esto cambia sustancialmente, cuando tenemos la posibilidad de coordinar la información que proviene de las carpetas de los niños con sus participaciones en las puestas en común o con sus intervenciones en los pequeños grupos.

Para enmarcar la lectura que sigue, hacemos a continuación una breve crónica sobre el desarrollo del trabajo en cada escuela, y señalamos (en itálica) las cuestiones que analizamos.

2. Dos escuelas, dos secuencias diferentes

2.1. Crónica del desarrollo en la Escuela Despertar

20 de agosto:

A. Se reparte a los alumnos el enunciado del problema de los triciclos y las bicicletas. Los alumnos producen soluciones en pequeños grupos. *Analizamos algunas de estas producciones en función del grado de generalidad que suponen.*

B. La profesora pide que dicten soluciones. Se escriben en el pizarrón 5 pares posibles y se solicita a los alumnos que los verifiquen. Los niños trabajan en las carpetas. Luego se comentan colectivamente y de manera rápida los resultados y la profesora institucionaliza cómo se hace para verificar. *Analizamos brevemente el sentido que tiene para algunos alumnos la verificación.*

C. La profesora plantea una serie de preguntas en las que, dado el valor de una de las variables, se pide el otro. En algunos casos se trata de valores que no pertenecen al dominio de la variable. Los alumnos trabajan individualmente y luego se realiza una puesta en común. *Analizamos brevemente el "beneficio" de esta tarea y advertimos sobre algunos posibles bloqueos.*

24 de agosto

D. La profesora plantea la cuestión del dominio de la variable "cantidad de triciclos". Los alumnos trabajan en pequeños grupos y luego se discute colectivamente. *Analizamos diferentes aspectos de la transición desde las constataciones empíricas a las explicaciones deductivas. Hacemos también una reflexión sobre la manera en que queda institucionalizada la noción de dominio y la función del argumento.*

E. La profesora introduce la fórmula. La cuestión de la exhaustividad de las soluciones queda sin tratar. *Señalamos brevemente la función que la docente le atribuye a la fórmula cuando la propone a la clase.*

25 de agosto

F. La profesora reparte los enunciados del problema de la yerba y la harina. Los alumnos trabajan en pequeños grupos y luego hay una discusión colectiva. *Analizamos las rupturas que introduce respecto del problema anterior el hecho de que ahora hay infinitas soluciones en un dominio racional: la ineficacia de algunos procedimientos que habían sido pertinentes, la necesidad de inventar escrituras para producir y para "contar" las infinitas soluciones, los problemas vinculados a la densidad de los racionales y al uso de las unidades y de la proporcionalidad directa.*

En las clases siguientes se propone el problema de las monedas. Para el desarrollo del mismo se organiza un dispositivo en cuatro etapas: 1) los alumnos trabajan individualmente para producir soluciones, discutir la cantidad de soluciones y explicar el procedimiento para obtenerlas todas; 2) los alumnos se reúnen en grupos de a cuatro y eligen un procedimiento común (o formulan uno nuevo entre todos); 3) La docente anota en el pizarrón los procedimientos surgidos de cada uno de los grupos y 4) se organiza un debate colectivo sobre los procedimientos.

27 de agosto

G. La profesora reparte el enunciado del problema de las monedas. Se desarrollan las etapas 1 y 2 descriptas recién. Al final de la clase se anotan en el pizarrón los cinco procedimientos surgidos de los grupos y los alumnos comienzan a analizarlos. Esta última actividad se retoma en la clase siguiente en la que también se desarrolla la etapa 4. *Describimos y analizamos las producciones de los diferentes grupos. Analizamos la potencia didáctica de la actividad de elegir un procedimiento entre varios en tanto apunta a la elaboración de criterios para evaluar un procedimiento.*

31 de agosto – 1 de septiembre

H. Se vuelve a copiar el pizarrón tal cual había quedado la clase anterior, con los procedimientos de cada grupo. Los grupos tienen un tiempo para analizar cada procedimiento y decidir con qué aspectos están de acuerdo y con cuáles no. *La actividad de juzgar los distintos procedimientos y establecer acuerdos y desacuerdos con los mismos, pone a prueba la propia producción como marco de análisis y estrategia de control del trabajo de los otros. En algunos casos da acceso a formas de pensar el problema más inteligibles que la propia.*

Se realiza luego un debate de todo el grupo alrededor de los procedimientos. Tres cuestiones relativas a la articulación aritmética-álgebra, son objeto de confrontación: el dominio de las variables, la suficiencia de una sola fórmula para producir las soluciones, y la posibilidad o no de obtener distinta cantidad de soluciones a través de diferentes procedimientos. Analizamos este debate. La última cuestión queda pendiente para la clase del 1 de septiembre en las que se les plantea a los alumnos primero una actividad individual y luego se vuelve al debate. *Analizamos distintos procesos a través de los cuales los alumnos dirimen la cuestión.*

2.2 Crónica del desarrollo en el Instituto Martín Buber[21]

25 de octubre

A. Se reparte el enunciado del problema de los triciclos. Los alumnos producen soluciones en pequeños grupos. *Analizamos estas producciones en función del grado de generalidad que suponen.*

B. Se realiza una puesta en común sobre la producción de soluciones que se desliza muy rápidamente a partir de las intervenciones de los alumnos, hacia la discusión de la cantidad de soluciones y el dominio de la variable "cantidad de triciclos". *Analizamos dicho deslizamiento y profundizamos la interpretación que habíamos hecho a propósito del trabajo en los pequeños grupos.*

C. La profesora "lanza" la pregunta por la fórmula. Se discute colectivamente durante 60 minutos. *Analizamos el proceso de negociación colectiva tanto de la comprensión acerca de qué es una fórmula como de las funciones que se le atribuyen. Nos detenemos en las intervenciones de ciertos alumnos que expresan un uso muy personal de las escrituras que producen y muestran con claridad el papel de sostén de su pensamiento que esas escrituras tienen para ellos.*

26 de octubre

D. La profesora retoma la discusión sobre la fórmula de la clase anterior, enuncia ella las distintas alternativas que aparecieron, muestra los usos que se pueden hacer, recuerda otros momentos en los que se han usado fórmulas y letras. *Reseñamos los conocimientos relativos a la articulación aritmética-álgebra que quedan institucionalizados.*

29 de octubre

E. La profesora distribuye el enunciado del problema de las monedas. Los alumnos trabajan en pequeños grupos. *Mostramos las dificultades de algunos alumnos para tratar las dos variables simultáneamente, reflexionamos a raíz de algunas producciones sobre los aportes y "bloqueos" del contexto particular de las monedas y analizamos condiciones para que sean los alumnos quienes se formulen preguntas sobre las escrituras.*

F. Se ponen en común las soluciones encontradas. Se discute dominio de las variables y cantidad de soluciones. *Las intervenciones docentes "empujan" a la generalización de los procedimientos más aritméticos.*

G. Vuelve a discutirse sobre usos y funciones de las fórmulas. *Identificamos las distintas funciones que los alumnos atribuyen a las fórmulas y el estatuto que tienen para ellos las letras. Analizamos el caso de un alumno que aspira a "delegar" en la escritura cierto control que otros alumnos ejercen ellos mismos.*

[21] Por razones de tiempo, en esta escuela no se trabajó con el problema de la yerba y la harina.

1 de noviembre

H. Cada grupo expone un procedimiento general para obtener soluciones. *El intercambio permite precisar las condiciones sobre las variables, negociar el uso de la fórmula para producir soluciones y establecer la cantidad de fórmulas que se necesitan para obtener los pares solución. La actividad se desarrolla en un nivel "meta" que suscita numerosas interacciones, muchas de ellas, vinculadas a " lo que está o no está permitido hacer". Estas discusiones le ofrecen a la docente la posibilidad de articular las producciones de los alumnos con los aspectos que quiere institucionalizar.*

3. El desarrollo en la Escuela Despertar

Como se desprende de la crónica, el trabajo en esta escuela se desarrolló a lo largo de cinco clases y media: las dos primeras dedicadas al problema de los triciclos, la tercera al de la yerba y la harina y las restantes al problema de las monedas. Realizaremos el análisis considerando la estructuración planteada en la presentación de las crónicas. Comenzamos entonces un análisis por clases.

3.1 El problema de los triciclos y las bicicletas en la Escuela Despertar

Recordamos el enunciado del problema:

> *El dueño de un negocio cuenta que en su depósito hay, entre triciclos y bicicletas, 100 ruedas. ¿Cuántos triciclos y cuántas bicicletas puede haber en el depósito?*

Acabamos de señalar que este problema se desarrolla en dos clases. En la primera se realizan la siguientes actividades: producción de pares solución (punto A), tareas de verificación (punto B), búsqueda de un valor en función de otro (punto C). En la segunda clase se discute sobre el dominio de la variable "cantidad de triciclos" (punto D) y la profesora introduce una fórmula para "producir soluciones" (punto E).

A. La producción de soluciones

Los alumnos producen soluciones con distinto grado de generalidad

Presentaremos en primer lugar un panorama de las interacciones iniciales del grupo con este problema y luego analizaremos cómo en algunos casos las relaciones puestas en juego a través de los procedimientos ofrecen retroacciones que hacen posible una evolución de los alumnos hacia un punto de vista más general y, en otros, se requieren intervenciones externas que "empujen" en esa dirección.

En nuestro análisis a priori, habíamos establecido como "frontera" entre los procedimientos aritméticos y los algebraicos, la posibilidad (o no) de tener una estrategia sistemática para producir soluciones y estar seguro de haberlas agotado. En este grupo de 18 alumnos, luego del primer momento en el que los niños trabajan en el problema y antes de que la profesora proponga pares de valores para verificar, el panorama es el siguiente: 3 alumnos, producen de entrada una tabla con todas las soluciones, usando el procedimiento que llamamos "covariación" (a partir de una primera solución, pasan a otra cambiando dos triciclos por tres bicicletas), 1 alumna escribe una fórmula en función de la cantidad de triciclos, 8 alumnos ponen en juego procedimientos que hemos llamado "aritméticos" aunque los mismos implican distintos niveles de generalidad, 3 alumnos no producen soluciones y 3 estuvieron ausentes ese día. Describiremos brevemente los tipos de procedimientos apoyándonos en ejemplos que consideramos representativos.

a) La perspectiva más general

1.Los alcances de la covariación

Sabrina y María Sol, -están entre las alumnas más "fuertes" del grupo- realizan la siguiente tabla[22]:

Pueden haber
32 TRI -- 2 BIC
30 TRI -- 5 BIC
28 TRI -- 8 BIC
26 TRI -- 11 BIC
24 TRI -- 14 BIC
22 TRI -- 17 BIC
20 TRI -- 20 BIC
18 TRI -- 23 BIC
16 TRI -- 26 BIC
14 TRI -- 29 BIC
12 TRI -- 32 BIC
10 TRI -- 35 BIC
8 TRI -- 38 BIC
6 TRI -- 41 BIC
4 TRI -- 44 BIC
2 TRI -- 47 BIC
0 TRI -- 50 BIC

Lo que hicimos fue ir sumando 6 ruedas a uno y restándole al otro, entonces siempre compensa 100.

Si bien la escritura "habla" acerca de la exhaustividad del procedimiento, el registro que hemos tomado de las interacciones entre ellas permite conocer mejor algunas ideas de Sabrina. Esta alumna dice de entrada que la cantidad de triciclos debe ser par (aunque ella lo expresa de forma más imprecisa, diciendo *"tiene que ser un número en el que 3 sea par"*), halla una *"primera solución"* que es 32 triciclos y 2 bicicletas y a partir de ahí propone que *"seguís restándole de a 6....o sea vas restándole de a 2, porque son 6 ruedas...como los triciclos tienen*

[22] Copiaremos los escritos de las carpetas en lugar de reproducirlos, siempre que consideremos que de esa manera no se pierde información.

3 ruedas, tienen que ir de a 6, porque sino nunca se va a complementar. Entonces les vas restando de a dos, porque suman 6 ruedas".

Dar como primera caracterización sobre la variable "cantidad de triciclos" una condición sobre su dominio de variación en lugar de buscar un valor particular, muestra que Sabrina ha considerado aunque sea de manera implícita la estructura del cálculo que permite obtener pares solución[23]. Aunque haya razonado sobre un ejemplo particular (cosa que no sabemos) es claro que el mismo tuvo un carácter genérico que le permitió establecer de entrada la condición. Reconocemos en este tratamiento global de la relación que hace Sabrina, otros elementos que caracterizan su trabajo como "algebraico" (Vergnaud, G;et. al; 1987)[24] además de los que habíamos identificado a priori a propósito de la estrategia de covariación.

Por otra parte, el hecho de que Sabrina al abordar el problema, rápidamente diga que las ruedas de los triciclos *"van de a seis"* nos lleva a suponer que ella ha anticipado que hay varias soluciones y que ha identificado como finalidad de la tarea que enfrenta, el obtenerlas todas, finalidad que plasma a través de la tabla que mostramos más arriba. Observemos que en su producción escrita hay trazas del producto (todos los pares solución) y del proceso (la nota que indica la forma de pasar de un "renglón" a otro).

Una vez producida la tabla, Sabrina dice: *"Nosotros habíamos pensado en el mínimo común múltiplo entre 2 y 3. Lo dejamos de lado porque pensamos que no había servido; pero después probando nos dimos cuenta de que siempre le sumaba 6 a uno y le sacaba 6 a otro y el 6 era el mínimo común múltiplo y siempre se repetía esto hasta que daba 32".* Observamos que hay una primera anticipación acerca del mínimo común múltiplo entre 2 y 3 que en principio es dejada de lado pero que luego es retomada cuando, a partir de pensar en los triciclos y las bicicletas, estas alumnas establecen el paso "6 ruedas". Si bien esto no se profundiza en la clase, nos muestra un aspecto interesante a considerar: el contexto extra matemático ofrece una información que puede ser reinterpretada –esto es analizada y justificada- en términos numéricos en el contexto "interno" de las ecuaciones.

Desde el punto de vista de nuestro análisis, señalemos que el haber accedido a las explicitaciones de Sabrina mientras iba resolviendo el problema con su compañera, nos permitió profundizar la interpretación de su escrito que, por sí solo, no "muestra" el alto grado de anticipación puesto en juego por esta alumna.

[23] En el análisis a priori hemos detallado los razonamientos posibles subyacentes a esta cuestión.

[24] Nos referimos a la oposición que hace Vergnaud entre un tratamiento algebraico que considera en simultáneo el conjunto de relaciones de un problema versus un tratamiento aritmético que supone una resolución "paso a paso".

2. La fórmula de despeje

Dejemos hablar ahora a la escritura de Julieta, la única alumna del curso que propone una fórmula:

30 triciclos - 90 ruedas
5 bicicletas - 10 ruedas

20 triciclos - 60 ruedas
20 bicicletas - 40 ruedas

10 triciclos - 30 ruedas
35 bicicletas - 70 ruedas

2 triciclos - 6 ruedas
47 bicicletas - 94 ruedas

32 triciclos - 96 ruedas
2 bicicletas - 4 ruedas

4 triciclos - 12 ruedas
44 bicicletas - 88ruedas

6 triciclos - 18 ruedas
41 bicicletas - 82 ruedas

8 triciclos - 24 ruedas
38 bicicletas - 76 ruedas

12 triciclos - 34 ruedas
32 bicicletas - 64 ruedas

14 triciclos - 42 ruedas
28 bicicletas - 56 ruedas

50 bicicletas - 100 ruedas
0 triciclos - 0 ruedas

ruedas

$(100 - x \cdot 3) : 2 =$

triciclos bicicletas

Julieta pone en juego una concepción de la función como proceso: encontrar la cantidad de bicicletas a partir de la cantidad de triciclos. Observemos que la fórmula no tiene nada escrito a la derecha del signo "=", lo que nos lleva a pensar que la está concibiendo como un resumen del procedimiento que utiliza para obtener soluciones. Por otro lado, con esta escritura evita usar dos letras -una para cada variable- dejando "en blanco" la variable "cantidad de bicicletas".

Si bien el procedimiento usado "contiene" los elementos necesarios para establecer el dominio de la variable y la cantidad de soluciones, Julieta no considera estos aspectos de manera espontánea y, como veremos luego, cuando debe explicitar las razones por las cuales la cantidad de triciclos debe ser par, utiliza otra escritura.

b) Los procedimientos aritméticos

Entre los alumnos "aritméticos" algunos suponen con bastante convicción que el problema tiene solución única, en tanto que otros obtienen varias soluciones pero, no lo hacen a través de un procedimiento que puedan identificar –y entonces controlar- claramente.

Entre quienes sostienen la unicidad, algunos realizan ensayos y otros "van directo" a la solución. La distinción es importante porque pareciera que el hecho mismo de realizar ensayos ofrece indicios de que hay otras soluciones.

Para realizar los ensayos, en general los alumnos proponen las dos cantidades simultáneamente y verifican si suman o no 100 ruedas, sin invertir las operaciones. Todo ocurre como si no se hubieran dado cuenta de que, fijada una de las cantidades, la otra queda determinada y las trataran como valores independientes. Esta relación de dependencia entre las variables –lo analizamos a priori- aparece más oculta en los problemas de solución única en los que los alumnos operan con los datos sin tomar conciencia de la relación entre ellos. El introducir un grado de libertad permitiría poner en evidencia algo del "pasado" escolar de los alumnos. Matías por ejemplo, se comporta al principio buscando **la** solución, prueba con 25 bicicletas y 25 triciclos, *"porque 50 bicicletas son 100 ruedas, entonces hago mitad y mitad"*. Al constatar que esta solución no sirve, prueba con 10 triciclos y 40 bicicletas sin darse cuenta –como decíamos recién- de que la cantidad de triciclos propuesta determina la cantidad de bicicletas. Realiza luego varios ensayos hasta que finalmente obtiene 30 triciclos y 5 bicicletas y, a continuación de esta primera solución, sigue probando y encuentra otro par.

No todos los alumnos que parten de una idea de unicidad y que realizan ensayos, siguen buscando soluciones luego de obtener el primer par. Veamos la carpeta de Estefanía:

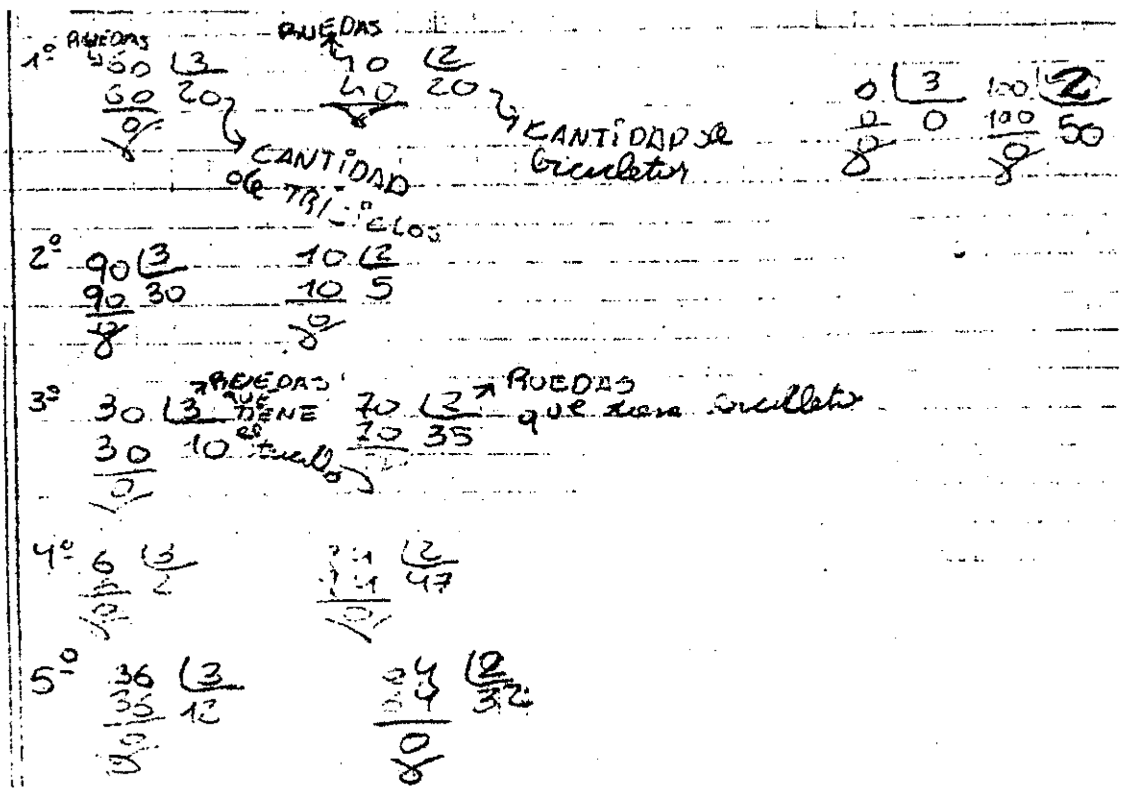
20 b ---- 40 ruedas
20 t ---- 60 ruedas
100 ruedas

RTA: En el depósito puede haber 20 bicicletas y 20 triciclos

No sabemos si la palabra "puede" que usa en su respuesta, da cuenta de que considera la respuesta como una posibilidad entre otras o si simplemente está respondiendo en el mismo formato en el que se formula la pregunta.

Para los alumnos que "van directo" a una única solución, el problema queda cerrado luego de hallarla. Es el caso de Guido, que hace 2+3 = 5, 5 x 20 = 100 y pone como respuesta que hay 20 bicicletas y 20 triciclos. Al haber agregado de manera implícita la condición *"igual cantidad de triciclos que de bicicletas"*, Guido pone en juego un procedimiento aritmético que lo lleva a esa solución sin poder hallar en lo que hizo, algún indicador que le haga suponer que hay otras.

Los alumnos **que obtienen varias soluciones** en general "parten" el 100 en dos cantidades, dividen una de ellas por dos y la otra por tres. Pensamos que el hecho de partir el número, por un lado oculta que se están tomando decisiones para atribuir los valores a las cantidades de ruedas y, por otro lado, hace difícil que se controlen todas las particiones posibles. Señalemos además que, a través de esta estrategia, los alumnos operan con un dato (el 100) y obtienen a través de sendas divisiones, los dos valores en cuestión (cantidad de triciclos y cantidad de bicicletas). En este sentido, el procedimiento no llega a enfrentar a sus ejecutores con la ruptura que supone atribuir valores ni "muestra" la relación de dependencia entre las variables. Veamos a modo de ejemplo, la carpeta de Silvina:



¿Cuáles son las palancas que "mueven" las estrategias utilizadas y favorecen un avance en las relaciones que los alumnos hacen a propósito de este problema? En este caso ha sido importante la decisión de la profesora de solicitar al conjunto de la clase que propongan pares solución y que los verifiquen. Es este episodio el que analizaremos a continuación.

B. El papel de la verificación

Recordemos que luego de una primera –y bastante breve- etapa en la que los alumnos producen soluciones, la profesora pide a la clase que le dicten soluciones, anota cinco pares en el pizarrón y pregunta a los alumnos cómo se puede comprobar que esas soluciones son correctas. Los alumnos más flojos, que no habían podido proponer ninguna solución, "arrancan" a partir de esta tarea, **lo cual muestra las distancias entre producir y verificar**.

Para quienes supusieron -y sostuvieron- que había una única solución, aparece acá una primera retroacción. En general, para los alumnos que pusieron en juego procedimientos aritméticos, **la verificación supone un comienzo de generalización**. Es claro que esta tarea es menos productiva para los alumnos que desplegaron procedimientos de tipo "algebraico". Veamos algunos casos de niños "aritméticos".

Estefanía por ejemplo, (fue citada más arriba) que había escrito en su carpeta: "en el depósito puede haber 20 bicicletas y 20 triciclos" anota ahora:

$\boxed{B}$	$\boxed{T}$
47x2	2x3
$\boxed{94}$	$\boxed{6}$
35x2	10x3
$\boxed{70}$	$\boxed{30}$
5x2	30x3
$\boxed{10}$	$\boxed{90}$
44x2	6x3
$\boxed{88}$	$\boxed{18}$

La tarea "mueve" la relación $3\ t + 2\ b = 100$ e informa que hay por lo menos varios pares de números que la verifican, aunque no sea suficiente para producir pares ni para establecer la dependencia entre las variables.

Silvina (también citada más arriba) que había propuesto varios pares solución, escribe:

"Para ver si está bien o está mal hacer

Cantidad de triciclos x 3 = X

Cantidad de bicicletas x 2 = X

Luego sumar los dos resultados y te tiene que dar 100".

Silvina anota un procedimiento general de verificación refiriéndose a las variables con nombres y letras (aunque use la misma letra para ruedas de triciclos y ruedas de bicicletas).

En la puesta en común, la profesora pregunta a los alumnos cómo verificaron algunos de los pares dados y establece un procedimiento general de verificación:

Profesora: *O sea si yo entro con una solución, la manera de verificar si está bien o está mal es la siguiente: multiplico la cantidad de bicicletas ....*

Varios alumnos (interrumpiendo): por dos

Profesora: *la cantidad de triciclos por tres, y todo eso sumado, me tiene que dar 100.*   (Varios alumnos se superponen con la profesora "coreando" lo que ella dice).

Pensamos que las expresiones "*una solución*", "*cantidad de bicicletas*", "*cantidad de triciclos*", "*eso sumado*", "empujan" hacia una visión más general del problema.

C. La búsqueda de un valor a partir de otro dado

Recordemos que luego de verificar algunos pares, la profesora propone hallar valores a partir de otros dados. El formato de la tarea es el siguiente[25]:

¿Puede haber 28 triciclos? En ese caso, ¿cuántas bicicletas habría?   *¿Puede haber 8 bicicletas? En ese caso, ¿cuántos triciclos habría?*   *¿Puede haber 17 triciclos? En ese caso, ¿cuántas bicicletas habría?*   *¿Y 16 bicicletas?*   *¿Puede haber 35 triciclos?*   *¿Y 52 bicicletas?*

Si bien cada pregunta aislada puede ser considerada como un problema aritmético del tipo de los que los alumnos vienen resolviendo desde hace bastante tiempo, el conjunto de preguntas moviliza las siguientes cuestiones: a) la dependencia entre las variables, b) la inversión de las operaciones para "despejar" un valor en función del otro, c) la posibilidad de comenzar por una u otra variable, d) el hecho de que no cualquier valor es posible y e) las cotas del dominio de variación.

Muchos de los alumnos que no habían invertido las operaciones en la primera etapa del problema, usan ahora la resta y la división para responder las cuatro primeras preguntas y son capaces de interpretar correctamente el resultado no entero de la división para el caso de 17 triciclos y de 16 bicicletas. Sin embargo, hay en este grupo cuatro alumnos muy flojos que siguen usando solamente sumas y multiplicaciones. Tomemos el ejemplo de una de ellas, Roxana, que cuando busca la cantidad de triciclos correspondiente a 8 bicicletas dice: "*8 bicicletas son 16 ruedas, faltan 84 para las ruedas de los triciclos, y entonces tengo que buscar en la tabla del tres, qué número da 84*". Si bien la manera de pensar de Roxana es correcta, nos preguntamos si ella es capaz o no de invertir la multiplicación. En realidad no tenemos elementos para establecerlo y no sabemos cuánto influye en su estrategia, el hecho de que se acaban de institucionalizar la suma y la multiplicación como herramientas para la verificación. Sin embargo, el constatar que son los alumnos más flojos los que se aproximan por multiplicaciones para responder estas preguntas, nos lleva a pensar que la relación entre

[25] Esta tarea no fue analizada a priori, dado que la profesora la propone por decisión propia.

multiplicación y división no ha sido elaborada aún por estos alumnos y es claro que la tarea que estamos analizando no fuerza a dicha elaboración[26].

D. El dominio de la variable "cantidad de triciclos" y la producción de argumentos

Una vez que los alumnos se han "encontrado" a partir de la tarea anterior con el hecho de que ciertos valores "no pueden ser", la profesora lanza la consigna de buscar el dominio de la variable "cantidad de triciclos" y dedica a esta cuestión toda una clase. La consigna es planteada de la siguiente manera:

Profesora: Bien, parece por los ejercicios que hicimos que algunos valores sirven y otros no. Fíjense que con 16 bicicletas no podíamos encontrar la cantidad de triciclos y con 35 triciclos tampoco porque nos pasamos de la cantidad de ruedas. ¿Podríamos de alguna manera saber si una cierta cantidad de triciclos puede ser o no, sin necesidad de hacer las cuentas? Por ejemplo, si alguien entra y dice, "¿puede haber tanta cantidad de triciclos?", ¿podríamos contestarle enseguida? Trabajen de a dos, escriban las conclusiones y después discutimos.

Hay en esta consigna **una idea que es nueva para los alumnos, la de anticipar condiciones sobre los valores que puede tomar una variable** Algunos niños se resisten a aceptar que "valga la pena" saber eso y otros no terminan de comprender lo que se pide.

Guido:	*Alguna cuenta siempre hay que hacer.*
Profesora:	*La idea sería saber si no podemos hacer algún razonamiento antes, para después saber siempre, sin hacer cuentas.*
Guido:	*Pero una cuenta de dos cifras por tres, mentalmente no es difícil, o con la calculadora. Entonces ni bien te dicen un número, lo hacés al toque y ya sabés cuántas ruedas de bicicleta tenés.*
Profesora:	*Lo que estoy preguntando es si podemos encontrar una condición, así cuando nos dan un número, si cumple la condición ya sé que puede ser y si no la cumple, ya sé que no puede ser. Cada uno escribe.*

La consigna se va negociando paulatinamente y son necesarias en los pequeños grupos, varias intervenciones de la docente, como la recién citada, para que los alumnos comiencen a trabajar.

[26] Por el hecho de estar en séptimo grado, se supone que los alumnos manejan la relación entre multiplicación y división y, la entrada al álgebra se realiza en nuestro sistema de enseñanza bajo ese supuesto. Los resultados que estamos analizando nos advierten sobre la necesidad de indagar -no ya en el marco de nuestro trabajo- hasta qué punto la inversión de las operaciones aritméticas es un objeto de enseñanza específico, al cual no se puede renunciar.

Analizaremos a propósito de esta tarea el trabajo de algunos alumnos que muestra aspectos de la transición desde constataciones empíricas hacia argumentos deductivos más generales. Luego nos detendremos en las institucionalizaciones de la docente en la fase colectiva.

La mayoría de los alumnos comienza diciendo que la cantidad de triciclos tiene que ser par *"porque lo veo en la tabla"*. Entre ellos hay quienes frente a la demanda de explicaciones por parte de la docente evolucionan autónomamente hacia argumentos deductivos en tanto que otros alumnos sólo pueden hacerlo a partir de una interacción bastante sostenida con la profesora. Citaremos entre los primeros a Julieta y analizaremos el caso de Estefanía como ejemplo de los segundos. En estos ejemplos contrastaremos las interacciones entre las alumnas y la profesora con las producciones escritas de las niñas.

Julieta produce un argumento de manera casi autónoma

Julieta, luego de pensar un momento muy corto la tarea, llama a la profesora:

Julieta:	*Siempre son pares, me di cuenta mirando la tabla. Ahora lo que no sé son las bicicletas.*
Profesora:	*No, pero estamos trabajando sobre la cantidad de triciclos. ¿Y por qué tienen que ser pares, te das cuenta?*
Julieta:	*No, la verdad que no.*
Profesora:	*O sea, los que ves en la tabla son siempre pares, pero tratá de explicar por qué.*

La pregunta de la profesora informa que hay razones y Julieta pareciera comprenderlo, aunque en principio no acceda a ellas[27]. El hecho de que pueda reconocer que no sabe por qué debe cumplirse esa condición, nos lleva a interpretar que Julieta distingue entre "verdad" y "razones de la verdad" o, en otros términos, entre descripción y explicación (García, R; 2000). Esta alumna logra luego producir de manera autónoma un argumento deductivo y es este hecho el que nos hace pensar que la distinción que ella hace al principio, genera buenas condiciones para moverse hacia la elaboración de una explicación basada en la deducción. Esto mostraría que habría otras vías para la construcción del sentido del razonamiento deductivo, -la necesidad de encontrar una explicación- además de aquellas identificadas por otros investigadores que

[27] Señalemos que las explicaciones de los alumnos respecto de la obtención de soluciones en la fase anterior, basadas en el relato de acciones sin ahondar en los fundamentos, por ejemplo *"hice 100, menos la cantidad de triciclos por tres, dividido 2"* conformaron a la profesora que –probablemente sin tener conciencia de ello- no fue más allá en la indagación. Todo ocurre como si la profesora se centrara en la fundamentación de aquello que es nuevo y aceptara sin fundamentación aquello que ya está elaborado. Es una de las maneras posibles de lograr que los alumnos comiencen a discriminar "lo que se sabe y por lo tanto puede ser usado como punto de apoyo sin justificar" de aquello para lo cual "es necesario proponer una argumentación".

trabajaron sobre la hipótesis de que dicho sentido se adquiere cuando la constatación empírica no ofrece elementos suficientes para acceder a la verdad (Arsac, G.;1992).

Veamos más de cerca la producción de Julieta:

Julieta:	*Todo lo que se multiplica por 2, no sé si estoy en lo correcto, va a dar siempre un número par.*
Profesora:	*Muy bien*
Julieta:	*Entonces, si todo lo que se multiplica por 2 da un número par, el triciclos* ***obligatoriamente*** *tiene que dar un número par, porque la* ***suma del número par + la suma del número par te va a dar 100. Entonces si el triciclos me va a dar 67, nunca me va poder dar*** *porque por 2 siempre va a dar un número par, entonces no me va a dar 100,* ***nunca,*** *porque 100 es un número par. Entonces, ¿qué pasa?....*[pausa], *dejame pensar. Por eso* ***siempre*** *cuando multiplicás un número par por 3 siempre te va dar un número par y, cuando multiplicás por 2* ***te va a dar*** *un número par. Entonces tiene que cumplir la regla que los triciclos* ***tienen que ser pares*** *para que las bicicletas x 2 te dé un número par, o sea 100.*
Profesora:	*La cantidad de bicicletas por 2 siempre tiene que dar un número par. Si la cantidad de triciclos fuera impar, ¿qué pasaría?*
Julieta:	*No te va a dar un número par.*
Profesora:	*¿Qué cosa no te va a dar un número par?*
Julieta:	*Las ruedas de los triciclos*
Profesora:	*O sea que si vos hacés 3 por un número impar, ¿qué da?*
Julieta:	*Te va a dar impar, entonces si sumás un impar más un par nunca te va a dar par.*
Profesora:	*Muy bien, explicalo por escrito.*

Si bien la primera argumentación de Julieta es bastante imprecisa[28], hay en su explicación elementos que permiten asegurar que comprende que necesariamente la cantidad de triciclos debe ser par (algunos de ellos los hemos señalado en "negrita"). A partir de las intervenciones de la profesora, se refiere a las variables de manera general y deja de apoyarse en ejemplos numéricos.

Escribir la explicación cumple para esta alumna la función de ayudar a ver lo pensado y lo dicho de una manera diferente (Olson, D; 1998).

Veamos:

[28] No estamos en este trabajo centrados en la problemática del razonamiento y es por eso que no nos detenemos a analizar las imprecisiones del argumento, que son a nuestro juicio bastante evidentes. Sólo nos interesa mostrar la transición desde la constatación empírica ("lo veo en la tabla") al argumento deductivo.

Escritura de Julieta

triciclos

3.x + x.2 = cantidad de ruedas = 100

bicicletas

par

si es impar x par = da par

par x par = da par

Rta: Si los triciclos . 3 = da par

Porque si triciclos es impar + par = no te da par

Porque decimos que es par + par, porque las bicicletas cumple una regla que es todo lo multiplicado x 2 es par

Un número par . 3 + x . 2 = 100

Cualquier número

Los triciclos tiene que ser igual o menor de 32

Notemos que la escritura de Julieta es diferente de la que planteó al inicio del problema cuando se trataba de producir soluciones (ver página 206). Es claro el uso personal, alejado de las convenciones - usa la misma letra para las dos variables- que ella está haciendo de la escritura simbólica. Esta escritura no cumple la función "algebraica" de "soportar" transformaciones que aportarían nueva información, (nos hemos referido en el capítulo 2 a numerosos autores que tratan esta cuestión), sino que pareciera serle útil para "sostener" ideas cuya verbalización le resultó bastante difícil. Si bien el argumento no está completamente encadenado - confunde en un momento "cantidad de triciclos" con "cantidad de ruedas de triciclos" y no explicita que 3 por un impar es impar- son evidentes los progresos con respecto a su primera oralización[29].

Estefanía "necesita" de la profesora para abandonar lo empírico

Decíamos antes que algunos alumnos no lograron elaborar un argumento de manera autónoma y sí pudieron aproximarse al mismo a través de la interacción con la docente. Analizaremos el caso de Estefanía que estaba trabajando con Luana, una alumna muy floja[30]:

[29] En realidad hay otra imprecisión: ella expresa que la variable "cantidad de bicicletas" puede ser cualquier número. Al no haber trabajado sobre el dominio de esta variable y constatar que la misma toma valores pares e impares, ella parece pensar que puede tomar cualquier valor.

[30] Aunque las intervenciones de Luana que es una alumna muy floja, juegan algún papel, nuestro análisis está centrado en Estefanía.

Estefanía:	*En la tabla todos los triciclos son pares.*
Profesora:	*¿No podría haber una cantidad impar de triciclos?*
Estefanía;	*Nosotras acá probamos el 35 que es impar y no pudo.*
Profesora:	*¿Y qué otro no pudo?*
Estefanía:	*Ya te digo, 16 bicicletas.*
Profesora:	*16 bicicletas, pero estamos viendo los triciclos, 16 es par, pero es bicicletas, de triciclos, 17 triciclos no puede ser.*
Estefanía:	*No.*
Profesora:	*Piensen si es cierto que no puede haber ninguna cantidad impar de triciclos, porque de bicicletas sí puede haber cantidad impar, por ejemplo, 5 bicicletas y 30 triciclos, o sea que cantidad impar de bicicletas sí puede haber, cantidad de triciclos por qué no puede haber*

Estefanía piensa un tiempo y no parece tener muchos elementos para avanzar. Por el momento, esta alumna "ve" que los valores que ella dispone corresponden a cantidades pares de triciclos. La profesora le pide que calcule la cantidad de bicicletas para 5 triciclos. Estefanía hace la cuenta y dice *"da con coma"*. La intención de la docente es tomar esa cuenta como "modelo" para analizar y llegar a establecer a partir de ahí la razón por la cual la cantidad de triciclos debe ser par. En ese momento interviene Luana, como ya dijimos una alumna muy floja que trabaja con Estefanía:

Luana:	*Da con coma porque todos son números impares.*
Profesora	*¿Cuáles?*
Luana	*Acá está el 5, que es número impar, el 15 y el 85.*
Profesora:	***¿Y por qué te dan impares?***
Estefanía:	***Tengo un número impar por un número impar.*** *Vos sabés que si ya tenés un número impar por un número impar nunca te va a poder dar un número par.*
Profesora:	*Eso es impar, muy bien, entonces? Explíquenme qué están pensando.*
Estefanía:	*Si la cantidad de triciclos, en este caso 5, por 3 , que es impar, nunca te va a dar un número par*
Profesora:	*¿Entonces? ¿Éstas* (por el 15) *qué son?*
Estefanía:	*Estas son las ruedas de los triciclos.*
Profesora:	*Si las ruedas de los triciclos son impar, ¿qué pasa?*
Luana:	*Ya todo es impar.*
Profesora:	*¿Por qué?*
Luana:	*Porque vos tenés que restarle 100 menos 15..*
Estefanía	***Te va a dar un número impar.***
Profesora:	***¿Por qué?***
Estefanía:	*Porque 15 es número impar y 100 menos un impar te va a dar un impar*
Profesora:	*¿Siempre?*
Estefanía:	(Dudando).*Sí....Sí siempre.*

Profesora:	*A ver , ¿cómo lo podés explicar?*
Estefanía:	***100 – 13,... 100 – 11.***
Profesora:	*Esperá, si la cantidad de ruedas de tricicios es impar, ¿qué pasa?*
Estefanía:	***Ya todo va a ser impar.***
Profesora:	*¿Qué va a ser impar?*
Estefanía:	*Las ruedas de triciclos.*
Profesora:	*Muy bien, si las ruedas de triciclos quedan impar, qué pasa?*
Estefanía:	*Después cuando lo restás a 100..te va a dar impar*
Profesora:	*Y 100 menos ese número, ¿qué vendría a ser?*
Estefanía:	*Las ruedas de las bicicleta y dividido 2 da con coma.*
Profesora:	*Bueno escriban eso que me explicaron a mí.*

Pensamos que toda la interacción muestra que la intención de la profesora de introducir un cálculo como ejemplo genérico ha sido en este caso útil para que Estefanía pueda comenzar a pensar de manera más general. El alcance de las preguntas "porqué"(señaladas en negrita) que hace la docente, va más allá del cálculo específico en cuestión y esto es interpretado por Estefanía, quien responde las dos veces trascendiendo el cálculo numérico del que "se habla". Sin embargo, cuando tiene que argumentar porqué siempre 100 menos un impar da impar, comienza a proponer ejemplos. La intervención posterior de la profesora pareciera mostrar que ella "abandona esa lucha" en pro de obtener que Estefanía redondee el argumento sin entrar en la fundamentación de todas las proposiciones que lo componen.

Veamos cómo anota esta alumna su conclusión:

> Si me dan un número impar, si lo multiplico x 3 (que es otro número impar). No puede ser posible que te de número par, para poder dividirlo x 2 (que es número par). El número que me dé tiene que ser par.

La explicación de Estefanía recorta sólo una parte del argumento y está tan referida a su interacción con la profesora, que no puede ser comprendida sin tener en cuenta esa conversación. Dado que la docente no re trabajó las conclusiones escritas de los alumnos, no podemos saber qué retroacciones podrían haber sido consideradas por esta alumna para precisar su argumento escrito. Es probable que ella, al no separar claramente lo hablado de lo escrito, no pueda detectar los "agujeros" entre sus premisas y su conclusión. Hacemos la hipótesis de que si se sometiera su explicación a la consideración de quienes no participaron de la interacción oral, sería posible que Estefanía obtuviera una retroacción que la ayudara a pulir su argumento escrito. **Estaríamos en ese caso frente a una situación en la que se avanza de lo empírico hacia lo deductivo para obtener una explicación para sí mismo y que esta explicación se enriquece si se confronta su capacidad explicativa con otros que no intervinieron en su elaboración.**

Los dos ejemplos que hemos analizado, que representan lo sucedido en la clase, muestran que los alumnos son capaces de entrar en un juego deductivo para enriquecer la comprensión de un hecho, aunque no haya dudas acerca del valor de verdad de aquello que se quiere explicar. En el ejemplo que analizamos, muchos alumnos tenían todas las soluciones y podían constatar que en todos los casos la cantidad de triciclos es par. Sin embargo, esos mismos alumnos aceptaban que la constatación no explicaba lo que ocurría y buscaron argumentos que los posicionan en una perspectiva más teórica que práctica.

La institucionalización del dominio de variación

Las explicaciones que escriben los alumnos en sus carpetas no son retomadas en la fase colectiva, en la que la profesora "orienta" el diálogo con un alumno para que "produzca" las razones por las que la cantidad de triciclos debe ser par. También a través de un contraejemplo introduce la cota superior del intervalo de variación. Se establece entonces que la cantidad de triciclos debe ser par y menor o igual que 32. Finalmente la profesora enuncia:

La cantidad de triciclos tiene que ser par y menor o igual que 32. Entonces ya tenemos una condición que no tiene que ver con una cuenta. Si ahora entra alguien y me pregunta si puede haber 12 triciclos, le digo que sí. No necesito hacer ninguna cuenta.

Notemos que la docente destaca el valor anticipatorio que tiene conocer el dominio, aspecto que se podría haber destacado sin alentar la producción de argumentos por parte de los niños. De hecho no estaba en duda que la cantidad de triciclos debía ser par. **No recupera en cambio, el aspecto explicativo del trabajo realizado** ni la diferencia entre "ver" en la tabla y saber porqué. En este caso, los aspectos enfatizados por la docente en las interacciones en los pequeños grupos son diferentes de los realizados en la fase colectiva. Queda implícito el "corrimiento" de los alumnos hacia la argumentación teórica, que se intentó favorecer durante la actividad. Hacemos una especulación al respecto: si bien la docente tiene identificada la entrada de los niños en el razonamiento deductivo como objeto que entra en la esfera de sus responsabilidades de enseñante, no considera que comprender mejor sea un motor suficiente para que los alumnos entren en esta práctica y valoriza más "el conocer la verdad" como un elemento que la justifica.[31]

E. La introducción de la fórmula

Luego de haber cerrado la cuestión del dominio de variación la profesora pregunta cómo se pueden obtener todas las soluciones, con el objetivo de introducir la fórmula para esa

[31] Observemos también que en la institucionalización la docente identifica que si la cantidad de triciclos es par, hay solución, pero no explicita qué sucede si la cantidad de triciclos fuera impar, aspecto que sí trató con los alumnos en los pequeños grupos en los que participó de estas discusiones.

función. Cuando una alumna comienza a relatar el procedimiento de covariación, la profesora la interrumpe preguntándole cómo se obtiene la cantidad de bicicletas si se conoce la cantidad de triciclos. Leyendo el registro, es claro que no le "conviene" ahora la covariación y "necesita" el despeje. Veamos un pequeño tramo de esta etapa:

Profesora:	*¿Cómo se hace para obtener la cantidad de bicicletas si se conoce la cantidad de triciclos?*
Matías:	*Ya lo hicimos*
Profesora:	*Pero en general, quiero tener una....*
Sabrina:	*cien menos el número de triciclos por tres, y todo dividido dos.*
Profesora:	*¿Y esto qué da?*
Sabrina:	*La cantidad de bicicletas*
Profesora:	*Con esto tenemos una manera de armar soluciones, dándole a la cantidad de triciclos un valor par menor o igual que 32.*

En el pizarrón queda anotado

$$B = (100 - 3\,T) : 2$$
$$\downarrow$$
número par menor que 32

María Sol:	*En vez de hacer siempre así, la formulita, íbamos restando por ejemplo, a uno le restábamos 6, 6 ruedas, o sea lo de triciclos y al otro, el de las bicicletas le sumábamos 6.*
Profesora:	*¿Qué quiere decir T?*
A1:	*Triciclos*
A2:	*No, ruedas*
Profesora:	*¿Cantidad de qué?*
A1:	*Cantidad de triciclos*
Profesora:	*Cuando lo multiplico por 3, ¿qué da?*
Varios:	*Cantidad de ruedas*
Profesora:	*¿Y cuando hago 100 – 3T?*
Varios:	*Ruedas de bicicletas*
Profesora:	*¿dividido 2?*
Varios:	*Bicicletas*

La profesora retoma luego el procedimiento de covariación sin confrontarlo con el de generar soluciones a partir de la fórmula, con lo cual no quedan explicitadas ventajas o desventajas de uno y otro. La idea de que la fórmula sería un instrumento general para producir soluciones queda completamente diluida en la medida en que los alumnos no ponen en funcionamiento ni este, ni ningún otro uso.

Esta manera de introducir la fórmula no deja espacio para analizar esta fórmula entre otras posibles que los alumnos podrían proponer, restringiendo las cuestiones acerca de las cuales se podría discutir y dejando en un cono de sombra su carácter convencional. Como veremos a propósito del problema siguiente, -y como profundizaremos cuando analicemos el trabajo en la otra escuela en la que sí se ha previsto un espacio para las escrituras personales- los alumnos elaboran significados y proponen usos que no necesariamente coinciden con los convencionales. Se plantea así una distancia entre las elaboraciones que cada alumno pudiera realizar y los usos y formas que el docente quiere hacer circular que, en el caso de esta clase, cada alumno tendrá que recorrer de manera privada. La cuestión de la cantidad de soluciones del problema queda sin tratar.

Breve resumen del desarrollo del problema de los triciclos en la Escuela Despertar

Acabamos de analizar dos clases dedicadas al problema de los triciclos y las bicicletas.

Los alumnos han enfrentado tres grandes cuestiones vinculados a nuestra problemática, nuevas para ellos: la dependencia entre las variables, la noción de dominio de variación y la producción de argumentos deductivos basados en propiedades numéricas para justificar el dominio de una variable.

Hemos visto que la verificación de pares es una tarea más accesible que la producción y funciona como un elemento que "mueve" a la comprensión del problema y a la generalización del mismo. La búsqueda de un valor en función del otro, pone de relieve la cuestión de la dependencia, favorece la inversión de las operaciones y permite interpretar en términos de valores posibles de las variables el resultado no entero de una división.

Muchos alumnos son capaces de valorar la explicación como un elemento para comprender mejor, de manera independiente del deseo de certeza.

Las producciones escritas de argumentos muestran distancia con respecto a las interacciones orales, lo cual nos muestra que poner por escrito aquello que se explicó oralmente no es un simple pasaje, sino de una actividad de producción.

La fórmula no logra instalarse con una función específica y la cuestión de la cantidad de soluciones no queda zanjada.

3.2 El problema de la yerba y de la harina en la Escuela Despertar

Recordemos el problema que vamos a analizar ahora:

Un comerciante tiene $ 100 para comprar harina y yerba. Estos productos se venden sueltos. El kilo de harina cuesta $ 2 y el de yerba $ 3. ¿Qué cantidades de harina y de yerba puede comprar?

El problema se desarrolla en una clase que tiene un momento de producción en pequeños grupos que ocupa la mayor parte del tiempo y otro momento colectivo muy corto. Analizamos los límites que los alumnos encuentran y las evoluciones que se favorecen, por el hecho de enfrentar un problema con un formato similar al anterior, pero con variables racionales. Las infinitas soluciones provocan desconcierto respecto de cómo representarlas y contarlas. La imposibilidad de nombrar todas las soluciones a través de una tabla favorece la producción de fórmulas. La noción de fórmula en la que a partir de un dato se obtiene otro "lleva" a algunos alumnos a proponer dos fórmulas, una para cada variable; reflexionamos sobre esta cuestión. Analizamos el caso de una alumna - María Sol- que en su intento de dar cuenta de las infinitas soluciones, realiza una producción original, esencialmente diferente de la que lleva a cabo para producir soluciones.

Señalamos finalmente algunas dificultades vinculadas al manejo de las unidades, de la proporcionalidad directa y de los números racionales.

Desarrollamos todos estos aspectos en el punto F.

F. Límites, evoluciones y dificultades a raíz de la introducción de lo infinito

a) Primeros rumores

Un primer comentario generalizado circula en la clase: *"es igual que el problema anterior"*. Alguien dice que no es igual porque *"se pueden hacer 100 gramos"*, otro alumno responde que el problema *"tiene algo igual y algo distinto"* y un tercero dice *"hay más soluciones que en el problema de los triciclos"*, sin llegar a establecer que son infinitas. A partir de estos comentarios que los alumnos hacen en voz alta, la profesora "llama al orden" para que los alumnos trabajen en los pequeños grupos.

b) Sabrina y María Sol abandonan la covariación

Sabrina y María Sol que en el problema anterior habían propuesto de entrada el procedimiento de covariación, se dan cuenta de que ahora esa estrategia no les permite "atrapar" todas las soluciones. Al constatarlo, llaman a la profesora y Sabrina le dice *"como son infinitas,* ***¿podemos hacer la fórmula en vez de toda la lista?****"* la profesora les dice que propongan y ellas escriben

($ 100 - x kg . 2) : 3 =
($ 100 - y kg . 3) : 2 =

María Sol dice: *"Y ahora hay que poner una cosa, que el X no puede ser 101 kilo, tiene que ser menor que 50. Acá puede ser impar, puede ser cualquier cosa"*

Agregan la condición sobre las variables:

($ 100 - x kg . 2) : 3 =	X kg = tiene que ser menor o igual que 50
($ 100 - y kg . 3) : 2 =	Y Kg = tiene que ser menor o igual que 33,333...

Notemos que son "fórmulas" en las que se muestra el algoritmo que permite despejar una variable en función de la otra. Notemos también que la variable "despejada" no se nombra y queda "en blanco" a la derecha del signo igual. La función es similar a la introducida por la profesora a raíz del problema anterior, aunque ella sí había usado dos letras, obviamente.

Recordemos que estas alumnas no sólo habían planteado en el problema de los triciclos la estrategia de covariación sino que además, María Sol, frente a la propuesta de fórmula de la profesora había "contraofertado" su estrategia. Ahora, pareciera que **ante a la imposibilidad de nombrar todas las soluciones, para estas alumnas que tienen y han tenido un enfoque general, la fórmula cobra un sentido más preciso**: representar lo infinito. No queda claro a partir de estas escrituras si las alumnas piensan que las dos fórmulas son necesarias o no; el trabajo que sigue de María Sol nos permitirá avanzar sobre condiciones didácticas para introducir el debate de esta cuestión.

c) Dos variables, dos fórmulas. El caso de Julieta

Ya hemos citado a esta alumna en el análisis del problema anterior. Su producción nos había interesado porque había propuesto dos escrituras diferentes, una para producir soluciones y otra como sostén para pensar el dominio de la variable triciclos. En ambos casos, había utilizado una sola letra. Esto persiste en este problema y, aunque sus fórmulas son prácticamente iguales a las de Sabrina y María Sol, la citamos porque en la medida en que Julieta pone dos "respuestas" queda más claro en esta producción que ella "necesita" dos fórmulas porque hay dos incógnitas para calcular. Efectivamente, las fórmulas representan procedimientos de cálculo en los que se obtiene un valor a partir de otro y, desde esa perspectiva, no hay equivalencia entre ambas fórmulas. Veamos:

Lo que cuesta cada kilo de harina

RTA: (100 - x . 3) : 2 =

Pesos yerba lo que cuesta cada kilo de yerba

Par

≤ 32

ejem: (100 - 0 . 3) : 2 = 50

50 kilos de harina

0 kilos de yerba

41 kilos de harina

6 kilos de yerba [da 17 parejas solución]

RTA: Puede ser cualquier número menor de 50 (el número es infinito)

La cantidad de kilos de yerba

(100 - x . 2) : 3 =

plata que tengo

cualquier número 0 hasta 50 que son infinitos

la plata por kilo de harina

la plata por kilo de yerba

(100 - 7 . 2) : 3 = 28,66

28,66 kilos de yerba

14 kilos de harina [da cinco ejemplos]

No sabemos si Julieta se da cuenta o no de que ambas fórmulas permiten generar los mismos pares[32] pero en todo caso su ubicación no la lleva a "ver" esa cuestión. La equivalencia sólo puede empezar a concebirse cuando los alumnos aceptan la fórmula como una ecuación a dos variables cuyas soluciones son pares de números (que son justamente los pares solución del problema). Más allá de cuál sea la idea de Julieta al respecto –sólo tenemos en este caso su producción escrita-, el trabajo de esta alumna nos lleva a pensar que seguramente en la clase coexistirán diferentes maneras de concebir la fórmula y que la discusión colectiva sobre las mismas debería promover que los alumnos comiencen a flexibilizar sus puntos de vista pudiendo articular el aspecto "procedimiento de cálculo" –seguramente el mayoritariamente instalado- con el aspecto "ecuación con dos variables cuyas soluciones son pares". Esta flexibilización, que implica transformaciones en las funciones que se le atribuyen a una escritura es la consecuencia de un trabajo en el que los alumnos se ubican en una posición reflexiva respecto de las producciones, interactuando entre ellos y a propósito de las mismas, coordinados por el docente que es quien puede acceder a los distintos puntos de vista que es necesario articular.

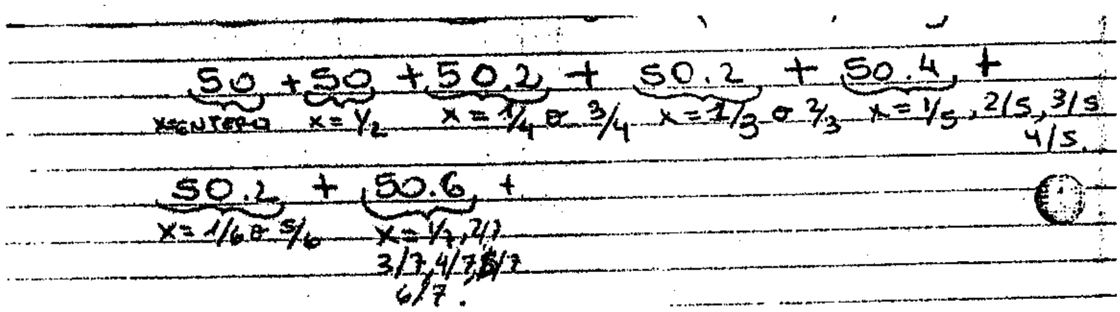
En otro orden de cosas, Julieta propone las fórmulas como respuestas y da ejemplos que de alguna manera las "materializan". Sus ejemplos muestran cierta dificultad al hacer funcionar su algoritmo. Efectivamente, notemos que para la fórmula *(100 – x .2):3 =* , aunque señala la

[32] No estamos considerando pares ordenados.

función del coeficiente 2 y el significado de la variable x, los pierde de vista en los cálculos particulares leyendo como "cantidad de harina" el resultado del cálculo 2x, para todos los ejemplos que propone. No sabemos si se trata o no de una distracción. De todos modos, esto mostraría una cierta distancia entre la producción de la fórmula y su funcionamiento para producir ejemplos que, todavía parecen controlarse mejor con el viejo sistema aritmético de "pasos" donde hay espacio para retener el significado de cada resultado.

d) La escritura como sostén para contar las soluciones. El caso de María Sol

Luego de producidas las fórmulas, Sabrina y María Sol –citadas anteriormente- se separan y trabajan individualmente. María Sol pregunta si hay que decir cuántas posibilidades hay y, a partir de ahí se embarca en la empresa de "dar cuenta" de las mismas. Veamos su escritura:



¿Qué nos "muestra" esta escritura? María Sol va contando la cantidad de valores que puede tomar la variable "cantidad de harina y para eso los "recorre" de alguna manera. Primero cuenta cuántos valores enteros puede tomar la variable y establece que son 50 (omite el 0); luego cuenta las fracciones "1/2" que hay en cada intervalo de extremos enteros (obtiene ahí el segundo "50" de su serie); el tercer término cuenta las fracciones con denominador 4 (no contadas anteriormente) de cada intervalo de extremos enteros (eso le da las fracciones "número entero + ¼" y "número entero + ¾", para cada intervalo ya que los valores "número entero + 2/4" ya han sido contados). De la misma manera, María Sol calcula cuántas fracciones de denominador 5 y 6 hay en cada intervalo, controlando las que ya han sido contadas al analizar las fracciones de los denominadores "precedentes".

¿Qué nos enseña la escritura de María Sol que apunta a mostrar cómo contar exhaustivamente todos los valores posibles de la variable?

Obviamente, como ya lo hemos dicho al introducir el análisis a posteriori de la secuencia sobre división entera, no se trata de pensar que esta escritura podría volver a aparecer alguna vez. Es tan original que más bien pensamos que probablemente ello no ocurrirá. Sin embargo, subyacen al trabajo de María Sol ciertos conocimientos que sí consideramos interesantes en función de nuestra problemática.

En primer lugar, es suficiente para esta alumna recorrer los valores de la variable para contar las soluciones, sin necesidad de producirlas. Pareciera que ella establece una biyección entre el dominio de la variable y los pares solución. Este conocimiento –aunque para ella sea implícito- generaría buenas condiciones para introducir dos cuestiones: 1) que la fórmula *(100 –*

$2x) : 3 = y$ pueda ser aceptada como "soporte" para analizar la cuestión de la cantidad de soluciones a partir del análisis de cómo varía una de las variables y 2) que una fórmula -recordemos que ella anotó dos- es suficiente para caracterizar todas las soluciones.

En segundo lugar, para objetivar un conjunto infinito, María Sol necesita "darle cuerpo" de alguna manera. No le alcanza con decir "hay infinitas soluciones", necesita un proceso que "muestre" la ubicación de cada valor de la variable y que cuente cuántos valores de cada tipo hay. Dos observaciones: a) con su extraño algoritmo ella finalmente genera el conjunto de los racionales menores o iguales que 50 y b) aunque sin proponérselo, consiguió una manera de mostrar la numerabilidad de Q y obtener un orden no denso. La dualidad proceso-objeto de los procesos de construcción conceptual (Sfard, A; 1991) parece encontrar acá una muestra de su funcionamiento. Efectivamente, para concebir la existencia del conjunto de valores posibles de la variable, "necesita" algún algoritmo que le permita recorrerlo.

Señalemos finalmente que la escritura de María Sol es absolutamente personal y su interpretación está lejos de ser evidente. Cumple una función epistémica para ella que parece ser la de mostrarse a sí misma un proceso a partir del cual pueda comprender la naturaleza del conjunto con el que está tratando. Es probable que ella sea la única que pueda aprovecharla, ya que se completa con su propio pensamiento que, con relación al aspecto con el que está tratando, permanece en la esfera de lo privado. Surgen dos reflexiones a propósito de esta cuestión.

Cuando al diseñar estas situaciones, pensamos en la producción de escrituras personales, lo hacíamos apuntando a que estas producciones se validaran en la interacción social transformándolas en objeto de reflexión, dando por esta vía sentido a la necesidad de establecer convenciones. Lo que la escritura de María Sol nos muestra, es que es necesario discriminar cuáles son las producciones que pueden tener interés para el conjunto de los alumnos y para cuáles es importante concebir la clase como un espacio social de producciones personales (Mercier, A; 1998) cuya especificidad –cuya privacidad si se quiere- requeriría aceptar que hacerlas públicas no redundaría en un avance para el conjunto. Esta discriminación es harto compleja y requiere por lo menos que se interprete cuál es la función de una cierta escritura y en qué medida esa función asociada a un alumno particular, puede ser compartida –conviene que sea compartida- por otros.

En segundo lugar, la escritura de María Sol tan alejada de los usos convencionales, nos lleva a la siguiente reflexión. Muchos trabajos que estudiaron la problemática didáctica del pasaje de la aritmética al álgebra, han señalado las transformaciones en los usos de los símbolos, que los alumnos deben elaborar. Un ejemplo considerado por muchos autores, es el del signo igual. Se trata de transformaciones necesarias, que se refieren a usos institucionales. ¿Tendrían que considerarse también las transformaciones de los usos personales, como el que nos muestra el trabajo de María Sol, en pro de una adaptación al funcionamiento del álgebra en la institución escolar? Pensamos que no necesariamente. Es decir, un funcionamiento alejado de lo convencional, pero con un valor epistémico como el que le hemos atribuido a la producción de esta alumna, podría coexistir con los usos culturalmente establecidos. Sin embargo, lo más probable es que, una vez producida su entrada en el mundo algebraico, María Sol no se permita a sí misma una escritura original. Ella renunciará –es inevitable– a algunas de las herramientas que es capaz de producir para pensar, en favor de los instrumentos culturales que la escuela le exige que ponga en funcionamiento.

e) Ciertas producciones nos llevan la mirada hacia la noción de densidad en Q

Cuando pensamos este problema, estábamos fundamentalmente centradas en estudiar las rupturas que podría provocar lo infinito respecto del problema anterior y no pensábamos detenernos en toda la problemática vinculada a la conceptualización de la densidad de los racionales que podríamos encontrar en este nivel. Sin embargo, aunque no sea nuestro interés detenernos ahí, no podemos dejar de señalar que el problema ofrece la posibilidad de trabajar sobre este aspecto, aunque en este caso no se haya considerado. La producción de Guido y de Juan Alejo nos muestra algo al respecto. Veamos. Estos alumnos proponen la siguiente tabla:

Harina	Yerba
3,5	31
6,5	29
9,5	27
12,5	25
15,5	23
18,5	21
21,5	19

Cuando la profesora les pide que escriban cómo le explicarían a alguien una manera de encontrar soluciones ellos escriben:

Se encontrarán más posibilidades disminuyendo 2 kilos de yerba y aumentando 3 kilos de harina.

Si bien en ningún momento estos alumnos dicen que esa es la manera de encontrar todas las soluciones, es decir que ellos no abordan la problemática de la exhaustividad, nos preguntamos si ellos saben o no, que hay soluciones que no atrapan a través de este procedimiento.

f) Algunas dificultades ligadas al uso de las unidades y de la proporcionalidad

Hemos encontrado alumnos que escriben fórmulas similares a las ya analizadas, pero cuando las van a aplicar, pasan las cantidades de yerba o de harina a gramos. Frente al desconcierto que les producen los resultados que obtienen, (por ejemplo un alumno atribuye a "cantidad de harina" 300 gramos y reemplaza" en la expresión (100 – 2 x):3, la x por 300) muchos de estos niños regresan al refugio seguro de la regla de tres simple. Constatamos –una vez más- dos "problemas" vinculados a las elaboraciones de los niños en torno a la proporcionalidad directa: 1) la separación entre "regla de tres simple" y "función de proporcionalidad directa" y 2) una conceptualización de la proporcionalidad directa según la cual la constante de proporcionalidad es independiente de las unidades utilizadas en el dominio y la imagen.

Al enfrentar a los alumnos con la necesidad de atribuir valores no enteros, el problema constituye una oportunidad para revisar las cuestiones señaladas.

Breve resumen del desarrollo del problema de la yerba y de la harina en la Escuela Despertar

La fórmula es puesta en juego sólo por unas pocas alumnas que tienen, desde el inicio del trabajo una perspectiva general, en **reemplazo de la tabla con todas las soluciones**. Las tres alumnas que la proponen (María Sol, Sabrina y Julieta) usan una letra para lo que ellas definen -implícitamente claro- como variable independiente y dejan en blanco, a la derecha del signo igual el espacio de la variable dependiente. Estas escrituras parecen tener la función de expresar un algoritmo de cálculo. A través del trabajo de Julieta hemos podido establecer que ella "necesita" dos fórmulas (una para cada variable), que ambas dan cuenta de procedimientos diferentes y que en principio desde la visión de la fórmula como algoritmo de cálculo no es accesible que ambas fórmulas producen los mismos pares solución. Esto nos lleva a reflexionar –trascendiendo lo sucedido en esta clase particular- que hay una transformación a producir: de la necesidad de dos fórmulas como algoritmos de cálculo a la aceptación de la escritura como ecuación de dos variables. Esta transformación comienza a transitarse cuando los alumnos se ubican en una posición de reflexión sobre las producciones y en la interacción con las producciones de los otros.

El trabajo de Julieta nos muestra además que pareciera existir una distancia entre proponer la fórmula general y "hacerla idónea" para producir soluciones particulares. Esto nos hace suponer que sería necesario un tiempo de funcionamiento para que el uso de la fórmula sea más eficaz que el procedimiento aritmético "paso a paso".

El trabajo de una alumna que recorre de alguna manera los valores posibles de una de las variables para analizar el problema de la cantidad de soluciones, nos lleva a hacer la hipótesis de que la fórmula podría cumplir la función de soporte para analizar esa cuestión. Además, la producción de la niña nos hace reflexionar sobre la necesidad de incluir en la clase un espacio para las producciones "privadas" que cumplen una función epistémica para un alumno particular pero cuya difusión no tendría sentido para el conjunto. Esto a su vez le plantea al docente el complejo problema didáctico de cómo discriminar aquello que es interesante difundir en el espacio público de lo que tiene sólo sentido en el ámbito privado de un alumno.

La necesidad de hallar valores correspondientes a cantidades menores que 1 kilogramo (de yerba o de harina) plantea dificultades en el manejo de las unidades y "muestra" una falta de coordinación entre la regla de tres simple y la función de proporcionalidad directa.

La extensión que algunos alumnos hacen del procedimiento de covariación usado en el problema de los triciclos, pone un signo de interrogación acerca de la conceptualización que algunos niños hacen de la noción de densidad de los números racionales.

3.3 El problema de las monedas en la Escuela Despertar

Recordemos el enunciado del problema:

> *Marisa tiene 20 pesos en monedas de 10 centavos y de 50 centavos. ¿Cuántas monedas de cada clase puede ser que tenga?*

El problema se desarrolla en dos clases y media y se organiza un dispositivo en cuatro etapas: 1) los alumnos trabajan individualmente con la consigna de obtener soluciones, decidir cuántas hay y describir un procedimiento para obtener todas las soluciones; 2) trabajo en pequeños grupos para optar por un procedimiento entre los de los integrantes del equipo o, eventualmente formular uno nuevo, 3) transcripción en el pizarrón, por parte del docente, de los procedimientos propuestos por cada grupo y análisis en pequeños grupos de los procedimientos expuestos y 4) debate colectivo sobre los procedimientos. En la primera clase se desarrollan las etapas 1 y 2. La necesidad de optar obliga a los niños a considerar distintos procedimientos como objeto de trabajo y a explicitar criterios para seleccionar unos y descartar otros. Analizaremos primeramente estas cuestiones a través de la producción de un grupo. Informaremos también cuáles son las propuestas de los diferentes grupos (punto G).

Las etapas 3 y 4 se desarrollan en la segunda clase y parte de la tercera. En el debate colectivo surgen por un lado nuevos problemas matemáticos que sólo tienen sentido como producto de la interacción entre los procedimientos y por otro lado surgen dos cuestiones relevantes con relación a nuestra problemática: 1) una fórmula de dos variables caracteriza un conjunto de pares de números, 2) si dos procedimientos son equivalentes definen el mismo conjunto solución. Analizaremos este debate en el punto H.

G. De las soluciones particulares a los procedimientos generales. La necesidad de optar por una producción entre varias apunta a la elaboración de criterios de evaluación de procedimientos

La decisión de pedir a los alumnos que expliquen un procedimiento a través del cual se pueden obtener todas las soluciones, ubica de entrada y para toda la clase el tratamiento de este problema en un plano más general que los anteriores. Efectivamente, si bien los alumnos comienzan hallando pares solución, tratan casi enseguida de explicar un "método". De los cinco procedimientos que quedan planteados al final de la clase, sólo uno apela a una escritura próxima a una fórmula, dos se basan en covariación y dos en procedimientos de despeje que son narrados en lenguaje coloquial. Veamos.

a) *El grupo de Silvina, Pilar y Sebastián: la economía y la exhaustividad como criterios de selección*

Veamos primero la producción individual de cada alumno, para luego detenernos en la interacción que los lleva a optar por el procedimiento de Silvina.

Pilar anota en su carpeta:

> {Puede haber 200 monedas de c 10 para $20
>
> {Puede haber 40 monedas de c 50
>
> {Puede haber 20 moneda de c 10. Puede haber 36 monedas de 50 c
>
> {100 monedas de c 10 20 monedas de c 50
>
> {10 monedas de c 10 38 monedas de c 50
>
> Procedimiento: Primero **tenés que verificar cuántas monedas de 10 entran en $1 y después si sé que en 1 peso entran 10 de 10 C** voy fijándome cuántos pesos quiero gastar con monedas de 10 c y depende de lo que gaste se lo resto al total y el resultado es la plata que me queda para gastar con 50 c o viceversa.

Pilar no deja trazas de los cálculos que realiza para producir las soluciones "sueltas", y sólo accedemos a su modo de pensar a través de la explicitación posterior. Notemos que esta alumna incluye como parte del procedimiento una constatación que seguramente fue importante para su propia comprensión de la situación (1 peso equivale a 10 monedas de 10 centavos) pero que es más bien un conocimiento necesario para abordar el problema y no parte del procedimiento. En cambio deja implícita la operación que habría que realizar para calcular cuántas monedas de 10 centavos se necesitan para una cierta cantidad de dinero, operación que seguramente realizó "mentalmente" para producir sus soluciones. Además queda sin explicitar qué cantidades de dinero podrían atribuirse a *" los pesos que quiero gastar con monedas de 10 c"*, de manera que no hay en su formulación indicios para establecer la cantidad de soluciones. Esta manera de armar la relación si bien es general, deja implícitas las operaciones que sería necesario explicitar para convertir su procedimiento en cálculo. Aparece aquí una cuestión a pensar: ¿serían necesarias las explicitaciones verbales para que pueda construir la fórmula, o más bien la escritura de la fórmula "obliga" a explicitar lo que queda implícito en su formulación verbal, empujando a un avance en sus conocimientos? En la medida en que estamos concibiendo **la fórmula como modelo del problema y le estamos atribuyendo la función intelectual de ayudar a pensarlo en términos de las operaciones necesarias para generar soluciones**, nos inclinamos por la segunda opción. Es decir, **la fórmula no es una**

traducción de lo que ya se ha pensado sino que es un recorte que fuerza la explicitación de aspectos que no aparecen como necesarios cuando se utiliza el lenguaje coloquial. En este sentido interpretamos el planteo de Duval (Duval, R; 1995) cuando dice que la conversión de registro no es neutra cognitivamente.

Sebastián hace dos tablas: en una anota las cantidades de dinero que forma con 10, 20, 30,...200 monedas de 10 centavos y en la otra las cantidades de dinero que suma con 2, 4, 6, 8, 10,...40 monedas de 50 centavos. Pareciera que toma como unidad el "peso" y por eso "recorre" las monedas de 10 centavos de diez en diez y las de 50, de dos en dos. Luego anota 4 pares solución que aparentemente "arma" combinando los datos de sus listas. El procedimiento de Sebastián no muestra las operaciones que ligan las variables, ni tampoco explica cómo se obtienen las soluciones. **No está dirigido a otro**. Aparentemente le es útil a este alumno que no parece llegar a discriminar lo que él "agrega" para armar los pares y que no deja escrito para que otro pueda utilizar.

Veamos la tabla y la explicación posterior de **Silvina**:

Cantidad de Monedas de 10 C	Cantidad de Monedas de 50 C
0	40
5 = 50	39 = 19,5
10 = 50	38
15	37
20	36
200	0

Explicación: Para encontrar todas las soluciones partiendo de 0 monedas de 10 C y 40 monedas de 50 C, le vas sumando 5 monedas de 10 centavos y restando 1 moneda de 50 C, hasta llegar a 200 monedas de 10 C y o monedas de 50 C.

La explicación que da Silvina le alcanza a ella para estar segura de que recorre todas las soluciones, aunque no las haya mostrado en la tabla. Notemos que en el segundo renglón de su tabla "necesita" explicitar de alguna manera que va controlando los totales (iguala a 50 [c] y a 19,5[$]), pero luego los cambios a través de la regla *"5 de 10 se cambian por una de 50"* aseguran que se conserva la cantidad total.

Veamos la interacción de los tres alumnos en el momento en que se reúnen para elegir un único procedimiento. Ellos se muestran sus carpetas.

Pilar relata su procedimiento y Silvina le dice que es más complicado porque *"hace más cuentas"*, frente a lo cual Pilar responde que *"sólo divide"*. Silvina dice: *"por eso, dividís, sumás, en cambio acá nada más le vas agregando y restando, no sé, es más sencillo"*

Frente a las listas de Sebastián, Silvina dice: *"Pero no se encuentra una solución, porque vos podrías haber hecho 5 monedas en vez de 10 monedas, acá hay que encontrar todas las soluciones, ahí estás salteando"*.

Notemos que la crítica de Silvina hacia Sebastián no se basa en que deja implícita la manera de elegir los elementos de las listas para combinarlos, sino en que ella reconoce que si las monedas de 10 centavos "van de a diez" y las de 50 centavos, "van de a dos", seguro que se saltean soluciones. Pareciera que, en la medida en que Silvina parece interpretar qué habría que hacer después de tener las dos listas, no se da cuenta de las operaciones que quedan sin explicitar. Sebastián no recibe entonces una devolución sobre este aspecto de su producción.

Los criterios que explicita Silvina y que, en principio son aceptados por sus compañeros son: la economía con respecto a la cantidad de cuentas y el asegurar *"pasar"* por todas las soluciones. Más allá del ejemplo particular, la necesidad de optar lleva a los alumnos a realizar un análisis fino de cada procedimiento y **genera condiciones para ir estableciendo criterios para privilegiar una estrategia sobre otra.**

b) Las necesidades de explicitación de Gastón

Gastón comienza haciendo una tabla en la que anota cuatro pares solución entre los que están (200,0) y (0, 40). Frente a la necesidad de explicar como se obtienen todas las soluciones propone dos fórmulas, cada una compuesta por dos "renglones".

(50¢ x n° < 40 - 2000¢) : 10¢ =   [en el original aparece un signo < con el "palito" del "igual" tachado]

50¢ x 40

terminado en 0 o 5

(10¢ x n°   - 2000¢) : 50¢ =
10¢ x 200

Como veremos en el análisis de la fase colectiva, este alumno piensa que las dos fórmulas son necesarias. Notemos que Gastón necesita explicitar el dominio de la variable como parte de la fórmula. Cuando la profesora le pregunta qué es el segundo renglón en cada caso (refiriéndose a las cuentas 50 c x 40 y 10 c x 200, Gastón responde: *"la de arriba es cuando hay monedas de las dos clases y ésta y ésta (por las dos cuentas recién mencionadas) es cuando hay de 50 sin monedas de 10 y cuando hay de 10 sin monedas de 50"*. Por alguna razón, Gastón necesita considerar aparte estos casos, como si el hecho de hacer figurar en la fórmula los coeficientes 50 y 10 eliminara la posibilidad de obtener un par con una de las componentes igual a 0.

c) *El panorama al final de la clase.*

Sobre el final de la clase, cada uno de los cinco grupos dictó el procedimiento elegido para poner a la consideración de los demás. La profesora los anota en el pizarrón:

Procedimiento 1 (Matías y Mariano)

Si tenés 1, 2, 3, ...de 50 *C*, la suma se la restás a 20, el resultado lo divido en 0,1 y te da las monedas de 10 *C*.

Procedimiento 2 (Guido, Juan Alejo, Manuel y Juan Manuel)

Me dan cualquier número entre 0 y 200, por ejemplo 34.

34 x 10 → cantidad de centavos en monedas de 10 *C*

→ 2000 - 340 = 1660

1660 : 50 = 33,2

33 de 50 y 35 de 10

Procedimiento 3 (Gastón, Alejo, Martín, Ilan)

(50 *C* x n menor que 40 - 2000 *C*) : 10 = cuántas monedas de 10 = *A*

(20- *A* . 0,10) : 0,5= cantidad de monedas de 50 = *B*.

Procedimiento 4 (Julieta, Luana, Estefanía Roxana)

Hay 41 soluciones

20 : 0,5 = 40

20: 0,1 = 200

200 : 40 = 5

200 x 0,10

195 x 0,10 + 0,5 x 1 Todo te da 20

190 x 0,10 + 0,5 x 2

5 x 0,10 + 39 x 0,5

40 x 0,5

Procedimiento 5 (Silvina, Pilar y Sebastián)

Para encontrar todas las soluciones tenés que partir de 0 monedas de 10 y 40 de 50. Luego le vas sumando 5 monedas de 10 (50 C) y le vas restando 1 moneda de 50. Así hasta llegar a 200 monedas de 10 y o monedas de 50.

d) Breves observaciones sobre los procedimientos anteriores

Los alumnos que ponen en juego el **procedimiento 1** definen implícitamente que la cantidad de monedas de 50 centavos va "de uno en uno", sin considerar la cota superior. Para establecer la cantidad de dinero en monedas de 50 centavos, aluden a una suma, cuestión que ni es muy práctica a la hora del cálculo efectivo, ni es de muy fácil "traducción"[33] en una fórmula. Dado que estos alumnos sí han realizado multiplicaciones para obtener soluciones particulares, interpretamos que a través de su formulación están dando una idea global del procedimiento, sin pensar en su eficacia como algoritmo de cálculo ni considerar estrictamente lo que ellos han hecho al presentar los pares solución.

El **procedimiento 2** no está narrado en términos generales sino que "muestra" a través de un ejemplo que tiene valor genérico. Estos alumnos consideran como dominio de la variable "cantidad de monedas de 10 centavos" todos los naturales de 0 a 200, sin darse cuenta de que la estrategia que usan para interpretar los resultados no enteros (truncan el resultado decimal de cantidad de monedas de 50 y utilizan el hecho de que 0,2 de 0,50 es 0,1) esconde otro dominio de variación. Esto dará lugar a una interesante discusión en el momento de debate que mostrará que la mayoría de los alumnos no homologa "equivalencia de procedimientos" a "igualdad de los conjunto solución". Veremos además que la estrategia de conversión de decimales a enteros, abre un problema de tipo numérico cuya resolución "escapa" un poco del problema que se está tratando.

Los alumnos que exponen el **procedimiento 3**, están liderados por Gastón –lo que escriben es casi idéntico a lo que él había hecho individualmente y que en parte ya comentamos en el punto *b)*- y muestra un uso aritmético de las escrituras con letras. Efectivamente, las dos fórmulas expresan dos algoritmos de cálculo –uno para cada variable- y el primer resultado, nombrado con la letra "A", es usado para obtener el segundo, que se nombra "B". La escritura paso a paso y la búsqueda de sentido de los pasos intermedios (Vergnaud, G; 1987; Grugeon, B; 1995) parecen regir el trabajo de estos alumnos.

A propósito del **procedimiento 4** señalamos la explicitación simultánea de los pares y de la verificación de los mismos. En este grupo Julieta y Estefanía habían propuesto estrategias de covariación mientras que Luana y Roxana no habían logrado generalizar algún procedimiento. Estefanía había relatado con palabras la covariación en tanto que Julieta es la

[33] Las comillas aluden a que, como ya lo hemos expresado reiteradamente, adherimos a la posición según la cual la fórmula no es una simple traducción.

que había producido la escritura que finalmente eligen. Notemos que hay un cálculo del "paso" de la covariación, a través de la cuenta 200: 50. En su momento Julieta lo había explicado: *"yo hice 20 que es el total dividido 0,5 y me dio 40; esos son 40 de 50 centavos y sería una solución. Otra sería 20 dividido 0,1 y me da 200 de 10 centavos. Entonces como 200 son de 10 centavos y 40 son de 50, hice 200 dividido 40 que me dio 5. Cada 5 monedas de 10, hay una moneda de 5.* ***Cada 50 centavos se va haciendo una conexión".*** Julieta expresa con claridad la relación entre pares solución que "se deja ver" a través de la estratega de covariación.

Al analizar la interacción en un pequeño grupo, ya hemos comentado en el punto *a)* **el procedimiento 5**.

Constatamos la poca "presencia" de cualquier escritura que apele al uso de letras para representar las variables. Recordemos que hasta el momento la fórmula ha sido propuesta por la docente para "producir" soluciones en el problema de los triciclos y de las bicicletas sin que los alumnos llegaran a tomar contacto con su "instrumentalidad". Luego de haberla introducido, la docente no ha forzado su uso y más bien a optado por esperar su reaparición en la fase colectiva a partir de la producción de algún grupo. Como veremos cuando analicemos las clases de las otras escuelas, esta es una opción entre otras, acerca de la cual podremos conocer un poco mejor al considerar el total de la experimentación.

Los procedimientos quedan anotados en el pizarrón, pero no hay tiempo para organizar un debate alrededor de los mismos, actividad que queda pendiente para la clase siguiente.

H. El debate sobre los procedimientos y la emergencia de problemáticas vinculadas a la relación aritmética-álgebra.

El debate se organiza en dos etapas: una primera de trabajo en pequeños grupos en los que los alumnos trabajan analizando cada uno de los procedimientos, definiendo con qué aspectos coinciden y con cuáles no y pensando en eventuales modificaciones; la segunda etapa es la del debate propiamente dicho. Comentaremos algunos momentos de la primera etapa y luego entraremos en el análisis de la fase colectiva.

a) El análisis de las otras producciones en el pequeño grupo: los matices de esta actividad.

Veremos en primer lugar la interacción entre la profesora y un grupo de alumnos.

Los autores del procedimiento 3 llaman a la profesora, en principio para autocriticarse, pero luego la interacción deriva en comentarios con respecto a otros procedimientos. Identificamos tres momentos que nos interesa comentar porque muestran diferentes "costados" de la actividad de análisis de las producciones de los otros: 1) Gastón señala un error en el procedimiento 1; 2) Gastón manifiesta una cierta incomprensión respecto del procedimiento 2; 3) Martín "prefiere" la claridad del procedimiento 5. Veamos el registro:

Gastón: (dirigiéndose a la profesora). *Está mal el nuestro, hicimos el resultado de la cuenta menos 2000 y hay que hacer 2000 menos el resultado de la cuenta.*

Profesora: *¿Es lo único que corrigen del de ustedes?*

Gastón: *Del de nosotros sí.*

Profesora: *¿Y de los otros?*

Gastón: ***Del primero no te da límite de número,*** *o sea vos elegís 41 para las monedas de 50 centavos y te vas a pasar de los 20 pesos.* ***El segundo pusimos que está bien, pero muy bien no lo analizamos.***

Profesora: *Analícenlo.*

Gastón: *El quinto,* ***ese sí te puedo decir que está bien explicado, lo entendí bastante bien,*** *que se empieza desde un extremo hasta llegar al otra, o sea de 0 monedas de 10 y 40 de 50, hasta llegar a 200 monedas de 10 y nada de 50 centavos.*

Profesora: *¿Y hay alguna razón por la que preferirían el quinto con relación al de ustedes?*

Gastón: *No, no prefiero el quinto, el nuestro está mejor.* (Muy seguro)

Profesora: *¿Por qué?*

Gastón *Porque lo pensamos nosotros*

Martín: ***Pero yo creo que está mejor explicado el quinto que el de nosotros, me parece.***

Profesora: *¿Por qué te parece que está mejor explicado, Martín?*

Martín: *Claro, por ejemplo, ahí ya sabés que está mal, porque bueno, es 2000 menos el resultado,* ***pero si vos lees el nuestro y lees el quinto, me parece que entendés más el quinto.***

1) Interpretamos que Gastón lee el procedimiento 1, desde su propia producción y "puede ver" que se ha omitido una relación que él sí ha establecido. Pensamos que la proximidad entre los dos procedimientos favorece la mirada de Gastón. En otros términos, su propio procedimiento actúa marco de como control de los otros.

2) Gastón parece haber constatado que el procedimiento 2 "funciona", sin embargo tiene para él puntos oscuros –después se mostrará que esas oscuridades se refieren a la conversión de decimales a enteros que el procedimiento "usa"- de los que es consciente y que expresa a través de la frase "muy bien no lo analizamos". Esto muestra que la eficacia en la producción de soluciones no es para este alumno un criterio suficiente de aceptación, lo cual generaría buenas condiciones para asumir como problema la cuestión de la comprensión del mismo.

3) Martín considera que el procedimiento 5, es notoriamente más claro que el de su grupo. Aunque no hemos accedido al proceso de elección de un procedimiento en el grupo de Martín, pensamos - es un alumno "flojo"- que es probable que no haya tenido una presencia muy activa. Esto lo pondría en buenas condiciones para desprenderse de su posición de "productor" (posición débil), colocar todas las producciones en pie de igualdad para luego

evaluarlas (posición más fuerte que la anterior). Pensamos que recién en esta tercera etapa (en la primera, de trabajo individual, propuso soluciones "sueltas", en la segunda participó de una manera pasiva de la elección que hicieron sus compañeros) Martín **comprende**, a partir de la posibilidad de acceder a diferentes "relatos" del procedimiento. En otros términos, la posición de **lector luego de haber sido productor**, que esta actividad le permite ocupar, resulta para él más beneficiosa, desde el punto de vista de la comprensión, que la de productor. Tres observaciones más: 1) notemos que el criterio que selecciona para "juzgar" no es el de la corrección matemática sino el de la capacidad de hacer claro lo que se quiere comunicar y, 2) la presencia circunstancial de la docente en el grupo, favorece la explicitación de las preferencias de Martín y 3) de manera transversal, un alumno "flojo" aprende que hay varias explicaciones para una misma cuestión, algunas de las cuales son más accesibles que otras.

En síntesis, este registro nos permite identificar que la tarea de analizar los distintos procedimientos hace posible (seguramente entre muchos otros matices): considerar la propia producción como marco para analizar y controlar otras, abrirse a nuevos problemas que sólo pueden venir de la mano de quien pensó lo mismo "de otra forma", acceder a la operación de poner el propio trabajo en pie de igualdad con otros, ubicando al alumno como lector de todo lo producido, para obtener de la confrontación que surge de esa lectura una visión que critica y clarifica a la vez.

Más allá del ejemplo analizado, señalemos finalmente que algunos niños encuentran los errores de ciertos procedimientos haciéndolos funcionar y otros, los menos fuertes en su vínculo con la matemática, encuentran en esta tarea una oportunidad de comprender "de qué se trata" aunque salgan de la tarea de analizar los procedimientos para simplemente, llegar a comprender un poco más. En este sentido, las cuatro instancias previstas: producción individual, elección por grupos de un procedimiento, análisis en pequeños grupos de los distintos procedimientos y debate colectivo, hacen "durar" el problema al tiempo que hacen avanzar el conocimiento de todos, ofreciendo la oportunidad de incluir a más alumnos. Analizaremos ahora la fase de debate.

b) El debate en torno a los procedimientos: un espacio de producción colectiva

La profesora organiza el debate que vamos a analizar, "recorriendo" cada uno de los procedimientos. Recortamos los siguientes episodios:

1) Con relación al procedimiento 1, sólo se corrige el dominio de la variable "cantidad de monedas de 50 centavos".

2) A propósito del procedimiento 2, aflora cierta incomprensión respecto de la estrategia de truncar la parte decimal del resultado "cantidad de monedas de 50 centavos". La profesora apunta más a la eficacia que a la comprensión. Este problema queda "tapado" por otro planteado por un alumno: *si se sabe que cada 0,2 de 50 centavos, hay que agregar una moneda de 10 centavos, "¿qué pasa si el resultado de la cuenta de dividir (2000 – 10 x):50 da 'coma 3'"?* Ambos problemas quedan pendientes.

3) Al discutir el procedimiento 3, se analiza si son necesarias las dos ecuaciones o alcanza con una sola. Analizamos las razones que "atan" a algunos alumnos a la idea de que

hacen falta las dos ecuaciones y la manera en que se institucionaliza el "permiso para atribuir valores a una variable".

4) Al discutir la cantidad de soluciones, los alumnos dicen que a través del procedimiento 2, hay 201 soluciones y a través del procedimiento 5, hay 41. La cuestión queda planteada para la clase siguiente.

Episodio 1

1. Al poner a consideración el **procedimiento 1**, Martín (citado en el punto anterior) dice que hay que poner límites, *"porque con 41, te da 20,5 y te pasás de 20"*. Esto es aceptado y no surgen otras objeciones. La profesora no pone en cuestión que se exprese que "se suman" las monedas de 50. Pareciera que no tiene mucho interés en detenerse en esta estrategia que no apunta a la fórmula ni abre cuestiones nuevas. Para cerrar la discusión alrededor de esta estrategia, pregunta cuántas soluciones hay y, la mayoría de los alumnos contesta 40.

Episodio 2

2. Veamos un tramo del registro en el que, a propósito del **procedimiento 2** aparece la cuestión del dominio de la variable "cantidad de monedas de 10 centavos" y, asociados a la misma, dos problemas numéricos. Analizaremos la manera en la que la profesora enfoca el tratamiento de esos problemas:

Profesora:	*Pasemos al procedimiento 2. Estefania.*
Estefanía:	*Yo hice...dice que puede ser del 0 al 200, yo hice el 52 por ejemplo 52, hice 52 x 10 y me dio 520 y 2000 – 520 me dio 1480, 1480 dividido 50 me dio 29,6, y no puedo tener 29,6 monedas de 50.*
Sabrina:	*Sí, que puede.*
Profesora :	*Ahora ellos habían dicho...*
A1 :	***No da con todos los números.***
Sabrina :	*Pero abajo dice que le agrega una moneda de 10.*
Profesora :	*Le agrega una moneda de 10, dice.*
Sabrina:	*No cada dos monedas una de 10*
Profesora:	***¿Adónde dice eso?***
Sabrina:	*Ahí dice 0,2 y le agrego una de diez, 0, 4 son dos de 10*
Profesora:	*¿Adónde dice eso?*
Alejo:	*No lo dice pero es...*
Profesora :	***Entonces, Estefania con el procedimiento como está escrito acá, llega a que tiene un problema que el procedimiento no se lo resuelve. Alguno encontró una manera de mejorar el procedimiento para que a Estefania no le pase lo que le pasó.***

Sabrina :	***Tendrías que aclarar que cada 0,2 monedas de 50, va una de 10.***
Profesora:	***(Escribe en el pizarrón) ¿Entienden lo que puse?***
A:	*¿Cómo es la aclaración?*
Profesora :	*Cada 0,2 monedas de 50, o sea que acá da coma 2, se agrega una de 10.*
Sebastían:	***¿Y si da 0,3?.***
Sabrina :	***No puede dar 0,3.***
Profesora :	*¿Por qué?*
Juan Alejo:	*Porque ...es una cuenta que nunca puede dar....decime un número y .no puede dar 0,3, 0,5, 01, 0,7 o 0.9.*
Profesora:	***¿Por qué? ¿Probaron con todos los números?***
Juan Alejo :	*No, pero hay una manera de comprobarlo.*
Profesora:	***¿Cómo tenés la super certeza?***

Notemos en primer lugar que la intervención del alumno que dice que *"no da con todos los números"* no es tomada en cuenta por la profesora, aparentemente porque ella estaba más interesada en dar lugar a la estrategia de "convertir" los números decimales. Esta estrategia implica ciertas relaciones numéricas interesantes pero oculta el hecho de que la cantidad de monedas de 10 centavos debe ser múltiplo de 5. La segunda intervención de la profesora (marcada en negrita) en la que pregunta cómo resolver el problema de Estefanía, apunta a que se escriba la regla de conversión y no a que se comprenda cómo se fundamenta la misma. Sin embargo, como hemos visto en el punto anterior al analizar la interacción de la profesora con Gastón y Martín, los alumnos no necesariamente comprenden la regla aunque pueden constatar "que funciona", lo cual, como hemos dicho, abriría un espacio para la explicación. Una vez explicitada la manera de convertir el resultado decimal, Sebastián realiza un planteo que de alguna manera objeta aquello que se acaba de establecer (*"¿y si da coma 3?"*) y la profesora propone buscar razones para el problema planteado por este alumno. Por algún motivo que no conocemos, la docente prestigia la segunda cuestión apuntando a que se argumente al respecto y "da por sentada" la primera. En tren de especular, esto podría deberse a que la primera se basa en conocimientos de los números racionales que los niños "deberían tener" o a que, tratarla desviaría mucho el proyecto de la clase; en tanto que la segunda cuestión se basa en nociones de paridad e imparidad que, al haber estado incluidas explícitamente en este proyecto a raíz del problema de los triciclos, la profesora las reconoce mejor como un conocimiento a tratar. Notemos también que se trata de una decisión a propósito de un problema que "aparece" de la mano de una estrategia propuesta por un grupo de alumnos –surge frente al planteo de la docente de discutir colectivamente toda la producción de la clase- y que no formaba parte de la planificación inicial.

Independientemente de los motivos de la docente para tomar esta decisión, señalemos que el episodio pone de relieve un problema ya señalado por otros autores (Arsac, 1992): la dificultad que se plantea para los alumnos y para el docente de ir discriminando qué debe fundamentarse y qué no, justamente en el momento en que el proyecto de enseñanza parece ser el de "llevar" a los niños hacia la argumentación basada en el razonamiento deductivo. Como lo hemos indicado al presentar nuestra problemática, generar condiciones para que los alumnos construyan un proyecto de "búsqueda de razones" es un problema que atraviesa la articulación aritmética-álgebra.

Retomemos el relato de la clase. Una vez planteada la pregunta de la profesora (*"por qué no puede dar coma impar"*) varios alumnos intentan aproximar argumentos que no logran saldar la cuestión y la misma queda pendiente para la clase siguiente. Una de las razones por las que pensamos que no se arriba a una conclusión sobre este problema a través del debate, se debe a que resulta difícil para la docente reconstruir "sobre caliente" (el problema no había sido previsto, es un alumno quien lo propone) una fundamentación matemática adecuada a los conocimientos de los niños. Esto le impide orientar la discusión y por eso la pospone. El episodio nos remite al trabajo de I. Bloch (1999) quien considera la actividad matemática del profesor en la clase como un indicador de la actividad matemática de los alumnos. Esta actividad matemática del docente, se refiere fundamentalmente a la reconstrucción de procesos de validación adaptados a los conocimientos de los alumnos, lo cual supone para el docente una reorganización de sus propios conocimientos. En otros términos, el docente aprende matemática cuando piensa cómo se fundamentan los problemas teniendo en cuenta qué saben los alumnos. Creemos que el episodio del "coma impar" es un ejemplo del planteo de Bloch en tanto la docente enfrenta el problema matemático de pensar un argumento adaptado a sus alumnos para luego gestionar una conclusión en la clase. Ella se toma un tiempo (entre clase y clase) para relanzar el debate recién en la clase siguiente.

El debate generado desvía –y oculta, ya lo habíamos dicho– el análisis del dominio de la variable "cantidad de monedas de 10 centavos", lo cual lleva a los alumnos, frente a la pregunta de la docente, a decir que el problema tiene 201 soluciones, que son, según lo que queda establecido sobre el procedimiento que se acaba de discutir, los posibles valores de la variable. Se instala una contradicción en la clase –antes se había dicho que el problema tiene 40 soluciones-, de la cual sólo es conciente la docente quien decide no señalarla por el momento.

Episodio 3

3. Analizamos el debate sobre el **procedimiento 3**.

Gastón, su autor principal, comienza corrigiendo el orden de las operaciones en la primera "fórmula" e inmediatamente señala la necesidad de la segunda fórmula. Otro alumno objeta esta necesidad y se abre la discusión. Veamos

Profesora:	*O sea, que en realidad es 2000 – 50 x un número menor que 40 dividido 10. Esa es la idea que tuvieron.*
Gastón:	*Pero, **después hay que seguirlo**, el resultado que sea hay que hacer 20 – A x 0,10 dividido 0,50. Todo lo demás está bien, hay que alterar el orden.*
Matías:	***Esa cuenta que está abajo está demás.***

Profesora:	*¿Por qué?*
Matías:	***Porque vos cuando multiplicás 50 por un número menor que 40 ahí ya tenés las monedas de 50.***
Gastón:	*Claro...pero....*
Matías:	*Y ahí ya estás sacando las monedas de 50, ahí abajo.*
Profesora:	*A ver, Gastón, ¿qué tenés para decir?*
Gastón :	***Que ahí estás poniendo una fórmula, no estás dando un ejemplo. Si es un ejemplo directamente hacés 2000 – 50 por el número.***
Profesora :	*Claro, pero él lo que está diciendo es esto, para qué hago la segunda cuenta si la segunda cuenta sé que me va a dar el número de las monedas de 50 que yo puse al principio.*
Gastón :	***Sí, ya se, al principio vos lo ponés 2000 – 50 x 37, porque ya lo tenés...***
Profesora:	*O sea ellos dicen, vos ponés el número menor que 40, 15.*
Gastón:	***Pero ahí sí, porque estás dando un ejemplo de cómo sacar la cantidad*** *de monedas de 50.*
Profesora :	*A ver, Gastón , explicá bien, por qué hay que poner las dos fórmulas.*
Gastón:	***Porque con la fórmula de abajo hacés esa cuenta para sacar cuántas monedas de 50 centavos tenés que..***
Matías :	***Pero, si vos ya sabés cuantas monedas de 50 hay.***
Profesora :	*Todos entienden lo que están discutiendo Matías y Gastón?*
(Matías interviene en términos muy parecidos, reiterando su punto de vista)	
Profesora :	*Bien, ahora Gastón.*
Gastón :	*Que cuando hacés una cuenta, que vas a hacer ya tipo en un problema, ya no la tenés que hacer abajo, porque ya la tenés , como dice Matías, ya la tenés hecha, hacés 2000 – 50 x 37, suponete. Cuando hacés así, para mostrar así cómo sacar los números, ahí si la* ***podés*** *dejar.*

Notemos que Gastón distingue entre "fórmula" y "ejemplo", entre "problema" y "cómo mostrar cómo sacar los números". Parece claro que la posición de Gastón obedece a una cuestión de contrato didáctico en el sentido en que está centrado en lo que el supone que se espera como comportamiento. Él pareciera saber que un cálculo es suficiente y reconoce que eso es lo que hace cuando quiere obtener soluciones particulares. Sin embargo, como él mismo lo explicita en un momento posterior que no transcribimos, considera que no es lícito "poner números al azar". Cuando la profesora le pregunta si está mal tomar números al azar, él responde: *"Yo hago eso casi siempre, pero cuando te piden así, que cómo hiciste, sería esa, la fórmula."* Más adelante aclara todavía: *"no sé, en todos los problemas dicen justificá, qué hiciste acá, etc."*. Gastón reconoce con toda claridad la distancia entre lo que él hace para sí mismo (trabajo privado) y lo que "es para mostrar" (comportamiento público). Dado que Gastón participó de la secuencia de división entera de manera comprometida y que, en ese momento la docente ya había legalizado la práctica de atribuir valores, el ejemplo nos muestra además, que la introducción de nuevas normas que revisan aquellas construidas durante una práctica muy sostenida, requiere de tiempos que superan ampliamente los de una secuencia didáctica particular.

Pensamos que este ejemplo en el que un alumno "necesita" dos fórmulas (una para cada variable) es distinto del analizado a propósito del problema de la yerba en el que una alumna visualiza las dos fórmulas como dos procedimientos distintos, centrada en pensar cuál es en cada caso la variable que se conoce y cuál la que se obtiene. Gastón parece reconocer que para obtener "ejemplos" alcanza con una fórmula y el asunto que él pone de relieve se refiere a "cómo mostrar". De todos modos, en este episodio se ve claramente algo que ya habíamos señalado en el problema anterior y es el proceso de transformación de significados de la escritura que puede tener lugar cuando las producciones de los alumnos se transforman en objeto de trabajo colectivo en la clase.

Las expresiones de Gastón nos advierten también sobre la incertidumbre que les genera a los alumnos la actividad de "justificar". Pareciera inferirse de sus dichos que él considera que hay algo de arbitrario en esa tarea, algo que se le escapa, y que muchos otros alumnos en muchas otras circunstancias fuera del ámbito de esta investigación, manifiestan cuando le preguntan al docente: "*¿está bien justificado así"?*

Una última reflexión sobre este episodio. Más allá de lo que podamos decir con respecto a la norma de atribuir valores, el análisis nos deja ver que el contrato didáctico que subyace al funcionamiento de los objetos matemáticos, está regido por reglas de naturaleza muy diferente, algunas de las cuales el alumno justifica usando conocimiento matemático y otras no justifica –no tienen para él explicación, es inevitable- pero las acepta y las pone en juego sin mayores cuestionamientos. Todas juntas, constituyen para él, el paisaje matemático que es capaz de visualizar. La resolución de la tensión entre las leyes para las cuales un alumno encuentra razones necesarias y aquellas que "son porque son, porque la matemática es así" explica los diferentes funcionamientos de los alumnos en la clase y da distintos "tipos" que en la cultura escolar se nombran como "alumnos fuertes", "alumnos flojos", "alumnos medios", etc.

Volvamos al relato de los hechos. La profesora explica el círculo vicioso en el que cae Gastón y finalmente institucionaliza la norma "se pueden atribuir valores". Lo ilustramos con la trascripción del registro:

Profesora :	*Vos pensás que no es muy correcto elegir al azar*
Gastón:	*Yo siempre elijo al azar, pero lo que pasa es de dónde sacaste ese número*
Profesora:	*Pensás que si te van a preguntar de dónde lo sacaste no es muy lícito decir, "lo inventé", entonces, pensás que es mejor mostrar de dónde sale.*
Gastón:	*Claro*

Profesora :	*Claro, pero, sí se puede inventar. Si no, estamos en un círculo, si yo este número no lo puedo inventar y, lo tengo que sacar de acá, pero esta cuenta no la puedo hacer, al final no puedo hacer ninguna cuenta, en algún lado hay un número que tengo que inventar. Lo pongo al azar, pero, no de cualquier manera, vos acabás de hacer una aclaración, ese número tiene que ser menor que 40, 40 no puede ser?*
Gastón:	*Si. Menor o igual.*
Profesora:	*¿Puede ser 0?*
Algunos sí, algunos no.	
Gastón :	*Hacés 200 monedas de 10.*
Profesora:	*¿Cuántas soluciones hay?*
Varios :	*41.*
Profesora:	*Son los distintos números que puedo poner acá, del 0 al 40 inclusive.*
Profesora:	*Se entendió esto que estuvimos analizando?*
Varios :	*Si.*

Episodio 4

4. En el último tramo del debate, se hace explícita una "contradicción"[34] que muestra que los alumnos no consideran que la posibilidad de obtener todas las soluciones a través de un procedimiento, constituye un criterio para evaluarlo. Efectivamente, surge en la clase que se considera que dos procedimientos son correctos y que se obtiene por uno y por otro diferente cantidad de soluciones. **La pregunta acerca de si se han agotado o no todas las soluciones es nueva para los alumnos** ya que los problemas de solución única que han formado parte esencial de sus prácticas aritméticas, la han vuelto "transparente"[35]. Por otro lado, ligada a la cuestión anterior, surge que a través del mismo procedimiento, pero leído de maneras diferentes, podrían obtenerse diferente cantidad de soluciones. Esto vuelve a mostrar que hay una idea –la de **par** solución- que no está estabilizada y los alumnos "van y vienen" considerando a veces los pares y en otros momentos, "separando" las monedas de un tipo y de otro. Ilustramos lo anterior con el último tramo del registro:

Profesora:	*Bien, el último procedimiento. Guido.*
Guido:.	*Está bien*
Profesora :	*¿Por qué esta bien? **¿Qué analizaste, qué diferencia tiene con los otros procedimientos?***

[34] La comillas indican que la contradicción no es asumida por los alumnos.
[35] El término "transparente" suele usarse en dos sentidos opuestos entre sí. En este caso estamos queriendo decir que la pregunta "no se ve" desde las prácticas aritméticas.

Guido :	***Porque es la manera de encontrar completamente todos los números, en los otros, en el 1, en el 3 y en el 4, hablan de 41 soluciones siempre.***
Profesora :	*¿Y acá?*
Guido:	***De 201, igual que en el dos.***
Profesora :	*Dónde están las 201 soluciones en este procedimiento?*
Sabrina :	*Leamos el procedimiento: "para encontrar todas las soluciones tenés que partir de 0 monedas de 10 y 40 de 50 centavos, luego le vas sumando 5 monedas de 10 y le vas restando 1 moneda de 50 centavos".*
Profesora:	*¿Cuántas monedas de 50 centavos tengo?*
Varios:	*40.*
Profesora:	*Y vas sacando de a 1.*
Varios :	*Y sumando de a 5*
.Profesora :	*¿Entonces, dónde están las 201 soluciones?*
Sabrina :	*Vas bajando cada vez que subís.*
Profesora:	*si vos vas bajando de 40 en 1, ¿cuántas soluciones tenés?*
Sabrina :	***Las 201 están, si vas recorriendo las monedas de 10, en lugar de las de 50.***
Profesora:	*O sea, que el que empieza con las de 10 tiene 201 soluciones y, el que empieza con las de 50 tiene 41, o sea que conviene empezar con el que me da más soluciones, bien lo dejemos acá*

La clase siguiente se retoma la cuestión y se les reparte a los alumnos la siguiente pregunta para que trabajen primero individualmente y luego en fase colectiva:

> *"La clase pasada se había llegado a la conclusión de que a través del procedimiento 2 hay 201 soluciones y, a través de los procedimientos 1, 3 y 4 hay 41 soluciones. Si estás de acuerdo con esta afirmación, proponé una solución que pueda obtenerse por el procedimiento 2 y no pueda obtenerse por el procedimiento 3. Si no estás de acuerdo con la afirmación, explicá por qué.*

Notemos que se trata de un problema no previsto en el diseño original, y que surge a partir de la interacción social que se genera por la actividad de someter a análisis los diferentes procedimientos. Es una pregunta relevante de cara a las prácticas algebraicas cuyo sentido, en el marco de un trabajo individual, sería muy difícil de elaborar. Dejamos acá una marca: la necesidad de las interacciones sociales no sólo para clarificar cuestiones que se asumieron y que no se terminaron de comprender, sino para acceder a nuevos problemas que se plantean a través de la confrontación.

Es para nosotros interesante recortar la interacción de la profesora con una alumna muy floja –Luana- a propósito de esta actividad. Luana le pregunta a la profesora cómo se dan cuenta los otros chicos que el procedimiento 2 tiene 201 soluciones. Además del interés que tiene la pregunta en el sentido de que se refiere a una estrategia para pensar, más que a una demanda de qué hacer, la profesora utiliza la fórmula como soporte para la explicación y esto es comprendido por Luana:

Luana:	*Lo que yo no entiendo acá es que te dan un procedimiento y abajo te dicen que hay 201 soluciones*
Profesora:	*Eso dijeron los chicos ayer*
Luana:	*Pero, ¿cómo saben los chicos que hay 201 soluciones?*
Profesora:	*Yo te digo lo que ellos dicen, no digo que es así. Porque como x puede tener cualquier valor entre 0 y 200, si yo se le da el valor 0, sale una solución, si se le da el valor 1, hay otra, y así siguiendo, entonces, como se pueden dar 201 valores posibles, ellos dicen que hay 201 soluciones.*
Luana:	*Ahhhhh (con tono de clic)*

Además de que Luana parece descubrir recién ahora que es posible anticipar la cantidad de soluciones, el ejemplo parece reafirmar que la fórmula podría cumplir la función de ser un soporte a partir del cual analizar la cantidad de soluciones, tal como ya habíamos planteado a raíz del problema de la harina y de la yerba.

Básicamente lo que sucede en la clase es que los alumnos hacen funcionar el procedimiento 2 –aún sin comprender acabadamente los fundamentos de la conversión de decimales a enteros- y comienzan a darse cuenta de que las soluciones se repiten, lo cual permite redefinir el dominio de la variable "cantidad de monedas de 10 centavos". Las anotaciones de Estefanía en su carpeta, ilustran bien la producción de la clase.

152 x 10 = 1520 2000 - 1520 = 480:50= 9,6

Monedas de 10: 155

Monedas de 50: 9

Hay 41 soluciones porque

Ejemplo: 11 monedas de 50- 145 de 10

10 monedas de 50- 150 de 10

Si yo agarro un número entre estas, Ej. 147, me va a llevar a 150 porque cada 0,2 de 50 agrego 1 moneda de 10, porque me va a dar con coma.

147 x 10 = 1470 2000 - 1470 = 530 : 50 = 10,6

150 monedas de 10 y 10 de 50

Breve resumen del desarrollo del problema de las monedas en la Escuela Despertar

Al plantear de entrada la tarea de explicar un procedimiento para obtener soluciones, se realiza desde el comienzo un tratamiento más general que en los casos anteriores. La tarea se desarrolla en cuatro etapas cada una de las cuales cumplió una función didáctica que resulta interesante resaltar. Las etapas fueron: 1) trabajo individual de descripción de un procedimiento para obtener soluciones, 2) trabajo en pequeños grupos para optar por un procedimiento entre los de los integrantes del equipo o, eventualmente formular uno nuevo, 3) análisis en pequeños grupos de los procedimientos expuestos y 4) debate colectivo. La necesidad de optar por un procedimiento en el pequeño grupo ofrece la posibilidad de elaborar criterios de evaluación de una cierta estrategia. Al respecto han surgido la economía, la posibilidad de "atrapar" todas las soluciones y la claridad explicativa, como elementos decisivos. El análisis del conjunto de los procedimientos en el pequeño grupo, pone a prueba la propia producción como marco de análisis y estrategia de control del trabajo de los otros. Hemos observado que para los alumnos flojos que han tenido una participación pasiva a la hora de optar por un procedimiento en el pequeño grupo, el acceso a otras estrategias que ellos visualizan como más claras, les ayuda a progresar en su comprensión del problema. La discusión colectiva abre problemas nuevos que son relevantes para nuestra problemática. En particular, la suficiencia o no una fórmula para obtener los pares solución y la noción de procedimientos equivalentes, emergen en esta clase como producto de la interacción social. El dispositivo diseñado permite sostener el problema más tiempo del que se podría haber considerado razonable para un problema de este tipo, dando la oportunidad de profundizarlo a través de nuevos problemas que surgen a partir del mismo pero ofreciendo también la oportunidad de ir incluyendo a los alumnos que de entrada no comprendieron bien.

Un único grupo utilizó la fórmula como herramienta para producir soluciones. Pensamos que ello se debe a que no hubo en el tratamiento de los problemas anteriores en esta clase, espacio para instalarla con alguna función específica ni para discutir colectivamente acerca de su utilización. Recién, a raíz de este problema, se ha tratado la fórmula "públicamente" y la clase ha asumido la discusión sobre los problemas que plantea su escritura y sobre la función que cumple. En esa discusión la docente reafirma la "norma" según la cual está permitido atribuir un valor arbitrario a una de las variables y a raíz de esa norma es posible discutir sobre la suficiencia de una sola fórmula para obtener los pares solución. En este casc entonces, la discusión sobre la norma es un medio para discutir sobre las escrituras producidas, aproximándolas al funcionamiento de una ecuación con dos variables.

4. El desarrollo en el Instituto Martín Buber

Como planteamos al presentar el contexto de la experimentación, el trabajo en esta escuela ha tomado cuatro clases: dos dedicadas al problema de los triciclos y dos al de las monedas.

4.1 El problema de los triciclos en el Instituto Martín Buber

Comenzamos analizando el desarrollo del problema de los triciclos. Organizamos este análisis en tres etapas: la producción de soluciones en los pequeños grupos (punto A), la discusión colectiva al respecto que incluye el análisis del dominio de la variable y de la cantidad de soluciones (punto B) y la negociación colectiva de la fórmula (punto C).

A. Primeras producciones, diferentes perspectivas

Una mirada global de las primeras producciones da cuenta de que esta clase, aunque hay en ella alumnos bien "aritméticos", tiene de entrada un enfoque más general del problema. Efectivamente, el panorama inicial es el siguiente: de 22 alumnos, 13 proponen la estrategia de covariación y realizan una tabla con todas las soluciones, 7 proponen procedimientos de los que hemos calificado de "aritméticos" y 2 alumnos no han entregado sus hojas. Ningún alumno propone estrategias de "despeje". Comparando con el punto de arranque en la Escuela Despertar, en este caso hay muchos más alumnos que ponen en juego un criterio sistemático para producir y agotar todas las soluciones. Esto plantea, evidentemente, otro punto de partida que en el caso anterior lo cual –anticipamos- redundará en que el tema "producción de soluciones" no ocupará mucho espacio ni en el trabajo en pequeños grupos ni en la discusión colectiva. Comentaremos las producciones de cuatro parejas de alumnos que representan diferentes perspectivas puestas en juego: Esteban y Martín que producen una solución un poco artesanalmente y a partir de ahí arman la estrategia de covariación; Nicolás y Martín que "necesitan" hacer funcionar la covariación con cuatro variables; Iair y Andrés que comienzan planteando una ecuación de una variable, y Luciana y Micaela, acerca de quienes nos interesa resaltar las ideas por las que transitaron hasta "caer" en la única solución que produjeron en conjunto.

a) *Esteban y Martín: de una solución particular a la covariación y de la covariación a la exhaustividad*

Estos alumnos comienzan diciendo que tienen que hallar dos múltiplos de 2 y de 3 que sumen 100, obtienen 40 y 60 y de ahí hallan la solución (20,20) que la anotan como respuesta del problema. Sin embargo, muy rápido Esteban plantea que "*otra posibilidad es sacarle una cantidad de ruedas al triciclo*", a lo cual su compañero agrega: *"le sacamos 6 ruedas al triciclo y se lo agregamos a la bicicleta"*. Esto los lleva – obviamente- a la solución 23 b, 18 t. En ese momento, la profesora se acerca y les pregunta cuántas soluciones hay y Esteban responde: *"eso todavía no lo sacamos"*. O sea, la primera idea es la de canjear las ruedas para obtener otro par y detenerse ahí pero, cuando se incorpora la pregunta por la cantidad de soluciones, arman la tabla completa, ordenando los pares según una de las variables (ellos parten de 2 bicicletas y 32 triciclos) para asegurarse recorrer todas las soluciones. Es decir, **la pregunta por la cantidad de soluciones, con la idea del "canje" incorporada, pareciera "mover" hacia un procedimiento sistemático.**

b) Nicolás y Martín usan cuatro variables

Al comparar las estrategias de "covariación" y de "despeje" hemos señalado que las mismas privilegian relaciones diferentes: la primera pone de relieve la idea de compensación vinculando los pares solución entre sí (encadenándolos, como dijo una alumna) y la segunda pone el acento en la relación 3 x + 2 y = 100. El caso que presentamos ahora, aunque lo hemos encontrado en dos parejas solamente, tiene interés porque da cuenta de la necesidad de algunos alumnos **de ejercer un control a través de la utilización simultánea de las dos relaciones recién mencionadas.** Veamos la tabla que proponen Nicolás y Martín:

30 T y 5 B

90 R 10 R

B	T
^{94} 47	^{6} 2
^{88} 44	^{12} 4
^{82} 41	^{18} 6
^{76} 38	^{24} 8
^{70} 35	^{30} 10
^{4} 2	^{96} 32

La tabla muestra tanto la covariación de triciclos y bicicletas como de las respectivas cantidades de ruedas, lo cual permite verificar en cada renglón, la suma 100. La utilización que hacen estos alumnos de números más grandes para las cantidades de triciclos y bicicletas podría ser una forma de darles a estas variables un estatuto de mayor jerarquía. Las flechas indican la continuación del proceso hasta llegar al último par.

c) Iair y Andrés: la ecuación de una variable como modelo del problema

Al comenzar a trabajar, Andrés[36] escribe 2 x + 3 x = 100, despeja y obtiene x = 20. Iair le dice que *"se puede otra posibilidad"* y Andrés responde: *'**si hubiera otra posibilidad la ecuación te lo diría**, por ejemplo te hubiera dado x = x"*.

Andrés utiliza la ecuación con una variable como modelo del problema. La capacidad de interpretar el resultado de la ecuación en términos de cantidad de soluciones, muestra que este alumno tiene conciencia de que la manipulación algebraica le brinda más información, además de los resultados numéricos, respecto del problema que se aborda. La interacción con su compañero, que le muestra otros pares solución, le permite **tomar cierta conciencia acerca de los límites de su universo de ecuaciones con una variable**, encontrar las razones por las cuales la ecuación que propuso no describe todas las soluciones – no es un buen modelo- e identificar en qué condiciones esa ecuación sería válida. Veamos:

Profesora: *¿Encontraron más?*
Iair: *Si, por ejemplo este, 35 x 2 + 3 x 10.*
Profesora: *O sea ¿cuántas bicicletas y cuántos triciclos?*
Iair: *10 triciclos y 35 bicicletas.*
Profesora: *Entonces esto que decías acá de que la ecuación te dio...*
Andrés: *Es una posibilidad*
Iair: *Sólo si habría la misma cantidad.*
Andrés : *Es sólo una posibilidad.*
Profesora: *¿Por qué sólo si hubiera la misma cantidad?*
Andrés : *Escribí con x, dos veces x.*
Profesora: *x y x, a eso ya le estás poniendo la condición que sean la misma cantidad*
Andrés: *La misma cantidad de triciclos y bicicletas*
Profesora: *Si no, para escribir la ecuación, ¿qué tendrías que haber puesto? Para que sean todas las posibilidades.*
Andrés: *x e y.* ***Pero no se puede***
Profesora: *¿ No se puede poner x e y ?*
Iair: *No te va a dar el resultado*
Andrés: *No sé,* ***se puede, pero yo no sé.***

Andrés conoce el valor instrumental de la escritura algebraica y se niega a usarla cuando dicho valor no le resulta accesible, como el de la ecuación con dos variables. Se trata entonces de ayudarlo a que pueda ensanchar su espacio de "posibles", esta es la ruptura que él enfrenta. Luego de estas manipulaciones, Andrés y Iair recurren a una tabla, usando la estrategia de covariación.

[36] Andrés es uno de los alumnos que hace el curso de ingreso al Colegio de la Universidad, curso en el que han visto ecuaciones en una variable.

Veremos a lo largo de esta experimentación, que en el caso de los chicos que no tienen experiencia con escrituras algebraicas, hay una "entrada" posible basada en la producción de la escritura como "recorte" del problema, que tiene el valor de ayudar a poner de relieve las relaciones involucradas en el mismo .- un valor intelectual, diríamos- aunque no se acceda de inmediato a su valor instrumental.

d) Dos alumnas "aritméticas" elaboran una única solución

Para abordar el problema, Micaela y Luciana empiezan a buscar relaciones sin poder definir una estrategia. El registro de este intercambio muestra bien cómo, en el caso de dos alumnas muy flojas, la interacción entre ellas les permite ir explicitando las relaciones que hacen, alimentando una las producciones de la otra. Reseñamos además, las ideas por las que fueron pasando hasta llegar a una solución. Mostramos a continuación sólo un pequeño tramo del registro de la interacción entre las alumnas, para ilustrar cómo, a pesar de las dificultades seguramente provocadas por la no determinación de la solución, estas alumnas, pueden abordar el problema hasta llegar por lo menos a una solución.

Micaela: ***100 dividido 2***

Luciana: *Pero, ¿por qué dividido 2? Porque si estás haciendo dividido 2, estás haciendo el total...*

Micaela: ***Tiene que dar entre triciclos y bicicletas 100 ruedas.***

Luciana *¿A vos cómo se te ocurre hacerlo?*

Micaela: *No sé, si* ***dividimos por 2, 50 es múltiplo de dos, pero 3 no es múltiplo de 50, 50 no es múltiplo de 3. O sea que tenemos que buscar un número que sea múltiplo de 3y de 2.*** *Por ejemplo 50 es múltiplo de 2, pero no de 3 ¿Cómo podemos hacer?*

Luciana: *60, pero se pasa a 120.*

Micaela: *¿Es múltiplo de 2?*

Luciana: *Sí, es número par. Pero se pasa de cien.* ***Pero no tienen que ser justo los dos números,*** *porque puede ser que haya 50 y te sobran 30, no 50.*

Micaela: *¿Puede ser 60 y 40?*

Luciana: *¿Pero, 3 es múltiplo de 40?*

Micaela: *No, 3 es múltiplo de 60 y 2 es múltiplo de 40.*

Luciana: *O sea 60 triciclos y 40 bicicletas.*

La interacción continúa hasta que descartan 60 triciclos, proponen 30, calculan que de esa manera hay 90 ruedas de triciclos y cubren las restantes con 5 bicicletas. Veamos las ideas por las que pasaron, bajo el supuesto de que hay una única solución: 1) hacen 100 dividido 2, es decir, como hay bicicletas y triciclos, reparten las ruedas "mitad y mitad" e intentan hacer 50 dividido 2 y 50 dividido 3, al no poder hacer esta última cuenta, "necesitan" pares y múltiplos de 3, 3) proponen 60 ruedas para cada vehículo y se dan cuenta de que "se pasan", 4) Luciana dice que "no tienen que ser justo los dos números", queriendo significar no es necesario que haya la misma cantidad de ruedas de triciclos que de bicicletas, 5) proponen 60 triciclos y 40 bicicletas, probablemente confundiendo ruedas con vehículos, 6) como 60 triciclos supera la cantidad posible de ruedas, proponen 30 triciclos (mitad de 60) y "llegan" a la solución comentada más arriba.

Dado el bajo nivel de anticipación con el que estas alumnas trabajan, resulta para ellas muy difícil repetir algún esquema parecido para obtener otra solución. Pareciera que ayudarlas a recortar los pasos que han dado e invitarlas a repetirlos podría ir en la dirección de elaborar algún procedimiento generador de soluciones, que ellas pudieran reconocer.

En el momento de la puesta en común, la profesora les dio la palabra para que expliquen cómo obtuvieron su solución:

Profesora:	*¿Qué solución obtuviste?*
Luciana:	*30 triciclos y 5 bicicletas*
Profesora:	*¿Cómo llegaste a esa solución?*
Luciana:	*Hice 30 x 3 y 5 x 2 y me dio 90 más 10, 100*

Notemos que responden en términos de verificación, lo cual parece confirmar que no están en condiciones de reconstruir lo realizado. La profesora acepta esta respuesta, aunque no sabemos si se dio cuenta de que Luciana no contestó su pregunta.

B. Los alumnos "desvían" la discusión hacia el dominio de variación y la cantidad de soluciones

Si bien la profesora inicia la puesta en común preguntando cuántos triciclos y cuántas bicicletas hay, luego de una primera intervención de un alumno, otra alumna interrumpe planteando que la cantidad de triciclos debe ser par. La discusión se desvía y varios alumnos intervienen argumentando y explicando por qué. Interpretamos que esto ocurre porque en la medida en que hubo muchos alumnos que hicieron procedimientos sistemáticos, pudieron leer en los mismos la "dificultad" de encontrarse con una cantidad impar de triciclos y esa parece ser para ellos la "novedad" del problema, y es de lo que están interesados en hablar. Veamos algunas de las intervenciones de los alumnos, todas apelan a ejemplos genéricos:

Gabriela:	*Los múltiplos de 3 (refiriéndose a la cantidad de ruedas de triciclos) tienen que ser pares, porque si no, no se puede.... por ejemplo si hacés 15 x 3 te da 45, necesitás 55 para llegar a 100, entonces 55 dividido 2, no podés. Así que los múltiplos de 3 tienen que ser pares.*

Lucas:	*Tienen que ser 2 triciclos para que pueda haber ruedas de bicis y llegar a 100. Si tenés 3 ruedas no podés llegar a un número par*
Profesora:	*Lucas entonces está diciendo que los triciclos cómo tienen que ser?*
Lucas:	*Mínimo 2*
Profesora:	*¿Y vos?*
Gabriela:	*Las ruedas tienen que ser pares.*
Profesora:	*Las ruedas del triciclo....*
A:	*Siempre tienen que ser pares.*
Lucas:	*Porque no son impares las ruedas de las bicicletas, yo qué sé, agarrás 15....ruedas de triciclos y después te quedaría....*
Profesora:	*Vos Dana, ¿qué querés decir?*
Dana:	*Que no, es porque si vos tendrías, por ejemplo, 7 triciclos tendrías 21 ruedas, entonces no podrías completar con las bicicletas, o te pasarías, o tendrías menos ruedas que para llegar al total de 100, porque no podés tener 79 ruedas para una bicicleta.*

La profesora "se conforma" con los ejemplos genéricos, sin proponerse que los niños produzcan alguna formulación más general. A pesar de que intenta retomar el tema de la producción de soluciones, Andrés pide la palabra y produce otro "desvío":

Andrés:	*Como el triciclo tiene tres ruedas, tengo 2 triciclos tengo 6 ruedas, ahí encuentro uno par. Cada dos triciclos puedo hacer combinaciones.* ***Entonces hice 100 dividilo 6***
Profesora:	(Gran desconcierto de la profesora) *¿Cómo hiciste? ¿De dónde salió el 6?*
Andrés:	*De ahí, de que cada 6 puedo hacer combinaciones.*
Profesora:	*¿6 qué?*
Andrés:	*6 ruedas*
Débora:	*Yo no entiendo por qué hizo esta cuenta*
Andrés:	*Porque como el triciclo tiene 3 ruedas y se necesitan pares si no, no se pueden hacer combinaciones, para que sea múltiplo de 3 y sea par, es cada 2 triciclos, que son 6 ruedas.*
Profesora:	*Yo lo que quiero que me expliquen es cómo con esto se logra la cantidad de soluciones, no lo entendí.*
Iair:	*Hay una posibilidad cada 6 ruedas*
Profesora:	*¿Entonces?*
Andrés:	*Puedo poner 6 ruedas de triciclos y 94 de lo otro, 12 ruedas de triciclos y 88, ...*
Profesora:	*Por qué interpretás que esta división te da la cantidad de posibilidades?*

Iair:	*Cada 6 podés, entonces dividís 100 dividido 6, que es el máximo, es a lo que tenés que llegar y te la cantidad de veces que podés*
Andrés:	*Es la máxima cantidad de veces que 6 entra en 100. No me puedo pasar de 100.*

Pareciera que para Andrés es tan obvio el sentido de la división que está usando, que no sabe qué tiene que explicar. La primera pregunta de la profesora (¿de dónde salió el 6?) es respondida "estrictamente" por Andrés, sin entrar a explicar por qué la división resuelve el problema. Tanto Débora como la profesora insisten en indagar por qué corresponde una división, y Andrés continúa respondiendo sobre la elección de los términos de la operación y no sobre la operación misma. La insistencia de la profesora está indicando que hay un sentido no compartido, que es necesario explicitar, y se requieren varias preguntas hasta que Andrés puede producir una respuesta "satisfactoria"[37].

Notemos que para poder pensar esta división Andrés tuvo que haber "recorrido" el conjunto solución y haberse dado cuenta de que las ruedas de los triciclos van ascendiendo de 6 en 6, desde 6 hasta 100, y que la división resuelve el problema de saber por cuántos números "se pasa". Interpretamos que la explicación que Andrés puede aportar respecto del uso de la división que está haciendo, enriquece el sentido del problema y, desde esta perspectiva, la decisión de la profesora de detenerse en la discusión y aceptar el desvío, pudo haber sido productiva.

Más globalmente, lo que nos interesa señalar de esta puesta en común, es que en un grupo de alumnos acostumbrados al debate como es éste, se desvanece la discusión sobre aquello que no presenta mayores dificultades y sólo puede sostenerse la discusión acerca de las cuestiones que generan alguna resistencia. Interpretamos que esta "clasificación espontánea" de los alumnos en lo que para ellos es "lo viejo" y "lo nuevo" del problema, nos está indicando cuáles son los componentes relevantes del espacio de articulación que estamos explorando. Digamos finalmente, que las dificultades en instalar la discusión sobre la producción de soluciones, hacen que no se llegue a debatir sobre procedimientos de despeje, ya que estos no fueron puestos en juego por ningún alumno. En estas condiciones se pasa a la discusión sobre la fórmula.

C. La negociación de las fórmulas

Como hemos anunciado al presentar la crónica del desarrollo, a partir de que la profesora pregunta si se podría escribir una fórmula que permita "fabricar" soluciones, se inicia un proceso de negociación colectivo, en el que se va introduciendo tanto el significado de lo que es una fórmula como aspectos del funcionamiento de la escritura algebraica. En la medida en que, -lo hemos analizado a priori- los alumnos no tienen un sistema de teoremas para validar sus propuestas, la idea que ha orientado nuestro trabajo es la de someter las escrituras que los niños van inventando, a la consideración del conjunto y, a partir de ese proceso en el que se van

[37] Satisfactoria para sus interlocutores, que parecen no comprender por qué utiliza una división.

poniendo a prueba las posibilidades de los otros de interpretar cada producción y de "hacerla funcionar", generar condiciones para que tenga sentido transformar las escrituras en objeto de discusión e introducir las convenciones. A través de este trabajo, la docente va accediendo a los distintos usos y significados que los alumnos atribuyen a las escrituras, y esto le permite tomar conciencia de lo poco transparente que son las fórmulas que ella tiene que enseñar a utilizar. Los alumnos por su parte, deben renunciar a algunos de los usos personales –como hemos visto en el caso del problema de la yerba en la Escuela Despertar, no siempre es necesario renunciar a los usos personales- en pro de adaptarse al funcionamiento institucional que la escuela le exigirá.

Recortamos de la discusión en torno a la fórmula, para analizar, dos episodios que dejan traslucir las resistencias de los alumnos para tratar con dos variables y sobre todo para aceptar que una única fórmula puede "producir" todas las soluciones. Aclaremos que a lo largo de la discusión hubo otros momentos –además de los seleccionados acá- en los que también se dio un juego rico de propuestas de algunos niños, comentarios de los compañeros e intervenciones de la docente. Los episodios recortados son:

a. La propuesta de Dana

b. La propuesta de Andrés

a. La propuesta de Dana

La profesora comienza preguntando si habrá una fórmula que "permita fabricar soluciones". Varios alumnos manifiestan no entender la pregunta, cuyo sentido se va precisando paulatinamente. Los niños proponen respuestas, todas basadas en la idea de covariación que –recordemos- fue la que primó en el momento de producir soluciones:

Los triciclos aumentan 2 y las bicicletas disminuyen 3

Cada 2 triciclos aumentan 3 bicicletas, etc.

En ese momento interviene Dana, la "protagonista" de este episodio:

Dana:	*No hay una fórmula como cuando hacíamos 100 - N por tanto.* ***No hay una manera porque hay muchas posibilidades.***
Profesora:	*Acá me están diciendo que* ***esto no se puede resumir en una fórmula*** *porque hay muchas posibilidades.*
Dana:	*Ah, sí.* $3 \times N + 2 \times N = 100$
Profesora:	*¿Qué es N?*
Dana:	*Las ruedas, R*
Profesora:	*¿Cómo decís vos?*
Dana:	*3 R + 2 R, R de ruedas, igual a 100. Tres por R, más dos por R, igual a 100.*
	Algunos alumnos protestan

Laura:	*Si hacés una ecuación la respuesta es que R es igual a 20, y 20 en la tabla era el único número que coincidía*
Dana:	***Yo hice como una expresión, no tanto como una ecuación.** Poniendo esa ecuación se puede hacer el problema, pero **si vos lo dejás como una expresión**, esa R puede tener diferentes valores.*

Dos ideas surgen de entrada, una aportada por Dana, y otra por la profesora: una fórmula no puede "contener" muchas soluciones, y una fórmula resume las soluciones. Esta última no puede seguramente ser comprendida en este momento y será objeto de sucesivas actualizaciones.

La intervención de Laura, se opone al uso que hace Dana de las letras y la obliga a realizar más precisiones. Cuando Dana responde que hizo *"como una expresión, no tanto como una ecuación"* y que *"si lo dejás como una expresión R puede tener diferentes valores"*, está manifestando: 1) un cierto conocimiento del funcionamiento de las ecuaciones con una variable y de las operaciones con letras, 2) su intención de no operar con las letras *-las va a dejar-* y 3) que su escritura cumple la función de guardar la traza de las operaciones y por eso puede atribuir distintos valores. Es claro que este uso no tiene en cuenta la lectura que van a hacer los otros y, es justamente esa lectura la que rechaza la utilización que hace Dana.

Por su parte, Laura realiza la ecuación en su carpeta y señala que de esa manera se obtiene un único par de la lista que ella tiene anotada. Esta alumna está "cruzando" la información que le brinda la representación "tabla" con la de la ecuación con una variable, cruce que le muestra que la ecuación representa un caso particular del conjunto solución, con la condición adicional de que las cantidades de triciclos y bicicletas son iguales. Pensamos que esta interacción entre Laura y Dana por un lado y entre Laura, la tabla y la ecuación, permite ver - por lo menos para Laura- los límites de una ecuación con una variable. En su carpeta, esta alumna ha colocado dos asteriscos (*): uno en el renglón correspondiente al par (20, 20) y el otro en la expresión x = 20 que corona la resolución de la ecuación.

Continuamos con el registro:

Profesora:	*(a Dana) ¿Por ejemplo?*
Dana:	*3 x 8 + 2 x 38*
Laura:	*R y R es lo mismo, no podés hacer 3 por 8 y 2 por el número que necesitás, porque R es igual, tendría que ser 8.*
Profesora:	*¿Qué pasa cuando yo aplico varias veces una misma letra en una expresión?*
Varios:	*Tiene que ser la misma, tiene que tener el mismo valor.*
Profesora:	*En el momento en que la reemplazo por un valor, tengo que conservar el valor*

Dana:	*Entonces sería 3 por R más 2 por N igual a 100*
Profesora:	*¿Y qué es N? Porque R es cantidad de ruedas, me dijiste vos*
Dana:	*Entonces podés hacer 3 t + 2 b*
Al:	*Pero ahí habría dos incógnitas*
Profesora:	*A ver, ¿qué pasa con eso?*
Al:	***No se puede sacar***

La profesora da lugar a Dana para que explique cómo usa ella la "expresión", Laura la vuelve a objetar y **la docente encuentra una espacio para comunicar que si la letra es la misma, hay que dar el mismo valor**. Dana introduce entonces dos letras, aunque no explicita su significado, pero aparece otro problema: ¿cómo se manipula una expresión con dos variables?

Laura:	***Hay que hacer dos ecuaciones para sacar dos incógnitas***
Profesora:	*Nosotros no vimos ecuaciones, pero ¿te acordás que vimos problemas con expresiones en las que usábamos letras?*
Micaela:	***Cuando tenés una ecuación tenés que sacar un valor, no podés sacar varios.***
A:	*Sí se puede, pero como son diferentes valores,...*
A2: ¿Se puede resolver esa ecuación?	
A3: Sí, se puede, pero nosotros no sabemos.	
Débora:	***Para mí la fórmula está bien, ahora resolverlo, ya es otra cosa.***
Micaela:	*Para mí si nosotros sabemos la cantidad de bicicletas, podemos tener seguro la cantidad de triciclos*
Profesora:	*¿Qué opinan de lo que dice Micaela?*
Micaela:	***Si sabemos la b, podemos saber la t. Pero si no sabemos ni la b ni la t, no sabemos cuánto nos va a dar.***

Las ideas de los niños acerca de ecuación con una variable y de incógnita sobrevuelan esta discusión: una ecuación da como resultado un valor, por cada incógnita debería haber una ecuación. Por otro lado, volvemos a encontrar la distinción entre "fórmula" y "ecuación lineal con dos variables" que surgió en la Escuela Despertar. Es decir, los alumnos aceptan la idea de fórmula (dado un valor se obtiene otro) pero resulta difícil concebir esa escritura como una ecuación. Los alumnos se hacen preguntas: *¿se puede resolver una ecuación con dos variables? ¿cuál es el "resultado" de una ecuación con dos variables?, ¿cómo se opera con este nuevo* *objeto?, ¿serviría para resolver el problema?* La distinción de Débora (*la fórmula está bien, ahora resolverlo ya es otra cosa*) parece atribuir a la fórmula algún otro uso que no es el de ser un instrumento para -usando los términos de la profesora- "fabricar soluciones". Como veremos más adelante y a propósito del próximo problema, varios niños consideran que la fórmula sirve para verificar, no para resolver. Desde esa perspectiva, los alumnos (por ejemplo Dana) pueden aceptar la utilización de una letra para las dos variables ya que están usando la fórmula como una "caja" que guarda la estructura del cálculo para verificar las soluciones que ya tienen.

Las respuestas a las preguntas que se plantean sólo pueden ser aportadas por la docente. En este caso, la profesora da lugar a la participación de distintos niños, pero la discusión no avanza –no puede avanzar- hasta que ella no muestre el funcionamiento de la fórmula para producir soluciones. Notemos que la docente hace una referencia a otros momentos en los que se han usado expresiones, referencia que, al estar tan contextualizada resulta muy vaga y requeriría por parte de los alumnos la difícil tarea de recuperar una clase específica, o un grupo de clases. Reseñemos las distintas instancias del episodio:

- una alumna plantea que "no hay una fórmula" porque hay muchas posibilidades,
- la docente habla de la fórmula como "resumen"
- la misma alumna que dijo que "no hay una fórmula" propone una fórmula en la que se usa la misma letra para las dos variables
- varios alumnos objetan este uso de las letras
- se contrasta el conjunto solución del problema con la solución que ofrece una ecuación con una variable (agregando implícitamente una condición); esto plantea los límites de una ecuación con una variable como modelo de este problema
- se explicita un uso personal de la fórmula en la que se utiliza la misma letra para las dos variables,
- se rechaza el uso personal
- se institucionaliza: "por cada variable se usa una letra diferente"
- se propone una fórmula con dos letras
- se explicita el uso de la fórmula: dado un valor se obtiene el otro
- se plantea el problema de resolver una ecuación con dos variables

Las ideas volcadas por los alumnos en la discusión, constituyen un entramado de relaciones a partir de las cuales hay buenas condiciones para institucionalizar el uso de la ecuación lineal con dos variables. Sin embargo, el orden de la clase, no tiene la linealidad que se esperaría "desde afuera" y, en lugar de mostrar cómo obtener soluciones a partir de la fórmula que propuso Dana, la profesora le otorga la palabra a Andrés, que tiene otra propuesta. La intervención de la docente para explicar cómo usar la fórmula de Dana, quedará para la clase siguiente.

b. La propuesta de Andrés

El episodio que presentamos, tiene un aspecto similar al de Dana, en el sentido en que también en este caso se puede observar un uso personal de la escritura, que se completa con el pensamiento de su "autor" pero que no resiste la comunicación con otros. Lo hemos seleccionado porque además de los elementos ya considerados en el caso anterior, nos interesa resaltar dos aspectos: 1) las dificultades de comunicación con la docente a quien le cuesta más que en el ejemplo precedente, encontrar una "zona común" a partir de la cual, "mover" el trabajo de este alumno hacia las escrituras convencionales y, 2) el esfuerzo de Andrés por extender el uso de una ecuación con una variable a este problema (esto es coherente con lo que este alumno había planteado de entrada). Veamos la trascripción del registro.

1. *Andrés: Yo pensé una. Micaela dijo: si sabemos t, sabemos b. Entonces si sabemos 3t, sabemos 2 b también. Hacemos 100 - 3t, te da 2b.*
2. *Profesora: A ver analicemos eso.*
3. *Varios: Es lo mismo.*
4. *Andrés:* ***Con eso podemos decir, con una sola incógnita, no para pensarlo con ecuación, pero con una sola cosa que no sabemos, podemos expresar las dos...la t y b***
5. *Profesora: A ver, poné un ejemplo en tu fábrica de soluciones.*
6. *Andrés: Yo lo que hice fue 6x...*
7. *Profesora: Vos me dictaste eso. Remitite a las letras que usaste*
8. *Andrés: Yo lo que había pensado es que un grupo varía cada 6*
9. *Profesora: Vos dijiste que cada 6 ruedas había una combinación, dijiste vos eso.*
10. *Andrés: Varía cada 6 , 6 y 94....*
11. *Profesora: Bueno, ¿cómo esto te ayuda a fabricar las soluciones?.*
12. *Andrés - Yo lo que pensé fue: 6 x X + 100 - 6 x X.*
13. *Profesora: Entonces esta no la usás, es otra fabrica de soluciones. ¿X qué es?*
14. *Andrés:* ***Dijimos que varía cada 6, entonces es 6 x algo.***
15. *Profesora:* ***¿Que sería X?***
16. *Andrés:* ***Cualquier cosa, no tiene un número fijo.***
17. *Profesora:* ***Algo, ese algo conceptualmente ¿qué es?***
18. *Andrés : Porque pensamos que la cantidad de una de las ruedas varía cada 6, entonces es 6 x algo, a ese algo lo llamamos 6x.*
19. *Iair: Nosotros hicimos para pensarlo, 6 x X, que es la cantidad de ruedas de triciclos + 100 - 6 x X, que es la cantidad de ruedas de bicicleta.....es 100 .*
20. *Profesora: ¿Vos dijiste 6 x X + 100 - 6 x X? ¿Qué da esto?*
21. *Varios: Es lo mismo.*
22. *Andrés: Hice por una, hice 6 x 8 = 48...*
23. *Varios: Te da 100 .*

24. Profesora:	*¿Para qué valores se cumple esto?*
25. Andrés: Para todos.	
26. Profesora:	*¿Qué números hay que poner en la X para que esto se cumpla?*
27. Gabriela:	*lo mismo que pongas acá (por 6 x) te va a dar acá (por el otro 6x).*
28. Profesora:	*Lo mismo que pongas acá te va a dar acá.*

La primera intervención de Andrés es en realidad el comienzo de una explicación que va a desembocar en la ecuación $6x + 100 - 6x = 100$, pero la profesora quiere detenerse ahí. Sin embargo, en la intervención 4, Andrés explica que su intención es usar una variable –una incógnita dice él- para expresar las dos (t y b). Andrés usa la variable x, que en realidad puede pensarse como "el número de renglón de una tabla en la que las soluciones están ordenadas de la menor a la mayor cantidad de triciclos" o también puede concebirse como "la cantidad de grupos de dos triciclos". Se trata de una variable que pertenece al intervalo [1, 16]. En la misma intervención Andrés dice que "no es para pensarlo como ecuación". Esto es similar a lo que había planteado Dana y nuestra interpretación es que este alumno –al igual que Dana- quiere decir que no es para operar, "para juntar las x". En la intervención 7 se sigue manifestando el malentendido. La docente le pide que se remita a las letras que propuso, cuando en realidad él no había terminado de proponer y en la intervención 13, se hace evidente otra desinteligencia cuando la profesora le dice que no usó su primera ecuación, cuando en realidad sí la usa para luego transformarla. Andrés propuso un parámetro, x, que él obtuvo a partir de la necesidad de contar las soluciones, pero cuyo significado no puede expresar claramente; sin embargo, la docente le pregunta qué significa conceptualmente. De alguna manera la profesora está comunicando que la variable seleccionada **tiene que tener** un significado en términos del problema. A partir de la intervención 20 la profesora intenta convencer a Andrés que escribió una tautología, pero como Andrés "no la está usando como ecuación" no se hace cargo del planteo de su docente.

Recordemos que en el comienzo de la clase Andrés había dicho por un lado, que él no sabe resolver ecuaciones con dos variables y, por otro lado, que si el problema tuviera varias soluciones "la ecuación se lo diría". Ahora él consigue una "expresión" con una variable que tiene infinitas soluciones pero que, restringido el dominio al intervalo [1,16], tiene las 16 soluciones del problema. La coherencia de su proyecto es cabal. La intervención 25 de Andrés muestra que él sabe que escribió una tautología, pero defiende el uso que está haciendo según el cual trata el 6 x por un lado y el $100 - 6x$ por el otro. Notemos que su esfuerzo por llevar todo a una variable, impulsado por el hecho de que no sabe manipular con ecuaciones de dos variables, lo lleva a profundizar al máximo las relaciones que él establece a propósito del problema.

Mirando un poco más de lejos todo el episodio, notemos el riesgo que tiene para la docente dejar que se hagan públicas producciones tan personales sin que ella haya tenido tiempo de interpretarlas. Observemos que la dificultad de la docente de comprender la manera de pensar de Andrés, le impide mostrarle los inconvenientes de interpretación para los demás que tendría su producción. Se centra en cambio en hablarle en tanto representante de las convenciones, sin que su discurso pueda interactuar con el de Andrés quien no se siente afectado porque no niega lo que la profesora dice, pero piensa que no afecta lo que él hizo.

Además, en la medida en que la profesora no comprende bien la producción del alumno, no puede gestionar la interacción con otros alumnos, que podrían haberle ofrecido retroacciones, así como lo habían hecho en el caso de Dana.

En la clase siguiente, la profesora retoma las diferentes propuestas, y en particular el trabajo de Andrés, habiéndose dado tiempo de analizarlo detenidamente.

D. Las institucionalizaciones de la docente

La docente retoma las fórmulas planteadas en la clase anterior. Se apoya en la propuesta final de Dana y explica cómo obtener pares solución a partir de la fórmula $3t + 2b = 100$. La profesora explica que se elige un valor dentro de los posibles de una de las variables y se obtiene el correspondiente de la otra. Resalta dos ideas: 1) es necesario conocer de antemano los valores posibles y, 2) como producto de asignar un valor y calcular el otro, se obtiene un par de números. Se revisa qué sucede si se atribuyen valores fuera del dominio. Cuando la docente vuelve a remarcar que hay que asignar un valor a una de las variables para obtener la otra, una alumna plantea: *"entonces no hacés todo el proceso", y luego aclara: "no pasás las x, algo tenés que poner vos"*. Se marca así la diferencia con las ecuaciones de una variable, que algunos alumnos conocen y acerca de las cuales se "sabe" que si se manipulan, se obtiene un resultado que es el valor de la incógnita. Además se resalta la idea de que "hay que poner algo", es decir, atribuir valores, idea que necesita un tiempo para resultar familiar.

A partir de la intervención de una alumna ("para no tener dos incógnitas, la única posibilidad es 20, porque si tenés dos incógnitas, tenés muchas posibilidades"), la profesora explicita que en ese caso habría otra condición: igual cantidad de triciclos y de bicicletas. A partir de ahí, se formulan otras posibles condiciones que "llevarían" a una ecuación con una variable, por ejemplo, el "doble de bicicletas que de triciclos" aunque la docente aclara que podría ocurrir que en ese caso no hubiera solución. La profesora remarca cómo la segunda condición permite calcular todo en función de una de las variables, perdiendo el grado de libertad que hacía que el problema tuviera varias soluciones.

Desde nuestro lugar de observadoras de la situación, o sea "desde afuera", "vemos" que de alguna manera se están retomando las primeras resoluciones "artiméticas" de algunos alumnos que agregaron –sin tener conciencia de ello- una condición adicional para tener una única solución. Pero, ya se sabe, no "se ve" lo mismo desde afuera que desde adentro de una situación y la profesora no hace ese tipo de alusiones.

Finalmente se "evocan" otras situaciones en las que se usaron fórmulas y letras: cálculo de áreas, las situaciones de división entera y el cálculo de la suma de los ángulos interiores de un polígono, sin que se lleguen a comparar verdaderamente esos otros usos.

Breve resumen del desarrollo del problema de los triciclos en el Instituto Martín Buber

Los alumnos plantearon de entrada un enfoque bastante general, desplegando en su mayoría la estrategia de covariación. Esto hizo que rápidamente los "asuntos" de este problema fueran la cantidad de soluciones y el dominio de la variable "cantidad de triciclos", cuestiones con las que los niños "se encontraron" antes de que la profesora las formulara.

Como la mayoría de los alumnos utilizó la estrategia de covariación, la necesidad de escribir la fórmula, mueve para este grupo, relaciones diferentes de las que se invirtieron para obtener las soluciones, lo cual da cuenta del valor de producción que tiene la escritura de la fórmula, en tanto supone otro recorte de las relaciones que se pueden hacer en torno del problema.

El problema se desarrolla fundamentalmente en fase colectiva y la producción de la fórmula en tanto proceso de negociación a partir de producciones personales, ocupa un lugar central. En ese proceso, los alumnos muestran distintos usos que, al someter a la consideración de "los otros" se van transformando para ir adaptándose poco a poco a las pautas del funcionamiento institucional a las que invita la profesora.

Encontramos sin embargo, dos grandes riesgos en este modo de gestionar la emergencia de la fórmula: el de dejar avanzar la discusión entre los alumnos sin que ellos tengan elementos para concluir, lo cual puede hacer caer la clase en un momento de incertidumbre e improductividad; y el de permitir que los alumnos expongan públicamente aquello que la profesora no ha tenido tiempo de interpretar, provocando malentendidos que llevan a la docente a superponer lo convencional a lo personal, haciendo estéril la discusión e inhibiendo la participación de otros.

4.2 El problema de las monedas en el Instituto Martín Buber

Este problema se desarrolla a lo largo de dos clases. En la primera los alumnos producen soluciones y luego se realiza una fase colectiva. Recortamos para el análisis las siguientes cuestiones: con relación a la producción de soluciones: a) persiste la dificultad de ver las soluciones como pares, b) hacemos una breve reflexión sobre los inconvenientes de presentar un contexto demasiado familiar para los alumnos y, c) analizamos a partir de la producción de dos alumnas en qué sentido el trabajo propuesto genera condiciones para comenzar a "instalar" las escrituras algebraicas. Estas tres cuestiones son objeto del punto E. En la fase colectiva ciertas intervenciones de la docente "empujan" hacia una generalización de los procedimientos (punto F). Se discuten los tipos de fórmulas propuestas, el estatuto que tienen las letras en las mismas y las funciones que los alumnos les atribuyen (punto G). En la segunda clase se exponen diferentes estrategias y se someten a la consideración del conjunto. Se precisan condiciones sobre las variables, se establece el uso de la fórmula para producir soluciones y la suficiencia de una sola fórmula para obtener los pares. Analizamos la actividad en tanto herramienta del docente para apoyar sus institucionalizaciones.

E. Producción de soluciones. Visualizar las soluciones como pares: una dificultad resistente. La influencia del contexto.

A pesar de la gran cantidad de tiempo dedicada a la discusión sobre las fórmulas a propósito del problema de triciclos y bicicletas, al abordar el problema de las monedas prevalecen las estrategias de covariación y sólo dos grupos introducen de entrada la fórmula. En realidad el problema resulta fácil para estos alumnos quienes se encuentran cómodos con las estrategias de covariación sin que resulte evidente que escribir la fórmula deja alguna "ganancia". En realidad en el problema anterior la fórmula ha sido un objeto de reflexión que dio lugar a identificar la necesidad de usar una letra para cada variable y a considerar que la fórmula de alguna manera "contiene" las soluciones. Se trató de una discusión interesante pero tratada en un momento en el que los alumnos ya tenían todas las soluciones. Su eficacia en tanto algoritmo de cálculo no estuvo en juego entonces.

El panorama es el siguiente: 4 de los alumnos que antes se habían apoyado en la idea de covariación, se "pasaron" ahora a procedimientos de despeje (de estos 4, 2 han planteado una fórmula); 4 de los que habían puesto en juego estrategias aritméticas, se movieron ahora hacia covariación; hay entonces en esta primera fase 13 alumnos que plantearon covariación, 4 despejaron una de las variables y 5 alumnos permanecen en estrategias "aritméticas".

Una vez presentado el panorama general de la clase, pasamos ahora al análisis de las cuestiones puntuales que hemos seleccionado.

a. Dificultad para visualizar la dependencia entre las variables

Concebir las soluciones como pares y no como números "sueltos" es para muchos alumnos una dificultad que "va y viene". Si bien se manifiesta más claramente en los alumnos "aritméticos", pensamos que también hay resabios de esto cuando los estudiantes piensan que es necesario plantear dos ecuaciones para obtener las soluciones o cuando "cuentan" diferente cantidad de soluciones, según cuál de las variables tomen para "recorrer". La idea de dependencia que subyace a este problema es nueva para los niños y permanece oculta cuando sólo hay que determinar uno de los datos, como ocurre en los problemas aritméticos que los niños vienen resolviendo. Veamos cómo se expresa esta dificultad en el caso de Ezequiel y Daniel. La profesora se acerca a ellos y les pregunta cuántas soluciones hay:

Ezequiel:	*Hay 40 soluciones*
Profesora:	*¿Cómo saben que hay 40 soluciones?*
Ezequiel:	*20 posibilidades para los 10 centavos y 20 para los 50.*
Profesora:	*No te entiendo bien. ¿Me explicás un poco mejor?*
Ezequiel:	*Porque puede ser 1 peso de 10 centavos, 2 pesos de 10 centavos, 3 pesos y así y lo mismo con los de 50 centavos.*
Profesora:	*Pero cuando tenés un peso en monedas de 10 centavos, ¿cuánto tenés en monedas de 50 centavos?*
Ezequiel:	*19. Ah, son 20 posibilidades. Acá va subiendo y acá va bajando, acá va subiendo hasta 20 y acá va bajando hasta 1.*
Profesora:	*¿No hay posibilidades intermedias?*
Ezequiel:	*Sí, con coma. Infinitas.*
Profesora:	*¿Infinitas?*

Ezequiel:	*Sí, con la coma sí.*

Además de no reconocer de entrada la dependencia entre las variables, se "asocian" a la respuesta de Ezequiel, otras dificultades: primero establece que las cantidades de monedas van de uno en uno, pero luego, cuando se le pregunta por posibilidades intermedias parece pensar en todos los números racionales.

La profesora se retira del grupo y los alumnos siguen trabajando. Luego llaman a la docente y Ezequiel comenta que: "hay 40, porque empezás de 0,50, después 1, después 1,50 y así hasta 20. En su carpeta tiene registrado: 0,50- 1- 1,50- 2- 2,50- 3- 3,50- 4- 4,50- 5- 5,50- 6- 6,50, etc. = 40 posibilidades. Cuando la docente le dice que hay cuarenta posibilidades, pero que las razones que había dado antes no eran válidas, Ezequiel responde que hay 20 números redondos y 20 con coma. Ahora piensa la cantidad de soluciones analizando el recorrido de una de las variables.

b. La influencia del contexto

Muchos alumnos hacen cálculos para contar, por ejemplo, el dinero que representa una cierta cantidad de monedas de 50 centavos, pero, al tratar el problema de una temática tan familiar, mezclan la información que viene del cálculo, de la que ellos infieren del contexto. Es así como por ejemplo, una alumna dice *"necesito 20 monedas de 50 para tener 10 pesos, entonces 20 x 50 = 10"*. Está claro que en el contexto de las monedas, la "operación" es válida. Esta distinción se nos hizo más visible a partir de la lectura del trabajo de R Campos Lins (2000) al que hemos hecho referencia en el capítulo 2. Recordemos que el autor concibe que el contexto en el que se piensa un "objeto" forma parte de la caracterización del objeto.

Este pequeño hecho nos suscita la siguiente reflexión. Por un lado, la modelización algebraica, obligaría a precisar cuestiones que pueden sobreentenderse en el marco de un contexto particular. Por ejemplo en este caso, el pasaje al álgebra haría necesario una correcta utilización de las unidades, y esto tiene un valor en términos de aprendizaje de los alumnos. Por otro lado, y de manera casi opuesta, nos preguntamos si un contexto que, por su familiaridad aporta mucha información, es "bueno" para que se aprecie la potencia del álgebra como herramienta de modelización. Aparece acá una tensión entre ventajas y desventajas de recurrir a plantear problemas que se refieren a realidades muy familiares para los alumnos y, los resultados obtenidos apenas nos alcanzan para plantearnos la pregunta acerca de las características de un contexto "óptimo", sin que podamos avanzar más allá en la formulación de una respuesta.

Del algoritmo a la fórmula: un espacio para la producción de escrituras

A lo largo de este trabajo, venimos planteando que, al proponerles a los alumnos la producción de escrituras, no estamos esperando que se acerquen lo máximo posible a las escrituras convencionales para luego "completar" desde la enseñanza, "lo que les falte". Nuestra línea de trabajo ha sido la de generar un espacio tal, que al hablar de las escrituras, el discurso del docente pueda entrar en diálogo con las preguntas y las ideas de los alumnos al respecto. Desde esta perspectiva, presentamos el ejemplo de dos alumnas - Ginette y Fernanda- que, a partir del trabajo propuesto, le formulan a la docente preguntas específicas sobre las "maneras de escribir". Veamos:

Ginette:	*Con Fernanda antes habíamos hecho* ***una fórmula pero escrita****, habíamos puesto: busque un número que pueda elegirse para la cantidad de monedas de 50 centavos, luego a esa suma se le resta el total y al resultado se lo multiplica x 10 para saber las monedas de 10 centavos. Y esta me daba cuánto era la cantidad de monedas de 50 centavos y cuánto de 10.*
Profesora:	*Bien.* ***¿Cuál es la pregunta?***
Ginette:	*¿Está bien como lo pongo así?, porque yo* ***no sé como ponerla en una cuenta****, pero sacamos esa conclusión.*
Profesora:	*O sea vos pondrías como pasos. Bueno. Poné : primero busque un número X, después.*
Ginette:	*Un número X de 50 centavos.*
Profesora:	*0,50 x X.*
Ginette:	*Después 20 – ese número x 10.*
Fernanda:	*Yo puse X x 0,50, y ¿cómo hago para escribir con lo que me da esto, 20 – esto? ¿Cómo lo escribo?*
Profesora:	*Una posibilidad es poner 20 – esto. Eso es una posible.*
Fernanda:	*20 – X x 0,50.*
Profesora:	*Claro. Después, ¿qué hacés?*
Fernanda:	*por 10. Pero, ¿cómo haría toda la cuenta?*

Queda claro que cuando Ginette dice "fórmula escrita", se refiere a un relato con palabras, escrito pero, como dice Chevallard, traducción de lo oral (Chevallard, Y; 1995). Su procedimiento es, sin duda, general; pero "separado en pasos", sosteniendo la tradición aritmética. La primera intervención de la docente *(¿cuál es la pregunta?)* contribuye a que estas alumnas expliciten la distinción entre "poner con palabras" y "poner en una cuenta". Pareciera que la dificultad está en conseguir **una** cuenta, es decir una única relación representando el problema, más que en las cuentas en sí. Aunque el ejemplo ilustra el salto que supone escribir el problema algebraicamente, nos interesa resaltar sobre todo que la posibilidad de que las alumnas se formulen preguntas sobre la escritura da un espacio mucho más "real" a las explicaciones de la docente.

F. Las intervenciones docentes que apuntan a la generalización

Tal vez porque la profesora tenía cierta conciencia de los "desvíos" producidos por sus alumnos en las discusiones a raíz del problema de triciclos y bicicletas, en esta oportunidad hubo más espacio para discutir la producción de soluciones y para dar más lugar a los procedimientos menos sistematizados. Hemos registrado que, frente a los relatos de estos niños "aritméticos" la docente trataba de rescatar la idea subyacente a los mismos, comunicando de esta manera la noción de procedimiento general, necesaria para la práctica algebraica. Recortamos un ejemplo, aunque este tipo de intervenciones se repitieron para cada una de las propuestas:

Alumno:	*Nosotros hicimos 5 pesos dividido 0,10 y nos dio 50 y 15 dividido 0,50 y nos dio 30*
Profesora:	*Entonces ¿cuál es la solución?*
Alumno:	*50 monedas de 10 centavos y 30 de 50*
Profesora:	*O sea que lo que están haciendo acá como idea es repartir los 20 pesos, una parte en monedas de 10 y otra parte en monedas de 50.*

Si bien hay un cierto riesgo de provocar un "efecto Jourdain" en el sentido de que la docente no constata que efectivamente esa es la idea que tuvieron los alumnos y podría estar reconociendo algo que ellos en realidad pensaron de otra manera, nos parece interesante que los alumnos puedan escuchar una cierta versión de lo que ellos hicieron, en términos mucho más generales o por lo menos que puedan acceder a que hay una idea detrás de lo que han pensado. El equilibrio entre "empujar a la generalización" y sobreinterpretar lo que los niños han elaborado, es, claro, muy delicado.

G. La fórmula para producir y la fórmula para verificar: una tensión entre dos perspectivas

Analizaremos ahora las propuestas de dos grupos de alumnos que intervienen en la fase colectiva: Laura y Dana que usan la fórmula "para verificar" y Andrés que encuentra una manera de "delegar" en la escritura "decisiones" acerca del dominio de la variable "cantidad de monedas de 10 centavos". La discusión entre ambos grupos lleva a los alumnos a explicitar diferentes funciones de la fórmula y nos permite inferir el estatuto que tienen las letras para los niños, en cada caso.

Laura y Dana explican que ellas hicieron una tabla - usaron la estrategia de covariación- y luego hicieron la fórmula **"para verificar"**. El proyecto tiene coherencia porque usan una relación para producir pares (5 monedas de 10 centavos equivalen a 1 de 50 centavos) y otra para verificar ($0{,}5\ x + 0{,}1\ y = 20$). Ahora bien, en este uso, **las letras son datos** de la misma manera en que lo son las letras en las fórmulas de áreas y volúmenes que los niños aprendieron en este mismo curso. El uso de una fórmula "para verificar", fue también puesto en juego a propósito de la secuencia de división entera. Mostramos un tramo del registro:

Laura:	*Antes de hacer la tabla hicimos $0{,}10X + 0{,}5Y = 20$*

Profesora:	*A ver me lo explican.*
Laura:	*Que tantas monedas de 10 centavos....*
Profesora:	*¿Cuál es tantas?*
Laura:	*x , más otras tantas monedas de 50 centavos...*
Dana:	*Igual 20 pesos, tendría que dar 20 pesos.*
Laura:	*Por eso en la tabla agarramos cualquiera y tenía que cumplir con esto. Agarramos x y lo reemplazamos por los números de la tabla...*

Andrés pide luego la palabra y "sorprende" con una propuesta: *"en lugar de 0,10 x, hay que poner 0,10 . 5 x, porque la cantidad de monedas de 10 tiene que ser múltiplo de 5".* Veamos la interacción que se genera:

Profesora:	*Andrés, ¿que querés decir?*
Andrés:	*Que para mí a eso le falta 0,10 x 5 x X, ellas dijeron que tenía que ser múltiplo de 5.*
Laura:	*No, porque el múltiplo de 5 tiene que ser la X.*
Andrés:	*El múltiplo de 5 tiene que ser la cantidad de números de....*
Laura:	*Por eso x.* ***El x y el y son los números que van en la tabla.***
Andrés:	*Como tiene que ser múltiplo de 5 tiene que ser por 5.*
Profesora:	*Lo que ustedes dicen, vamos a ver si son cosas distintas.*
Dana:	*¿Le puedo decir algo a Andrés?*
Profesora:	*Sí, pero antes yo quiero estar segura de que todo el mundo entendió como ellas hacen funcionar esto (por la fórmula para verificar), ¿todo el mundo lo entiende?*
Varios:	*Sí*
Profesora:	*Bien, ahora vamos a plantear lo que ellos estcn discutiendo para que todos lo entiendan porque me parece que se les perdió un poco. Digo tu planteo y después discuten. Lo que Laura, Dana y Melani dicen es que acá la x siempre va a ser un múltiplo de 5, ellas dicen verifico y va a ser un múltiplo de 5. Lo que Andrés dice es que si tiene que ser un múltiplo de 5 acá no puedo poner x, tengo que poner 5x.*
Andrés:	***Conviene poner 5X.***
Laura:	*No , es lo mismo.*
Melani:	*No hace falta.*
Andrés:	***Pero tendría que saber que tiene que ser múltiplo de 5.***

Como decíamos antes, Andrés quiere "liberarse" de la responsabilidad de asignar múltiplos de 5 a la variable "cantidad de monedas de 10 centavos", por eso dice que conviene poner 5 x, porque si no, habría que controlar que hay que poner un múltiplo de 5. Para las niñas que discuten con Andrés, los valores posibles de x ya están determinados y son los que se obtuvieron en la tabla, entonces no habría nada que controlar. Laura reafirma esta interpretación: *"nosotras no pusimos 5, porque ya sabíamos que en la tabla eran todos múltiplos de 5, si le poníamos por 5,* ***iba a ser otra cosa****, era para verificar, no estábamos planteando una ecuación para resolver el problema.* ***Él lo hace para resolver el problema****"*.

El ejemplo nos permite ver cómo estas alumnas pueden ligar las distintas escrituras a los diferentes usos que se les atribuyen. La idea de que se escribe en función de lo que se quiere hacer con esa escritura, es un conocimiento de tipo "transversal" que comienza a circular en la clase, a partir de la confrontación planteada.

La profesora vuelve a explicitar los términos de la discusión, la re lanza para todos los alumnos y da un tiempo para que los niños tomen una posición de manera individual antes de continuar la puesta en común. La discusión continúa y, a medida que se desarrolla, la clase va "pasando" por las siguientes cuestiones: a) cómo se hace para verificar y cómo para "resolver" y b) el significado de la x es diferente en cada una de las propuestas. Esto último permite introducir la idea de que sobre un mismo problema se pueden obtener diferentes fórmulas en cada una de las cuales las variables pueden tener significados distintos.

H. De la discusión sobre las estrategias a la institucionalización de los conocimientos

En la última clase cada grupo propone un procedimiento para obtener soluciones, pero no se da, como en el caso de la Escuela Despertar, la consigna de elegir entre los que los niños ya habían hecho. Se ponen en común los procedimientos por grupo, se da un tiempo de trabajo individual y luego se desarrolla un debate colectivo. Esta actividad en la que los alumnos se ubican en una posición reflexiva sobre su propio trabajo, da lugar a la institucionalización de cuestiones de diversa naturaleza: algunas tienen que ver más claramente con conceptos, como el de "dominio de variación", otras tienen que ver con lo normativo -aquello que se puede o no se puede hacer-,como por ejemplo, el "tanteo". Mostraremos en primer lugar los procedimientos que se someten a debate y luego estableceremos qué cuestiones se institucionalizan a propósito de los mismos.

Procedimiento 1.

1. Separar 20 en dos valores, por ejemplo 5 y 15.
2. Dividir 5 dividido 0,10 = 50 monedas; 15: 0,50 = 30
3. 0,10 x 5 + 0,5 x 30 = 20

Procedimiento 2.

(20 - 0,10 x) : 0,5 = y

Procedimiento 3

(20 - 0,5 x). 10 = y

Procedimiento 4

(20 - 0,10) : 5 x → monedas de 50 centavos

Procedimiento 5

1. x-→ cantidad de monedas de 50 centavos
2. x . 0,5
3. 20 - x.0,5
4. (20 - x.0,5).10-→ monedas de 10 centavos.

En todos los casos se trata de procedimientos generales, aunque el primero "necesita" apoyarse en un ejemplo genérico y no "muestra" un criterio para agotar todas las soluciones posibles. No nos interesa analizar acá los procedimientos en sí, acerca de los cuales ya hemos hablado en los puntos anteriores. Sí queremos resaltar que, de manera similar a lo ocurrido en la Escuela Despertar, la actividad por un lado enriquece el espacio de cuestiones que los niños se plantean alrededor de estos problemas y lleva a la toma de conciencia acerca de relaciones que para muchos fueron implícitas, y, por otro, ofrece al docente la posibilidad de articular bien la producción de los niños con las institucionalizaciones que se proponen realizar. En otros términos queremos resaltar el valor ineludible que tiene, para la emergencia de cuestiones vinculadas a las prácticas algebraicas, la reflexión sobre los procedimientos. Veamos algunos ejemplos.

a. **Sobre el dominio de variación.** Un alumno objeta, a propósito del procedimiento 1, que el 20 no se puede "separar" de cualquier manera:

Esteban:	*(refiriéndose al procedimiento 1). Está bien, pero los valores tienen que ser divisores de 0,10 y de 0,50, porque con cualquier valor no te da.*
Profesora:	*¿Por qué?*
Esteban:	*Porque si no, no te da 20.*
Profesora:	*¿Qué piensan de lo que dijo Esteban?*
Nicolás:	*Es lo que tratamos de hacer ahí abajo.*

Observemos que Nicolás parece haber considerado que el 20 no se puede "separar" de cualquier manera, aunque no lo hizo explícito cuando "dictó" su procedimiento. La intervención de Esteban muestra que este alumno fue más allá del caso particular escrito en el pizarrón, a modo de ejemplo genérico. Él había puesto en juego para este problema la estrategia de covariación en los términos ya descriptos, de modo que, cualquiera sea la relación que haya establecido entre lo que él hizo y el procedimiento 1, - no sabemos si la consideró o no - es claro que tuvo que realizar un cierto análisis para llegar a su observación. El ejemplo nos muestra la actividad de producción que supone esta tarea, tanto para los autores del procedimiento como para sus críticos.

Definir cómo deben separarse los números lleva a que se realicen más precisiones acerca del dominio. Efectivamente, una alumna propone probar con 7 y 13, valores que "pasan la prueba", y Esteban dicta luego 5,3 y 14,7. Veamos como continúa la interacción:

1. *Al1:* ***Está mal porque tienen que ser 0,50. Esos no van.***
2. *Profesora:* *¿Funciona o no?*
3. *Al2:* *No, no funciona.*
4. *Al3* *Da 10,6.*
5. *Profesora:* ***¿Qué sería 10,6? La cantidad de monedas de 50, y no puedo tener 10,6 monedas de 50.***
6. *Al2:* ***Tiene que ser cualquier valor entero.***
7. *Al1:* ***No, no hace falta que sea entero, puede ser coma 5. Tiene que ser divisible en 0,10 y 0,50.***
8. *Profesora:* *¿Hace falta que sea entero?*
9. *Varios:* *No.*
10. *Profesora:* ***A ver denme un ejemplo donde no sea entero y funcione.***
11. *Esteban:* *5,5 y 14,5.*
12. *Profesora:* *5,5 y 14,5, dividido 0,5 ¿cuánto da?* (Se realizan los cálculos con esos valores y se comprueba que son posibles).
13. *Profesora:* *Acá funciona. ¿Cuándo no funciona?*
14. *Esteban:* ***Cuando no son divisibles x 50***
15. *Al:* ***Se separan dos valores siempre y cuando los números sean divisibles por 0,10 y 0,50.***
16. *Profesora:* *o sea que cuando se dividen por 0,5 y 0,10 den enteros.*
17. *Esteban:* ***Pero no es necesario por 0,10, sólo por 0,5.***
18. *Profesora:* *A ver, ¿por qué?*
19. *Ezequiel:* *Porque todos los divisibles por 0,10 no son divisibles por 0,5, si es divisible por 0,5 es divisible por 0,10.*
20. *Profesora:* *¿Están de acuerdo? O sea directamente que sea divisible por 0,5. Salvo eso, con esta corrección , ¿lo de ellos funciona?*
21. *Varios:* *Si.*

Todos los alumnos que participan de esta interacción parecen comprender bien el procedimiento del que se habla. Sobre esta base, la interacción anterior apunta entonces por un lado a "completar" su formulación, indicando el dominio más amplio posible (intervenciones 6 a 12) y, por otro lado, a comunicar una norma del trabajo en matemática: la formulación debe ser lo más económica posible en el sentido de no repetir condiciones (intervenciones 13 a 21).

b. **La legitimidad de "tantear".** A raíz de este mismo procedimiento 1, una alumna plantea que a ella no la convence, *"porque es al tanteo"*.

Dana:	*Este procedimiento es por tanteo.*
Profesora:	*Dana dice que es por tanteo y parece que a ella no le gustaba, ¿qué piensan de eso?*
Ezequiel:	*¿Cómo al tanteo?*
Profesora:	*Dana te pregunta Ezequiel qué quiere decir al tanteo.*
Dana:	*Que vos andás eligiendo 20 como a vos te parece, no con un razonamiento en particular.*
Gabriela:	*Entonces, ¿cuál de estos no es al tanteo?*
Profesora:	*Ahora vamos a analizar si alguno si es menos al tanteo. Dejamos pendiente el tema del tanteo para ver cómo es en los otros procedimientos, pero en principio, con esta restricción que pusimos acá esto funciona. ¿Todos de acuerdo?*
Varios:	*Sí*

Pareciera que lo que no le "gusta" a Dana, es no tener asegurada en este caso la sistematicidad y exhaustividad que sí ofrece el procedimiento de covariación que ella utilizó. Más allá de su cuestión particular, se discute sobre la legitimidad de una práctica que los alumnos ven como "tramposa" porque deja a cargo del usuario decisiones –por ejemplo cómo partir el número- que no forman parte de aquello que vienen haciendo. Nuevamente, como en el ejemplo anterior, hay un asunto del orden de las normas del trabajo matemático, que está en juego en esta discusión. La docente no se pronuncia porque –pensamos- espera avanzar en el debate sobre las otras estrategias y "autorizar" la práctica de asignar valores a las variables, dentro de un cierto dominio.

c. **Los coeficientes "que se pueden usar" en la fórmula.** Un alumno objeta el factor 10 en el procedimiento 3, *"porque no puede haber números fijos, porque si no, no se puede hacer con cualquier cuenta"*. La profesora le hace notar que 0,50 también es un número "fijo" y él responde que *"esos son los centavos"*. Este alumno no está dispuesto a aceptar en la fórmula el uso de coeficientes que no están en el enunciado. Más profundamente, está concibiendo una relación "uno a uno" entre el modelo y la situación real, que deberá revisar. A raíz de esta cuestión se discute sobre distintas maneras de escribir la fórmula.

d. **La suficiencia de una única fórmula.** Luego de mostrar cómo funciona el procedimiento 2 y aclarar el dominio de la variable, la profesora plantea la comparación entre los procedimientos 2 y 3. Algunos niños aceptan que es suficiente una de las dos fórmulas para obtener todos los pares, en tanto que otros dicen que uno "da las monedas de 10 y el otro las monedas de 50", sin que llegue a quedar claro si estos alumnos piensan que se necesitan las dos fórmulas. Queda claro que en tanto algoritmos de cálculo los procedimientos son diferentes, como lo son las correspondientes "funciones" que los mismos podrían representar. La equivalencia sólo será reconocida por los alumnos cuando ellos sean capaces de concebir la fórmula como "soporte" de los pares solución.

Para avanzar, la docente obtiene un cierto par a través de una de las fórmulas y el mismo, a través de la otra. Para "cerrar" la cuestión Micaela dice: *"estás buscando un resultado, pero con un resultado, ya estás sacando el otro"*. La docente insiste sobre la legitimidad de atribuir valores y sobre la necesidad de establecer claramente cuál es el dominio de la variable. El episodio nos permite "ver" la distancia - ya lo habíamos analizado a raíz de las producciones de la Escuela Despertar- que hay entre las dos concepciones en juego para la fórmula.

Breve resumen del desarrollo del problema de las monedas en el Instituto Martín Buber

La discusión sobre las escrituras se ha instalado con fuerza en esta clase. Probablemente por ello, ahora muchos alumnos están en condiciones de explicitar con claridad la función que para ellos tiene la fórmula y esto nos ha permitido inferir el estatuto que tienen las letras para estos niños. Un grupo de alumnas "muy presentes" plantea que ellas hacen una tabla para producir las soluciones (covariación) y las verifican con la fórmula. Claramente las letras representan datos (los valores de la tabla) y el uso que hacen de la fórmula es muy parecido al que hemos identificado como estrategia de verificación para el caso de la división entera. Notemos que ellas obtienen los valores usando una relación que las "lleva de un par a otro" a través de una idea de compensación que asegura que conservan el 20, y tal vez eso justifique la verificación a través de otra relación que les asegura que **cada par** representa una cantidad de monedas de cada clase que totalizan 20 pesos. Otros alumnos usan la fórmula para producir soluciones y las letras representan para ellos variables. El hecho de que se puedan discutir estos diferentes usos abre un espacio para comenzar a hablar de la fórmula en términos de "lo que se puede hacer con ella" y para que circule la idea de que una escritura tiene una cierta función.

Algunas producciones nos mostraron que la familiaridad de este contexto particular (el de las monedas) aporta información que se filtra en las escrituras de los alumnos. Esto atentaría contra una descontextualización necesaria para dotar de instrumentalidad a las escrituras algebraicas. La cuestión introduce para nosotros la pregunta acerca de las ventajas y desventajas de presentar problemas referidos a contextos muy familiares para que los alumnos pongan en juego la actividad de modelizar usando como herramienta las escrituras algebraicas.

De la misma manera que en la Escuela Despertar, la actividad de poner a la consideración del conjunto de la clase, todos los procedimientos, abre preguntas que los alumnos difícilmente podrían concebir si su producción no entrara en contacto con otras.

Pensamos que la posición "meta" que supone para los alumnos esta actividad, es especialmente propicia para la introducción de normas, para discutir "qué se puede y qué no se puede en matemática". Efectivamente, cuando ellos resuelven, difícilmente pongan en juego algo que consideran que no se puede hacer pero, tienen la posibilidad de hacerse preguntas explícitas al respecto, a partir de encontrarlo en el procedimiento de otro que sí "se atrevió" a utilizar. El debate sobre los procedimientos facilita al docente una mejor articulación entre su discurso y la producción de los alumnos.

Conclusiones del análisis a posteriori. La comparación entre las dos escuelas: cercanías y distancias.

Algunos elementos en común, pero también muchas diferencias, pueden encontrarse en los desarrollos que hemos relatado. Las características de los grupos de niños –más "aritméticos" los de Despertar y ubicados en una perspectiva más general los de Martín Buber-, el espacio de decisión que conscientemente hemos dejado a las docentes a partir de un planteo inicial de los enunciados de los problemas y la falta de tradición escolar con respecto a los objetos matemáticos tratados en estas clases, son factores que confluyen para explicar las diferencias en las trayectorias recorridas. La comparación entre las dos experiencias nos permitirá conocer un poco más acerca del espacio de articulación aritmética–álgebra que estamos concibiendo. De eso nos ocuparemos ahora.

1. Acerca de la producción de soluciones

Producir soluciones en el **primer problema** fue trabajoso para muchos alumnos de la Escuela Despertar y bastante "fácil" para la mayoría de los niños del Instituto Martín Buber. Esto justificó en el primer caso, generar otras actividades y tiempo de reflexión alrededor de la tarea de encontrar soluciones mientras que en el segundo caso esta actividad fue un punto de partida para introducir las cuestiones relativas a cantidad de soluciones, dominio y fórmula, que ganaron terreno rápidamente. Sin embargo, el éxito de muchos de los alumnos de Buber para obtener pares de manera más o menos sistemática, por un lado "tapó" la posibilidad de profundizar sobre **la idea de dependencia entre las variables** que no es tan accesible desde los procedimientos de covariación que se utilizaron en la clase y, por otro, ocultó las dificultades de los niños más "aritméticos" para concebir esta noción y para elaborar procedimientos generales. Para los alumnos de la Escuela M. Buber, la noción de dependencia entre variables se jugó recién en el momento de producción de fórmulas.

Entre los niños que usaron procedimientos no sistemáticos, aquellos que hicieron ensayos tuvieron más posibilidades de sospechar que el problema tiene varias soluciones que quienes agregaron implícitamente una condición y fueron "directo" a "la" solución única. Unos y otros evidenciaron en su trabajo que no apelaban al hecho de que determinando uno de los valores, el otro queda determinado. La idea de **dependencia entre los elementos de una operación aritmética** en la que se "fija" el resultado, está oculta en los problemas aritméticos en los que los datos determinan un único resultado.

Frente a la no sistematicidad de muchos de los procedimientos de los niños de la Escuela Despertar, la profesora propone dos tareas: **la verificación de pares solución** y **la búsqueda de uno de los valores dado el otro.**

La verificación permite: 1) entrar en el problema a los alumnos que no habían podido producir soluciones "sueltas", 2) informar que hay varias soluciones a los que sostuvieron la unicidad, 3) mover reiteradamente una única relación (la que liga las variables del problema), a propósito de varios pares. Tanto esto último como la institucionalización de la tarea de verificación, hacen posible que algunos de los alumnos que propusieron pares de manera "artesanal" sin poder reproducir el procedimiento que usaron, comiencen a tener una visión más general el problema.

La tarea de buscar un valor a partir de otro dado: 1) pone de relieve la dependencia entre las variables, 2) favorece la inversión de las operaciones para "despejar", 3) permite visualizar la simetría entre atribuir valores a una u otra variable y 4) da acceso a la noción de dominio de variación.

Las dos tareas de las que acabamos de hablar pueden realizarse, -o por lo menos pueden intentarse- moviendo los significados de las operaciones aritméticas que los niños conocen. Esto da lugar a un trabajo autónomo de los alumnos - solos o en pequeños grupos-, previo a la fase colectiva, que ofrece la posibilidad de una interacción más sostenida con el problema, en forma "privada". **Lograr que el problema "viva" más tiempo en el espacio privado del alumno que la clase puede albergar, ofrece mayores posibilidades para que los niños más flojos asuman las nuevas cuestiones.**

Los momentos colectivos a propósito de las actividades de verificación y búsqueda de valores, tienen, además de los aspectos señalados, **el efecto de hacer circular un "discurso" nuevo sobre la dependencia, los pares solución, la verificación**, que se pierde en el caso en que actividades de este tipo se omitan.

Solicitar a los alumnos que **expliquen cómo se obtienen las soluciones**, ubica el tratamiento del problema en una perspectiva general.

2. Acerca de la noción de dominio de variación

La idea de anticipar los valores que puede tomar una variable, es nueva para muchos alumnos; en las dos escuelas los niños proponen argumentos deductivos para explicar por qué "la cantidad de triciclos" debe ser par.

En la Escuela Despertar, luego de haber constatado que "no se puede poner cualquier cantidad de triciclos" se da la consigna de buscar el dominio de variación, en tanto en el Instituto Martín Buber, esta cuestión surge casi espontáneamente a raíz de la actividad de producción de soluciones. El hecho de haber creado un espacio específico para esta actividad en la Escuela Despertar, ofrece mayores posibilidades de reflexión en torno a la misma.

Efectivamente, si bien en la Escuela Despertar entrar en la tarea ofrece alguna resistencia, el trabajo en pequeños grupos y en interacción con la docente hace posible que la mayoría de los niños pueda comprender que la constatación empírica (*lo veo en la tabla*) no aporta una explicación (*no sé por qué*), distinción que genera buenas condiciones para moverse hacia una explicación basada en la deducción.

En todos los grupos de la Escuela Despertar se invita a los alumnos, antes de la puesta en común, a escribir sus explicaciones. Hemos registrado distancias entre las explicaciones orales y las escritas: en algunos casos éstas últimas ganan en precisión pero en otros están tan contextualizadas en la interacción oral que "pierden" una parte de los argumentos. Este hecho nos lleva a formular la siguiente hipótesis: pasar de la formulación oral de un argumento a su producción escrita por un lado y, someter a la consideración del conjunto la capacidad explicativa de un argumento por el otro, suponen ambas, actividades de producción de conocimiento con relación a la elaboración de argumentos deductivos.

Aunque **la distinción mencionada entre "verdad" y "razones de la verdad" ha sido verdaderamente la "palanca" usada por la docente en el momento en que los niños produjeron argumentos**, ella institucionaliza el valor anticipatorio que tiene conocer el dominio de la variable y no recupera el aspecto explicativo de los argumentos elaborados.

En el Instituto Martín Buber, como decíamos, el tema del dominio de la variable "cantidad de triciclos" surge espontáneamente en la primera puesta en común sobre el problema, a partir de las intervenciones de algunos alumnos, sin que se pueda saber qué elaboraciones hacen al respecto los niños que no habían pasado por esa reflexión. La **distinción entre constatación y explicación no tiene lugar en la medida en que no se crea en la clase un espacio específico para la elaboración de argumentos.**

3.Acerca de los modos de pronunciarse sobre la cantidad de soluciones

Obtener soluciones es para los alumnos un asunto muy diferente de obtener **todas** las soluciones. Hemos accedido a esto al observar en las clases que los estudiantes pueden pensar que dos procedimientos son ambos correctos pero que no conducen necesariamente a las mismas soluciones. La discusión sobre esta cuestión cuya emergencia sólo es posible si esos procedimientos interactúan entre sí, **da lugar a la producción de una nueva norma: resolver un problema es ahora encontrar todas las soluciones posibles y en consecuencia, si dos procedimientos son ambos correctos deben permitir encontrar el mismo conjunto solución.**

Por otro lado, dado que la producción de criterios que aseguren haber encontrado todas las soluciones es también un aspecto nuevo que está en elaboración y para el cual los alumnos no han construido todavía un sistema que actúe como garantía de validez, resulta también en este caso ineludible la interacción con los procedimientos de los otros. Efectivamente, cada alumno puede elaborar de manera autónoma argumentos que le permitan convencerse a sí mismo que ha encontrado todas las soluciones, pero recién los validará cuando los confronte con otros, que le confirmarán, o le refutarán sus propias elaboraciones.

Concluimos entonces que **toda la problemática vinculada a la cantidad de soluciones de un problema "necesita" del espacio colectivo tanto para su emergencia como para la construcción de criterios que permitan validarla.**

4. Acerca de la producción de fórmulas, las escrituras personales y las convenciones

Con relación a esta problemática hubo grandes diferencias entre las dos escuelas: en tanto en Despertar la profesora introduce la fórmula para el primer problema con la función de "producir soluciones", en Martín Buber hay un espacio para que los alumnos propongan fórmulas y el momento colectivo de discusión sobre esas propuestas ocupa gran parte del tiempo en estas clases. Estas distancias nos permiten profundizar nuestra reflexión acerca de la potencia y de los límites de un trabajo sobre las escrituras propuestas por los alumnos.

En la Escuela Despertar - acabamos de decirlo- es la profesora quien introduce la fórmula, en la última etapa del problema de los triciclos, como un "método general para obtener soluciones". Dado que por un lado los alumnos ya habían producido soluciones y por otro lado no invierten un cierto tiempo en hacer funcionar la fórmula que la profesora plantea, esta manera de introducir la escritura algebraica no parece atravesar, en general, la producción de los niños en los problemas siguientes. Sólo dos alumnas, a propósito del problema con infinitas soluciones usan la fórmula en reemplazo de la lista de soluciones (una tercera alumna había propuesto de manera espontánea una fórmula para el primer problema, antes de la presentación de la profesora, y continúa planteándola en los problemas siguientes).

En este grupo de alumnos, la fórmula es objeto de discusión colectiva cuando se organiza el debate sobre los procedimientos en el problema de las monedas, y aparece propuesta por uno de los grupos. Recién en ese momento, se habla de su utilización, se realizan correcciones en su escritura - la misma tiene algunos elementos no convencionales- y se considera la suficiencia de una única fórmula para caracterizar pares de números. O sea que, **para que los alumnos asumieran una discusión sobre la fórmula, y se plantearan preguntas al respecto** - incluyendo la manera de hacerla funcionar- **ha sido necesario que la misma se ofrezca como producción de un grupo y entre un conjunto de propuestas todas las cuales estaban siendo objeto de análisis colectivo.**

En el Instituto Martín Buber se ha previsto un espacio para las propuestas de los alumnos. Esto ofreció la posibilidad de que los niños explicitaran usos personales -algunos bastante alejados de las convenciones como por ejemplo usar la misma letra para dos variables distintas, pero sin operar con las mismas- y se desencadenara a partir de estas intervenciones un proceso de negociación colectiva sobre el significado y las funciones de una fórmula. Las propuestas de algunos, se iban modificando a medida que "los otros" actuaban como interlocutores de esas fórmulas, ofreciendo a través de las interpretaciones que hacían y de sus propios conocimientos, retroacciones que operaban sobre los productores de las escrituras. En este proceso, se ha establecido que:

- hay diferentes funciones posibles (la fórmula para verificar, la fórmula para resolver)
- las letras pueden tener diferentes estatutos (variables, datos)
- puede haber distintas fórmulas para un mismo problema
- pueden seleccionarse diferentes variables
- una fórmula de dos variables caracteriza un conjunto de pares de números

Recordemos que a propósito de la secuencia de división entera, habíamos señalado las dificultades de pasar a usar una relación para "producir" soluciones cuando fue originalmente concebida "para verificar". La diferenciación que hacen ahora los alumnos entre "fórmula para resolver" y "para verificar", pareciera de la misma índole. Entre estos dos modos de ver la fórmula pensamos que se juega también la diferencia entre la letra como "dato" y la letra como variable.

El hecho de que, gracias a la confrontación, los alumnos puedan distinguir diferentes funciones para una fórmula permite que comience a circular en la clase, que la producción de escrituras está en función de lo que se quiera hacer con esa escritura. Subyace sin embargo la idea de que habría una fórmula distinta para cada finalidad, idea que deberá necesariamente evolucionar.

Toda la discusión hizo posible además, que los alumnos encontraran los límites de las ecuaciones con una variable, que muchos se esforzaban en utilizar, frente al desconocimiento de cómo "maniobrar" con una ecuación con dos variables. Esto dio la oportunidad de analizar que agregando alguna condición sobre las variables el problema podría "llevarse" a una ecuación de una variable para obtener "un resultado".

La **producción de escrituras en el contexto didáctico que hemos pensado, cumple** desde nuestro punto de vista fundamentalmente **una función intelectual**: por un lado lleva a los alumnos a pensar el problema en términos de una relación y, por otro a contrastar los usos personales con otros usos posibles, "obligándolos" a realizar sucesivas adaptaciones. Pensamos en cambio que **el valor instrumental de las escrituras algebraicas no es tan accesible a partir de todo este trabajo** dado que los alumnos ya han obtenido las soluciones cuando se realiza el debate. De hecho, después de haber sostenido una gran discusión en el problema de los triciclos, casi ningún alumno usa de entrada la fórmula para el problema de las monedas, recurriendo nuevamente a una representación que probablemente para ellos "muestre" más, como lo es la tabla con todas las soluciones a través de un procedimiento de covariación.

Hemos señalado al presentar nuestras hipótesis de trabajo que la opción realizada sobre este tema de las escrituras algebraicas se aparta de la idea de aprendizaje por adaptación a un medio resistente. Para justificarla nos hemos apoyado, en que: 1) hay una distancia muy grande entre lo viejo (los problemas aritméticos) y lo nuevo (la fórmula que los modelice)[38] y 2) la naturaleza convencional del conocimiento en cuestión hace que no haya un sistema de propiedades que los alumnos puedan utilizar para validar su trabajo. Nuestra apuesta ha sido – recordemos- generar condiciones que para que emerjan problemas referidos a la producción y a la interpretación de escrituras, para que circule un discurso alrededor de lo escrito, de manera tal que la introducción que necesariamente debe hacer el docente pueda insertarse en un ámbito social en el que se han provocado interrogantes que den sentido a dicha introducción. El análisis realizado muestra la fertilidad de este trabajo, aún con **las dificultades que plantea para el docente su gestión**. Señalémoslas.

En primer lugar, la discusión no puede avanzar mucho sin una intervención clara del docente. Efectivamente, como cada escritura personal se completa con el pensamiento de quien

[38] Robert, A. (1998)

la produjo, cada alumno podría validarse a sí mismo –de hecho esto ocurrió en el caso de un alumno- sin aceptar las retroacciones que obtiene del medio. La discusión tiene el objetivo de "sembrar" preguntas, cuyas respuestas debe aportar el docente en tanto representante de la cultura "exterior" a la clase, sin descalificar los usos personales de los alumnos, pero sin arriesgar estancar la clase en una discusión que no puede avanzar. El margen de maniobra es –evidentemente- estrecho.

En segundo lugar, el docente debe tener un tiempo para interpretar las producciones personales de los alumnos, de manera de pensar cómo aportar elementos que entren en diálogo con cada producción y cómo gestionar una buena interacción entre los diferentes alumnos. De lo contrario corre el riesgo de intentar "tapar" las elaboraciones de los alumnos con los usos convencionales, volviendo inútil todo el enfoque propuesto.

Señalemos finalmente que el docente debe discriminar y decidir cuáles son las escrituras que pueden tener interés para el conjunto de los alumnos y cuáles sólo son fértiles si quedan en el ámbito privado de quien las produjo.

5. Acerca de la discusión sobre los procedimientos del conjunto

Como venimos señalando, la interacción con los procedimientos de los otros se hace ineludible para muchas de las cuestiones trabajadas. Además de los aspectos ya señalados, el trabajo de discusión colectiva sobre los procedimientos de cada grupo, ha cumplido diferentes funciones que queremos identificar:

- abre nuevos problemas que difícilmente surgirían si las distintas producciones no entraran en contacto entre sí
- facilita la discusión acerca de "lo que se puede" y " lo que no se puede en matemática, en la media en que les permite a los alumnos encontrarse con procedimientos que ellos no se atrevieron a usar, pensando que no eran lícitos
- permite que los alumnos usen la propia producción como marco de control y análisis del trabajo de los otros
- ofrece retroacciones al trabajo de cada alumno o grupo de alumnos
- exige, para responder las críticas de los otros, hacer explícitas relaciones que se mantuvieron implícitas en el momento de la producción
- hace posible que los alumnos encuentren estrategias más claras, o más económicas, o más fáciles que las propias
- favorece la elaboración de criterios sobre los procedimientos (economía, claridad explicativa, corrección, etc.), sobre todo si los alumnos han pasado por la instancia de tener que elegir un procedimiento entre varios.

6. Reflexiones finales

Muchos de las nuevas cuestiones que los alumnos han encontrado a propósito de la secuencia de división entera, vuelven a aparecer en este contexto: atribuir valores a una de las variables para obtener el correspondiente valor de la otra, concebir que si dos procedimientos son correctos deben arrojar las mismas soluciones, comprender que una relación con dos variables caracteriza un conjunto de pares de números, aceptar que las variables del problema dependen una de la otra, entender que una fórmula es suficiente para obtener todas las soluciones, comprender que un único procedimiento puede generar todas las soluciones de un problema. Parecen ser estos, los conocimientos que se elaboran cuando los alumnos se ubican en una posición reflexiva respecto del largo tramo que constituyó para ellos la práctica aritmética.

Conclusiones

Decíamos en la introducción de este estudio que concebimos un espacio de articulación entre prácticas aritméticas y prácticas algebraicas organizado alrededor de problemas a partir de los cuales los alumnos podrían ubicarse en una posición reflexiva respecto de los *viejos* objetos de la aritmética escolar. Es el momento de pasar en limpio qué nuevos conocimientos han sido posibles en los recorridos que hemos estudiado. Es decir, qué relaciones, qué transformaciones en el modo de abordar los problemas, qué consideraciones para dar por válido tanto un procedimiento como una propiedad, qué herramientas semióticas para representar procesos y soluciones, qué nuevas preguntas se han formulado los alumnos.

Hemos trabajado bajo el supuesto de que el espacio social de la clase constituía una condición de posibilidad para la elaboración de muchos de los conocimientos que estaban en juego en nuestras secuencias. A medida que fuimos desarrollando nuestro estudio fuimos tomando conciencia del papel preponderante que este aspecto jugaba en la emergencia de muchos de los conocimientos producidos.

Un primer punto de nuestras conclusiones estarán dedicadas a sintetizar las dos cuestiones anteriores.

Definidos los elementos más globales que abarcan las dos secuencias, sintetizaremos la especificidad de cada una en este proyecto. Recordemos además que hemos hecho opciones diferentes para comunicar el análisis a posteriori en cada una de las secuencias: la estabilidad en cuanto a las producciones de los alumnos que hemos encontrado en las diferentes escuelas para la secuencia de división entera nos "llevó" a organizar el análisis problema por problema en tanto que los recorridos esencialmente distintos que se desarrollaron a propósito de los problemas aritméticos en los dos casos analizados, nos "obligaron" a un análisis escuela por escuela. Retomaremos ahora estas diferencias para aproximar posibles explicaciones. Estas cuestiones serán el asunto de nuestro segundo punto.

La pregunta por la viabilidad en un sistema "común" – es decir sin la "cercanía" del investigador- de los objetos en juego en nuestro trabajo, por su legitimidad cultural, permite vislumbrar la necesidad de nuevas indagaciones. Abriendo nuevas preguntas, en el punto 3, cerramos entonces nuestras conclusiones.

1. La producción de conocimientos en la articulación aritmética-álgebra: una compleja trama atravesada por las dimensiones público-privado y personal-colectivo

Los problemas sobre los que estructuramos las dos secuencias de nuestro trabajo experimental tienen en común una idea simple y nueva para los alumnos: las varias o infinitas soluciones se obtienen, en cada caso, a través de la(s) misma(s) relacione(s), que hay que manipular teniendo en cuenta que hay un grado de libertad entre las variables. Reconocer esa estructura común que genera las diferentes soluciones de un problema allí donde antes se "veían" problemas "sueltos" es una de las elaboraciones que están en juego en las dos secuencias y es el producto de una trama compleja de interacciones con los problemas – de manera personal o en pequeños grupos-, discusiones colectivas e intervenciones docentes.

Hacer entrar en la escena del aula "varias" soluciones supone rupturas a partir de las cuales surgen para los alumnos nuevas cuestiones que antes no estaban en el panorama de sus posibles preguntas: ¿cómo se sabe que se han agotado *todas* las soluciones?, una vez que se acepta que hay que atribuir valores ¿cómo se eligen los mismos? ¿cómo se expresan las soluciones?

1.1 La noción de procedimiento exhaustivo

El análisis de las clases correspondientes a las dos secuencias nos permitió comprender que los alumnos no tienen de entrada criterios para validar la cuestión de la cantidad de soluciones: frente a intervenciones específicas en las que las docentes preguntaban si habría más soluciones los alumnos solían responder que no sabían. Ellos estaban en condiciones de establecer si las soluciones que habían encontrado eran o no correctas pero no podían asegurar que no hubiera otras. La confrontación entre las diferentes producciones de la clase funcionó acá como una primera retroacción al punto de vista de cada alumno y, a la vez, dio sentido a la búsqueda de criterios para establecer cómo se sabe cuántas soluciones hay. En las discusiones colectivas que se dieron sobre este asunto pudimos saber que muchos alumnos ligan la cantidad de soluciones a cada procedimiento particular y no al problema. Desde esa perspectiva les resulta "natural" que dos procedimientos relativos a un mismo problema sean ambos correctos pero arrojen, cada uno, diferente cantidad de soluciones.

Ahora bien, el rechazo de esta última idea es un *conocimiento constitutivo* de la norma según la cual un procedimiento debe ser exhaustivo y dicho rechazo sólo puede elaborarse a partir del momento en que se ponen en interacción diferentes procedimientos. Buscar soluciones que se produzcan a través de uno de los procedimientos en juego y que no puedan producirse a través del otro, tomar una solución obtenida a través de uno de los procedimientos y analizar si esa misma solución se podría obtener por otro de los procedimientos en discusión, fueron problemas intermediarios, que funcionaron como "palancas" a partir de las cuales se pudo *instituir* que un procedimiento es correcto si permite obtener todas las soluciones posibles y que, por lo tanto, si dos procedimientos son correctos, ambos conducen al mismo conjunto solución.

En el marco de estas discusiones, se va estableciendo en la clase – esto quiere decir que el docente va comunicando y los alumnos van comprendiendo- que recorrer los posibles valores que puede tomar una de las variables del problema es un modo de contar las soluciones. La idea de que las mismas relaciones que permiten obtener soluciones "contienen" información respecto de la cantidad de soluciones empieza a circular.

La síntesis que acabamos de hacer muestra que el proceso a través del cual se llega a elaborar que resolver un problema ya no es encontrar soluciones sino encontrar *todas* las soluciones y se establecen criterios para hacerlo, es una compleja combinación de interacciones: los alumnos producen soluciones (una o varias) y dicen cuántas hay en interacción autónoma con los problemas, de manera personal o entre varios alumnos; muchas de las cuestiones que se producen en los pequeños grupos y que son esenciales para arribar a conclusiones, quedarán en el ámbito privado sin que sean accesibles ni al docente ni a la clase en su conjunto; las producciones de los otros funcionan como retroacciones que confirman o ponen en cuestión las anticipaciones que se hayan hecho; es sólo a partir de esas interacciones que puede plantearse en la clase un nuevo problema, el de la exhaustividad de los procedimientos; formulada esta cuestión, los alumnos comienzan a tratarla a través de problemas intermediarios que propone el docente y que pueden abordar de manera personal; finalmente el docente comunica – eventualmente con el aporte de algunos alumnos- criterios para contar todas las soluciones del problema, basados en un análisis de los valores que puede tomar alguna de las variables que conforman la relación generadora de soluciones.

Producir en la clase la regla según la cual un procedimiento debe ser exhaustivo, requiere entonces de momentos de trabajo personal de los alumnos y de otros en los que el espacio colectivo actúa como marco para la emergencia de nuevas preguntas *que son constitutivas* de la noción a la que se apunta. Tomar conciencia de esto modificó un poco nuestra perspectiva inicial. Efectivamente, al concebir nuestra experimentación, el espacio de articulación era fundamentalmente un espacio de problemas que podían formularse a priori. Ahora sabemos que la resolución de dichos problemas por parte de los alumnos constituye una plataforma a partir de la cual cobran sentido *otros problemas,* esenciales también para las nociones a producir en la clase, problemas estos últimos que sólo puede plantear el docente en un segundo momento y sobre la base de aquello que se despliega efectivamente en el aula. Hay una parte del espacio de articulación aritmética-álgebra que se configura a partir de la producción efectiva de los alumnos y que debe gestionar el docente.

Las reflexiones anteriores nos ayudan a ver que, - por lo menos en el marco de nuestra experimentación- la elaboración acerca de qué es un procedimiento correcto está entramada con la toma de conciencia de que las variables del problema pertenecen a un dominio. Veremos a continuación nuestras conclusiones con respecto a la elaboración de esta noción..

1.2 La noción de dominio de variación

La noción de dominio de variación de las variables también resultó *esencialmente* nueva para los alumnos. ¿Qué quiere decir "esencialmente nueva"? Pasado un primer momento en que la dificultad fue para muchos estudiantes la de atribuir valores ellos mismos (*inventarlos, ponerlos al azar,* como decían unos y otros) y renunciar a obtenerlos a través de operaciones que usaran solamente los datos del enunciado, darse cuenta de que los números que atribuían estaban sometidos a ciertas restricciones, vinculadas al contexto en el que estaban trabajando, provocó en general desconcierto. Incluso en algunos casos, fue difícil para los alumnos – sobre todo en la secuencia de problemas aritméticos- comprender qué se les pedía cuando se les preguntaba qué valores se le podían asignar a alguna de las variables en juego. Esta consigna fue en una de las clases objeto de varias negociaciones.

En la secuencia de división entera, los alumnos encontraron que la misma fórmula a veces les permitía encontrar la cuenta que buscaban y a veces no. Frente a esto, no fue evidente en principio que el "asunto" estaba en los números que se elegían y hubo quienes rechazaron aplicar la fórmula como si pensaran que *"si no da siempre, no sirve"*. La posibilidad de entender que la fórmula *Divisor x cociente + resto = dividendo* funciona bajo la restricción $0 \leq resto < divisor$, estuvo ligada a que los alumnos comprendieran el valor anticipatorio que tiene respecto de "hacer la cuenta". La coordinación entre las dos condiciones – y no cada una por separado- estuvo en juego en estos problemas lo cual permitió avanzar en analizar las razones por la cual la definición de división entera incluye la restricción sobre el resto. De manera transversal la interacción con esta cuestión informa que una fórmula se aplica a un cierto dominio que no necesariamente está formado por *todos los números*, lo cual a su vez incorpora otro aspecto a la noción de procedimiento generador de soluciones.

La cuestión del dominio de variación de las variables aparece de manera un poco diferente en la secuencia de problemas aritméticos. Efectivamente, ahora es el contexto externo al que se refiere el problema – y no la definición de una operación - el que obliga a seleccionar ciertos números. En los dos problemas con variables enteras muchos alumnos hacían tablas y constataban los valores que podían tomar las variables; sin embargo, frente a preguntas específicas – sobre todo en una de las clases en la que la cuestión del dominio fue priorizado por la docente- declaraban que no podían explicar por qué. Reconocer que "constatar" no es lo mismo que "explicar" fue una condición fructífera para que algunos alumnos produjeran argumentos deductivos, basados en nociones de divisibilidad, para justificar el dominio considerado. Los argumentos orales que surgieron fueron en general muy contextualizados y se completaban con gestos de los alumnos que aludían a los elementos de la relación con palabras del tipo "*acá*", "*esto*", etc. Pedir a los alumnos que los escribieran fue un primer paso – de ningún modo suficiente- hacia una mayor precisión e independencia del contexto. Pensamos someter las producciones escritas a la discusión colectiva hubiera permitido una precisión aún mayor que debe ser indagada.

Notemos que a diferencia del conocimiento de que un procedimiento debe ser exhaustivo, que es una regla del funcionamiento matemático que de alguna manera debe ser introducida por el docente, los argumentos que los alumnos puedan proponer para justificar cuál es el dominio de variación de alguna de las variables de las relaciones usadas, se basan en definiciones y propiedades de las operaciones aritméticas. Es por esto que – más allá de lo que realmente pase en una clase en particular- es posible concebir que los alumnos produzcan dichos argumentos a partir de su interacción personal con el problema. Claro que esto no garantiza que los argumentos sean aceptables y se necesitará para ello de la intervención del docente o de las retroacciones de los pares, dado que la interacción con un problema no devuelve información respecto de la pertinencia de los encadenamientos deductivos utilizados ni necesariamente ofrece retroacciones para *todos* los conocimientos que intervienen en la validación.

1.3 Los instrumentos semióticos para tratar los problemas

Analizar de qué manera los alumnos representarían las varias o infinitas soluciones de los problemas que tratarían, fue un asunto planteado desde el inicio de nuestro trabajo. Nuestras conclusiones al respecto se referirán tanto al proceso de emergencia de las escrituras convencionales como a la producción de escrituras – muchas veces no convencionales- que los alumnos inventaron de manera espontánea en distintos momentos del proceso desarrollado.

a) La producción de escrituras convencionales

Recordemos el escenario que hemos concebido para la emergencia de escrituras convencionales: frente a la demanda del profesor de producir fórmulas para obtener soluciones, los alumnos producirían sus propias escrituras; la interacción entre las mismas en el espacio colectivo permitiría poner a prueba la función comunicativa de cada propuesta; este proceso daría sentido a la necesidad de establecer convenciones que todos puedan interpretar. El desarrollo nos muestra que

- los alumnos proponen usos personales que "completan" con su propio pensamiento (*"yo lo uso como expresión, no como ecuación"*; *"yo pongo la misma letra para cosas distintas pero después no las junto"*, etc.);
- la explicitación de estos usos se hace posible a partir de la confrontación entre las distintas producciones y permite que los "otros" (pares, docente) ofrezcan argumentaciones que pongan en cuestión el punto de vista de cada alumno;
- las distintas interpretaciones que los alumnos hacen de una misma escritura da sentido a la necesidad de establecer convenciones;
- la necesidad de escribir una relación a través de una fórmula da lugar a que los alumnos se planteen problemas específicos sobre los modos de anotar las relaciones involucradas en un procedimiento (*"¿cómo escribo todo en un solo renglón"?*)
- las dificultades que algunos estudiantes muestran para resumir todo el procedimiento en una única relación pueden interpretarse como la manifestación de que la escritura de la fórmula no es una mera traducción de lo ya pensado;
- los alumnos evitan la utilización de dos letras y sólo explicitan la variable que consideran independiente; esto parece ser la expresión de una concepción según la cual la fórmula es algoritmo de cálculo en el que la relación de igualdad está implícita;
- los alumnos atribuyen diferentes funciones a una fórmula (verificar, producir soluciones) y el estatuto que tienen las letras depende de dichas funciones: cuando la fórmula es un instrumento para verificar, las letras son "datos" que se obtuvieron por alguna otra vía (por ejemplo completando una tabla); cuando la función de la fórmula es la de producir soluciones, las letras son variables; estas diferencias se manifiestan en las discusiones colectivas y contribuyen a la problematización de la producción de escrituras tanto para los alumnos como para el docente;

- algunos alumnos suelen considerar la fórmula como una representación que se "agrega" a otras, por ejemplo la tabla de valores, y que en principio no resulta suficiente para representar las soluciones;
- desde la concepción de la fórmula como algoritmo de cálculo, es necesario proponer una fórmula para cada variable; la aceptación de que una única fórmula es suficiente supone una transformación que consiste en pasar de concebirla como la representación de un proceso a pensarla como una síntesis de las relaciones involucradas en el problema; esta transformación puede interpretarse como un avance en el nivel de generalización con el que los alumnos tratan el problema. En términos de A. Safard (1991) una transformación de proceso a objeto estaría acá en juego;
- la función de las discusiones es la de problematizar la producción de escrituras y la prolongación del debate en la clase más allá del cumplimiento de este objetivo, corre el riesgo de provocar un estancamiento dado que los alumnos no tienen por sí mismos elementos para concluir. En este sentido la gestión del debate por parte del docente es delicada.

b) Las herramientas semióticas que los alumnos inventan

En distintos momentos del desarrollo de la secuencia algunos alumnos produjeron representaciones que tuvieron *para ellos* el papel de "sostener" su interacción con el problema (tablas de valores en las que explicitaban variables auxiliares, escrituras para "materializar" los infinitos valores que podría tomar una variable, etc.). Nos interesa destacar que estas escrituras que cumplieron una función epistémica para quienes las pusieron en juego, no se hicieron, en general, públicas para el conjunto de la clase. Un trabajo como el que hemos desarrollado, en el que frente a las rupturas que los problemas plantean, los alumnos encuentran límites a las herramientas semióticas usadas hasta el momento y se ven entonces necesitados de producir otras nuevas, "requiere" de un espacio de producción privada en el momento de la clase. Forzar la circulación de estas producciones para todos los alumnos, supondría imponer a unos las estrategias de pensamiento de otros, sin que haya algún fundamento que permita establecer la fertilidad de este acto. En este punto el docente debe aceptar que una parte de la producción de la clase acerca de la cual hay un registro escrito, queda fuera de su control, porque no está sujeta a ningún tipo de validación (no es buena o mala, ni correcta o incorrecta, ni económica o engorrosa, ni pertinente o no pertinente, solamente es fértil o no para quien la produjo que es el único encargado de establecer esa fertilidad).

Estas herramientas que los alumnos ponen en juego, no se contraponen ni entran en contradicción con las escrituras convencionales, ya que cumplen una función diferente. Desde esta perspectiva, sería posible que los alumnos pudieran sostener estos sistemas de representación alternativos aún cuando las convenciones ya están instaladas. Sin embargo, la experiencia dice que estas representaciones no convencionales se abandonan cuando los alumnos adquieren familiaridad con las escrituras algebraicas. Pareciera que adaptarse a los usos sociales supone renunciar a la producción de ciertas herramientas de pensamiento en pro de poner en funcionamiento otras, que la cultura ha desarrollado.

1.4 Lo didáctico y lo adidáctico en la validación de las producciones de los alumnos concernientes al espacio de articulación aritmética-álgebra

Las condiciones de emergencia en la clase de las tres cuestiones que hemos considerado nos remiten a un punto que desde diversos "costados" han tratado muchos autores: precisar las relaciones entre las interacciones adidácticas con un problema, las intervenciones docentes sobre el conocimiento al que se apunta y las colaboraciones de los pares, para concluir respecto de la validez de alguna cuestión que se esté tratando. Al respecto C. Margolinas (1993), D. Fregona (1995), D. Grenier (citada por Margolinas, 1993), realizan un análisis según el cual la dimensión social que entrañan tanto las situaciones de formulación como las de validación en el marco de la Teoría de Situaciones, "requiere" de un docente que intervenga en caso de que los alumnos, por compartir entre sí algunos implícitos con respecto al conocimiento, cumplan con la finalidad del problema que abordan sin hacer intervenir de manera apropiada el conocimiento al que se está apuntando. Es decir, estas autoras señalan la necesidad de intervenciones didácticas en situaciones en las que la "adidacticidad" se apoya en el supuesto de que cumplir la finalidad del problema "asegura" movilizar ciertos conocimientos.

En el caso de nuestras dos secuencias, cumplir una primera finalidad (esto es producir cuentas de dividir o producir soluciones de los problemas aritméticos) no supone ni considerar si se han agotado todas las soluciones ni producir escrituras para representarlas, aunque sí permite un primer encuentro de los alumnos con el hecho de que las variables pueden tomar algunos valores y no otros. Aunque los tres aspectos toman como "objeto" la producción de soluciones, no surgen de manera espontánea a partir de dicha producción y deben ser planteados específicamente. El escenario que hemos concebido permite generar en los alumnos incertidumbres sobre estas cuestiones que las transforman en objeto de discusión en las clases. Se trata de una discusión que para concluir, *necesita* de aportes nuevos del docente (*"se pueden atribuir valores a la variable", "un procedimiento debe permitir contar todas las soluciones", "vamos a asignar una letra diferente para cada variable", etc.)*. Es debido a la naturaleza normativa y/o convencional del conocimiento – y no solamente a la organización social inherente a ciertos dispositivos didácticos- que las conclusiones no pueden provenir solamente de las lecturas que los alumnos puedan hacer de las retroacciones el "medio". Ahora bien, las normas que regulan el trabajo matemático (qué es lo que está o no permitido hacer en matemática, qué se considera suficiente para dar por válido un enunciado, un procedimiento o un modelo, cuáles son los criterios que permiten establecer que una estrategia es "*matemáticamente pertinente*", etc) – que no son absolutas si no relativas a una cierta institución-, son leyes que hablan sobre la matemática, pero no son ellas mismas enunciados matemáticos[1] que puedan validarse a través de algún sistema teórico de la disciplina. Es por eso que un modelo de acuerdo social, en parte implícito, elaborado como producto de prácticas de largo plazo-, sería adecuado para explicar el proceso de validación de normas matemáticas.

[1] No enuncian relaciones entre objetos matemáticos.

Las conclusiones desarrolladas en los puntos anteriores, intentan mostrar una trama compleja que no admite una fácil clasificación entre aquello que puede provenir de la lectura de las retroacciones del medio, aquello que "dice" el docente y lo que requiere de la colaboración entre los alumnos. Hemos visto por ejemplo, que en la noción de "procedimiento correcto" convergen la idea de exhaustividad que es de tipo normativo y debe ser introducida por el docente y la idea de dominio variación de las variables, que es un punto de apoyo para contar las soluciones y puede ser elaborada en interacción personal con el problema.

Las reflexiones anteriores nos llevan a concluir que, para muchos de los conocimientos de este espacio de articulación, una primera interacción con el "medio" tiene la función de abrir problemas nuevos que se dirimirán en el espacio colectivo en el que los aportes de información que realice el profesor resultan esenciales para la elaboración de los conocimientos en juego. Si el discurso del docente no se apoyara en esa problematización, cambiaría completamente de sentido para los alumnos ya que no estaría ni respondiendo a preguntas que han tenido la oportunidad de formularse ni se basaría en conocimientos que han tenido la posibilidad de elaborar.

Digamos finalmente que la introducción de cuestiones normativas ubica a los alumnos en un plano reflexivo respecto de los problemas que tratan. En la medida en que las normas son genéricas, al hablar de ellas a propósito de los problemas se instala un discurso que selecciona los rasgos más generales de los problemas que se resolvieron. En este sentido la reflexión sobre las normas contribuye al proceso de generalización

2. El aporte específico de cada secuencia a la caracterización de un espacio de articulación aritmética-álgebra

Además de las cuestiones señaladas en el punto anterior, puntualizaremos ahora algunos aspectos específicos de cada una de las secuencias desarrolladas.

2.1 La secuencia de división entera

La secuencia de división entera retoma de una manera esencialmente diferente un concepto con el que los alumnos vienen interactuado desde hace muchos años. Cuando ellos comienzan a trabajar con nuestros problemas "saben" que si, una vez realizada una cuenta, hacen el cálculo *divisor x cociente + resto* y obtienen el *dividendo* eso significa que "la cuenta está bien". No nos imaginábamos antes de realizar el desarrollo en las clases hasta qué punto es costoso para muchos alumnos transformar el significado de ese cálculo de manera de adaptarlo a los nuevos problemas. Efectivamente pasar de usar la fórmula para verificar una cuenta a concebirla como un medio para producir cuentas supone un cambio de significación que está dado por:

- la función que la fórmula cumple,
- el estatuto que tienen sus elementos que depende de la finalidad que le atribuyen (números conocidos, variables),

- el grado de confianza que tienen en la misma para anticipar relaciones vinculadas a la división entera (*"si sumo al dividendo el divisor el cociente aumenta 1 y el resto queda igual"* etc.),
- el poder anticipatorio respecto de la operación de "hacer la cuenta".

El análisis de algunas producciones nos hizo tomar conciencia de la estrecha relación que existe entre concebir que la fórmula puede ser usada para producir cuentas y concebir que sus elementos pueden ser variables: al no aceptar esta última cuestión se hace difícil comprender que la fórmula se puede aplicar una y otra vez para obtener diferentes cuentas y esto lleva a que no vean que todas las soluciones posibles se "resumen" en la misma relación; a la vez si se obtienen varias cuentas aplicando la fórmula comienza a reconocerse que sus elementos son variables.

De diversas maneras, la secuencia de división entera compromete la relación entre viejos y nuevos conocimientos:

1) Habíamos previsto que los clásicos problemas de reparto se transformarían - sobre todo para los alumnos más flojos- en una referencia que contribuiría con la resolución de las nuevas cuestiones. Sin embargo, esto no ocurrió de manera espontánea y fue necesario que los docentes gestionaran la utilización de esas referencias. Efectivamente, frente a los bloqueos de los alumnos en las primeras interacciones con los problemas de la secuencia, los niños quedaban desconcertados cuando las docentes sugerían pensar en las situaciones de reparto, y no sabían cómo hacerlo. Esto fue interpretado por nosotros de dos maneras: por un lado, pareciera que muchos alumnos no han establecido relaciones entre los problemas de reparto y la "cuenta" de dividir, objeto este último al que remiten los problemas de la secuencia; por otro lado, no está instalado el hecho de tomar como referencia prácticas vinculadas a un objeto, que se han desarrollado durante un tiempo largo, para pensar cuestiones que comprometen a ese mismo objeto pero de una manera nueva. Es interesante señalar, que las docentes insistieron ellas en evocar las situaciones de reparto y que, poco a poco los alumnos fueron asumiendo esas referencias, de forma fructífera en la mayoría de los casos. Evocar ciertas prácticas para pensar sobre problemas, tiene, a nuestro juicio, un cierto "parentesco" con el concepto de juego de marcos de R. Douady (1986): hay un cambio de contexto que informa sobre el problema en el que se está trabajando y ponerlo en juego es un aprendizaje del alumno que para comenzar a transitarse pareciera necesitar de la sugerencia del docente.

2) Muchos alumnos manifiestan al comenzar la secuencia bastante incomprensión respecto de las relaciones implicadas en el algoritmo de la división (por ejemplo porqué se multiplican los cocientes parciales por el divisor). Los problemas que enfrentan les plantean preguntas que les permiten comprender, recién ahora, los pasos de dicho algoritmo. Es en este caso la naturaleza de los problemas – y no la apelación que pudiera hacer el docente- la que transforma esta secuencia en una situación que podría considerarse "de evocación" (Perrin, M.J; 1993). Pensamos que esta condición de los problemas – la de evocar y comprender viejos algoritmos- es relevante de cara a la articulación aritmética – álgebra en la medida en que muestra que dichos algoritmos se fundamentan en las operaciones en tanto relaciones.

Digamos finalmente que las relaciones que caracterizan la división entera son el medio para abordar *todos* los problemas de la secuencia. Este hecho nos lleva a atribuirle dos condiciones.

Por un lado, permite sostener durante varias clases un tratamiento sobre el objeto "división entera" en términos de las relaciones entre sus elementos. Resulta entonces que los alumnos más flojos tienen más tiempo para comprender el problema y a su vez todos tienen la oportunidad de ir poniendo a prueba los conocimientos que van elaborando.

Por otro lado, al usar las mismas relaciones para todos los problemas, los alumnos van comprendiendo que están abordando un problema genérico. Además esto mismo ofrece la posibilidad de hacer con los alumnos, después de que hayan realizado cada uno de los problemas, un análisis que permita distinguir, en función de los casos que se generan al cambiar los datos, qué estrategia seguir, cuál es el dominio de las variables en juego, qué cantidad de soluciones hay. De esta manera los alumnos se acercan al estudio de un *tipo de problema* (dados dos elementos de la división hallar los otros dos) teniendo un experiencia temprana de interacción con un problema parametrizado.

2.2 La secuencia de problemas aritméticos a dos variables

El hecho de que frente a los problemas aritméticos muchos alumnos ensayaran valores para cada una de las variables sin ligarlos entre sí y luego probaran si funcionan o no, nos hizo "ver" que esta secuencia pone en evidencia algo presente, pero oculto, en los problemas usuales de las prácticas aritméticas y es la relación de dependencia entre las variables.

Dado que los enunciados de los problemas se traducen a través de expresiones del tipo $a\,x + b\,y = c$, los alumnos se vieron obligados a elegir qué valor atribuían ellos y cuál obtenían en consecuencia. Tal vez esto hubiera sido diferente si los enunciados hubieran "conducido" a expresiones del tipo $y = a\,x + b$, cuestión que no hemos abordado en nuestro trabajo. En el caso de la división entera la elección de la variable "independiente" estuvo mucho más monitoreada por la experiencia con la práctica de dividir (los alumnos centrados en la "cuenta" elegían, sobre todo al principio, valores para el dividendo). Al verse confrontados a esta exigencia de elegir valores para una de las variables en los problemas aritméticos, muchos alumnos optaron por plantear dos fórmulas, cada una de las cuales funcionaba como un algoritmo de cálculo para una de las variables. Esto posibilitó la discusión sobre la necesidad o no de los dos algoritmos y la identificación de que las soluciones son pares de números. Estas discusiones contribuyeron a que los alumnos comenzaran a conceptualizar la fórmula como ecuación de dos variables.

Digamos finalmente que frente al problema con infinitas soluciones, algunos alumnos propusieron por primera vez una fórmula para representarlas. Si bien no estamos intentando establecer un "causa" para la producción de la fórmula, pensamos que es necesario explorar más si el sentido de la misma cambia para los alumnos al enfrentar problemas con infinitas soluciones.

2.3 Los recortes para el análisis posteriori en las dos secuencias

Recordemos – lo hemos ido señalando a lo largo de todo el trabajo- que hemos encontrado bastante estabilidad en las diferentes clases a propósito de la secuencia de división entera y que, en cambio, la secuencia de problemas aritméticos ha dado lugar a desarrollos bastante diferentes. Pensamos que en el análisis sobre la naturaleza de los objetos en cuestión podemos encontrar explicaciones para estas diferencias.

Aunque de cara a nuestra problemática hay elementos comunes a las dos secuencias, destacamos dos aspectos en el caso de la división entera que marcan distancias con el trabajo sobre problemas aritméticos: por un lado, el "objeto" al que se refieren los problemas se identifica de entrada más claramente y por otro lado, el nivel de la acción – es decir el momento de las primeras interacciones con los problemas- ya supone transformaciones esenciales respecto de las conceptualizaciones que los alumnos tienen hasta el momento sobre la división. Efectivamente, como hemos analizado, la transformación de la "sentencia" *divisor x cociente + resto tiene que dar el dividendo,* aplicada a números "fijos", a la fórmula *divisor x cociente + resto = dividendo* en la que intervienen variables, es necesaria para resolver los problemas y es costosa para los alumnos. En el caso de los problemas aritméticos, si bien el nivel de la acción produce algunas rupturas, es el momento de la reflexión sobre la acción en el que los alumnos pueden tomar conciencia de las nuevas cuestiones. Sucede además, que estos nuevos asuntos que se identifican en la clase a partir de esa reflexión, tienen que ver con nuevos modos de abordar (qué aspectos involucra considerar que un procedimiento es correcto, cómo se representan las soluciones, cuál es la forma de las mismas, etc.) y por eso son mucho más dependientes de la gestión del docente. Decíamos al introducir el análisis a priori de la secuencia de problemas aritméticos, que los conocimientos involucrados en la misma se ubican mucho más a nivel de las prácticas que de los conceptos. El trabajo realizado reafirma esta mirada y a la vez nos hace tomar conciencia de la necesidad de indagar acerca de la legitimidad de los mismos en un sistema "común".

3. Perspectivas

Nuestro trabajo ha tratado de atrapar la complejidad de la clase, pero nuestro foco ha estado centrado en las producciones de los alumnos. Muchos de los conocimientos que los niños han producido a lo largo del nuestro estudio, no existen como tales en la cultura escolar. Sin embargo el trabajo realizado reafirma nuestra hipótesis inicial acerca de la posibilidad de un espacio de articulación entre prácticas aritméticas y prácticas algebraicas.

Hemos realizado apenas una exploración y queda todavía mucho por conocer. El espacio de articulación no puede reducirse a un conjunto de secuencias didácticas: ¿qué otras cuestiones, además de las que hemos indagado conformarían este espacio?, ¿sobre cuáles de los viejos contenidos aritméticos podrían desarrollarse tales cuestiones? ¿en qué sentido el trabajo de los alumnos sobre aspectos como los estudiados modifica su práctica algebraica? ¿cuál sería un trabajo algebraico que estuviera en continuidad con alguna de las ideas desarrolladas? ¿cómo sería la construcción de los aspectos normativos del trabajo matemático? ¿qué modelos describen mejor su adquisición? ¿cómo precisar la relación entre construcción de normas y construcción de conceptos? ¿qué herramientas teóricas, qué trabajo experimental?

Cuando nos preguntamos por la viabilidad de todo esto en un sistema "común" aparecen también numerosos interrogantes: ¿cómo se transforman los conocimientos que hemos ido identificando en contenidos escolares? ¿a qué eje o unidad de un programa escolar pertenecen? ¿es esto posible cuando sabemos que muchos de los conocimientos que los alumnos deben producir se refieren a prácticas más que a conceptos? ¿al intentar enunciarlos, no se corre el riesgo de aplastarlos en una formulación que los desnaturalice completamente? ¿qué necesita saber un docente para enseñar estos asuntos?

Comenzar a contestar estas preguntas vuelve nuestra mirada hacia la necesidad de un estudio en el que el foco esté puesto en las interpretaciones que hace el docente de estos contenidos, en su manera de gestionarlos en la clase, en la forma en que los articula con los contenidos aritméticos. Eso a su vez, renueva una pregunta que venimos haciéndonos hace tiempo: ¿qué relación es viable, es pertinente, entre el docente que implementa un trabajo propuesto con fines de investigación y el equipo que desarrolla el estudio?

Es difícil establecer que nuestro trabajo ha concluido. Nos resulta más tolerable pensar que hemos producido conocimientos que nos permiten concebir una cierta "parada", finalización de un primer tramo que permitió formular preguntas que alimenten un trayecto a seguir.. Sabiendo entonces que la necesidad de poner un punto obedece más a razones externas que internas al conocimiento producido, esta tesis encuentra a su fin.

Bibliografía

Arcavi, A. et al (1989) L'algèbre avant la lettre, Petit X 24, pp 61.71. Irem de Grenoble.

Arcavi, A. (1994) Symbol Sense: Informal Sense-Making in Formal Mathematics. For the Learning of Mathematics. Vol. 14. FLM Publishing Association, Montreal, Canadá.

Artigue, M.; (1989) Ingenierie didactique. *Recherches en Didactique des mathématiques*, vol 9/3, 281-308. La Pensée Sauvage, Grenoble.

Artigue, M; (1990) Epistémologie et Didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol 10.2,3. pp. 241-286. La Pensée Sauvage, Grenoble

Artigue, M.; Perrin Glorian, M.J.; (1991) Didactic Engineering, Research and Development Tool: some Theoretical Problems linked to this Duality. *For the Learning of Mathematcs*, 11.1, 13-18. FLM Publishing Association.

Arsac, G. et al ; (1992) Initiation au Raisonnement Déductif au collège, Presses Universitaires de Lyon.

Arsac, G; (1992) L' évolution d'une théorie en Didactique: l'exemple de la transposition didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*. Vol. 12.1., pp 7-32.. La Pensée Sauvage, Grenoble.

Arzarello, F ; (1993) : Analysing algebraic thinking. ESRC Seminar Group Working Conference in Algebraic processes and the role of symbolism. Institute of Education. University of London, September 1993.

Balacheff, N.; (1987) Processus de preuve et situations de validation, Educational Studies in Mathematics 18 (1987) 147-176, Reidel Publishing Company.

Balacheff, N.; (2000) Symbolic Arithmetic vs Algebra, en Sutherland, R.; Rojano, T.; Bell, A.; Lins, R.; (Eds) Perspectives on School Algebra. Kluwer Academic Publishers.

Bednarz, N., Janvier, B.; (1996) Emergence and development of algebra as a problem-solving tool: continuities and discontinuities with arithmetic, Bednarz, N. et al (eds.), Approaches to Algebra, 115-136. Kluwer Academic Publishers. Netherlands.

Bednarz, N. ; Kieran, C.; Lee, L. (1996) Approaches To Álgebra: Perspectives FOR Research an Teaching. Approaches to Algebra, Bednarz et al (eds), 3-12, Kluwer Publischers, Netherlands.

Blanchard-Laville C (1991) De quelques considérations épistemologiques à propos des méthodes de recherdhe en didactique des matheématiques. Journée d'étude du C.O.E.D. du 27 Avril 1989 à Marseille. *Interactions didactiques 11*. Publication de l'Université de Genève.

Bloch, I;(1999); L'articulation du travail mathématique du professeur et de l'élève dans l'enseignement de l'analyse en première scientifique. *Recherches en Didactique des mathématiques*, vol 19/2, 135-194. La Pensée Sauvage, Grenoble.

Bolea, P.; Bosch, M.; Gascón, J.; (2001) La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en proceso de algebrización: el caso de la proporcionalidad. *Recherches en Didactique des mathématiques*, vol 21/3, 247-304. La Pensée Sauvage, Grenoble

Bosch, M.; Chevallard, Y.; (1999) La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. *Recherches en Didactique des mathématiques*, vol 19/1, 77-124. La Pensée Sauvage, Grenoble.

Bosch, M.; (1994), La dimensión ostensiva en la actividad matemática. Memoria presentada para optar al grado de Doctor en Ciencias (Matemáticas), Département de Mathématiques, Facultat de Ciències, Universitat Autónoma de Barcelona.

Brousseau, G; (1983) Les obstacles epistemologiques et les problemes en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*. 4.2 164-198. La Pensée Sauvage, Grenoble.

Brousseau, G.; (1986) Fundamentos y Métodos de la Didáctica de la Matemática. Facultad de Matemática, Astronomía y Física. Universidad Nacional de Córdoba.

Brousseau, G.; (1988 a) Le contrat didactique: le milieu. *Recherches en Didactique des mathématiques*, vol 9/3, 309-336. La Pensée Sauvage, Grenoble.

Brousseau, G; (1988 b) Los diferentes roles del maestro. Publicado en Parra,C y Saiz,I (comps) Didáctica de la Matemática. Aportes y Reflexiones. Buenos Aires, Paidós Educador, 1994.

Brousseau,G; (1989) Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques. Construction des savoirs. Obstacles et Conflits. Colloque international Centre Interdisciplinaire de Recherche sur l'Apprentissage et le Développement en Education.

Brousseau,G; (1989) Obstacles épistémologiques, conflits socio-cognitifs et ingénierie didactique. Construction des savoirs. Obstacles et Conflits. Colloque international Centre Interdisciplinaire de Recherche sur l'Apprentissage et le Développement en Education.

Brousseau, G; (1994) La Memoria del Sistema Educativo y la Memoria del docente. Publicación conjunta de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la UBA y de la Embajada de Francia en la Argentina.

Brousseau,G; (1994) Problèmes et résultats de Didactique des Mathématiques. ICMI Study 94. What is research in Mathematics Education and what are its results.

Brousseau, G.; (1995) L'enseignant dans la théorie des situations didactiques, en Noirfalise, R. y Perrin-Glorian M. J. (comps.) ; Actes de l`ecole d`ete ;IREM de Clermot-Ferrand 1996.

Brousseau, G.; (1997) Theory of Didactival Situations in Mathematics:Didactique des mathématiques 1970 1990, (Balachef, N., Cooper, M., Sutherland, R. and Warfield, V., trans. and eds.) Dordrecht Klwuwer.

Brousseau, G.; (1998) Visite de l`atelier « Théorie des situations », et réponses aux questions des participants de l' U.E. ; en Noirfalise, R. (comp.) Actes de l'Université d'été, La Rochelle-Charente-Maritime.. Irem de Clermont- Ferrand.

Brousseau, G.; (1999) Educación y Didáctica de las Matemáticas. Educación Matemática. México, noviembre de 1999.

Brousseau, G. y Centeno, J. ; (1991) Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant. *Recherches en Didactique des mathématiques*, vol 11/2.3, 167-210. La Pensée Sauvage, Grenoble.

Brun, J; (1994) Evolution des rapports entre la psychologie du développement cognitif et la didactique des mathématiques. Vingt Ans de Didactique des Mathématiques en France. La Pensée Sauvage.

Butlen,D; Lagrange, M y Perrin Glorian, M.J (1991) Elevés de 6 ème en difficulté. Repères. IREM. Número 3.

Campos Lins, R; (1997) Luchar por la superviviencia: la producción de significado, en Uno. Revista de Didáctica de las matemáticas número 14, pp 39-46. Graó, Barcelona.

Campos Lins R.;(2000) The Production of Meaning for Algebra: a perspective based on a Theoretical Model of Semantic Fields, en Sutherland, R.; Rojano, T.; Bell, A.; Lins, R.; (Eds) Perspectives on School Algebra. Kluwer Academic Publishers.

Castorina, J.A.; (1996) El debate Piaget-Vigotsky: La búsqueda de un criterio para su evaluación. Piaget-Vigotsky: contribuciones para replantear el debate. Buenos Aires, Paidós Educador, 1996.

Castorina, J.A.; (2000) El constructivismo social y la enseñanza de las ciencias: una crítica epistemológica, en Espósito I. (compiladora) Psicopedagogía: entre aprender y enseñar. Miño y Dávila Editores.

Combier, G ; Guillaume, J,C ; Pressiat, A (1996) Les débuts d l'algèbre au collège. Au pied de la lettre !. Institut National de Recherche Pédagogique. Didactiques des disciplines.

Charnay,R; (1988) Aprender por medio de la resolución de problemas, en Parra,C y Saiz,I (comps) Didáctica de la Matemática, Buenos Aires, Paidos Educador, 1994.

Chevallard, Y.; (1984-1985) Le passage de l'arithmétique a l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège. Primera y Segunda partes en Petit X 5 p 51-94, Petit x 19,IREM de Grenoble.

Chevallard, Y; (1985) La transposition didaactique. La Pensée Sauvage, Grenoble.

Chevallard, Y.; (1989) Le passage de l'arithmétique a l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège. Deuxième partie. Petit X 19.

Chevallard, Y (1989) Le concept de rapport au savoir. Rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel. *Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique*, Université Joseph Fourier Grenoble Y, Vol 108, pp 211-236.

Chevallard, Y (1992) Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématiques*. vol. 12.1. La Pensée Sauvage, Grenoble.

Chevallard, Y.; (1996) Les outils sémiotiques du travail Mathématique, Petit X nº 42, IREM de Grenoble.

Cobb, P. ; (1996) Where is the mind ? A Coordination of Sociocultural and Cognitive Constructivist Perspectives en Constructivism: Theory, Perspectives, and Practice. Teachers College, Columbia University.

Douady, R. ; (1986) Jeux de cadre et dialectique outil-objet, Recherches en didactique des mathématique, vol. 7.2, La pensée Sauvage, Grenoble.

Douady,R; (1995) La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento. Ingeniería Didáctica en Educación Matemática. Bogotá, Grupo Editorial Iberoamericano, 1995.

Drouhard, J.P. et al. ; (1995) Calculateurs aveugles, dénotation des écritures algébriques et entretiens "faire faux". Le Journal de la commission inter-IREM didactique, IREM de Clermont-Ferrand.

Duperret J.C. ; Fenice J.C. ; (1999) L'accès au littéral et à l'algébrique : un enjeu du collège. N° 34 , Enero de 1999, Repères – IREM.

Duval, R (1988) Ecarts sémantiques et cohérence mathématique : introduction aux problèmes de congruence. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, Vol. 1. Pp 7-26, IREM de Strasbourg.

Duval, R.; (1995), Sémiosis et pensée humaine, Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Peter Lang.

English, L ; Sharry, P. (1996) Analogical Reasoning and the Development of Algebraic Abstraction. Educational Studies in Mathematics 30.2, pp. 135-157. Kluwer Academic Publishers. Netherlands

Frege, G., 1974. Que es una Función, *Escritos lógicos Semánticos* (Tecnos: Madrid), pp. 73-80.

Fregona, D. ; (1995) Les figures planes comme "milieu" dans l'enseignement de la géométrie : interactions, contrats et transposition didactiques. Tesis doctoral, Universidad de Bordeaux I.

García, R.; (2000) El conocimiento en construcción, Editorial Gedisa.

Gilly, M. (1989) À propos de la théorie du conflit socio-cognitif et des mécanismes psycho-sociaux des constructions cognitives : perspectives actuelles et modèles explicatifs, en , en Bednarz,N. y Garnier C. (eds.) Construction des savoirs, obstacles et conflits, CIRADE- Agence d'Arc inc.

Gilly, M., Roux, J.P., Trognon, A. (1999). Interactions socials et changements cognitifs: fondements pour une analyse séquentielle, en Apprendre dans l'interaction . Presses Universitaires de Nancy, Publications de L'Université de Provence.

Goodson-Espy, T : (1998) The Roles of Reification and Reflective Abstraction in The Developement of Abstract Thought: Transitions from Arithmetic to Algebra. Educational Studies in Mathematics 36. pp 219-245. Kluwer Academic Publishers. Netherlands

Grugeon, B.; (1995) Etude des rapports institutionnels et des rapports personnels des élèves a l'algèbre élémentaire dans la transition entre deux cycles d'enseignement: BEP et Première B. Thèse de doctorat, Université de Paris VII.

Inhelder, B. et al.; (1992) Le cheminement des découvertes de l'enfant, Delechaux et Niestlé.

Janvier,C.; Charbonneau,L; Cotret,S.(1989). Obstacles épistémologiques à la notion de variable: perspectives historiques. Construction des Savoirs, obstacles et conflits (CIRADE, Université de Québec à Montréal: Montréal), pp. 64-75 .

Janvier, C. (1996). Modeling and the initiation into Algebra. Approaches to Algebra, Bednarz et al (eds), 225-236, Kluwer Publischers, Netherlands.

Kieran, C. (1980). The interpretetion of equal sign : Symbol for equivalence vs an operatos symbol, Proceedings of PME 4 , Karplus (ed), California.

Kieran, , C.; Filloy Yague, E.; (1989) El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. Enseñanza de las Ciencias. 7.3 229- 240.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. Douglas A. Grouws (de), pp 390-419, New York Macmillan.

Kilpatrick, J (s/f) Valoración de la investigación en Didáctica de las Matemáticas: Más allá del valor aparente. Universidad de Georgia, Athens, EE.UU.

Kilpatrick, J (1994) Vingt ans de Didacctique Francaise Depuis les USA. Vingt ans de Didactique des Mathematiques en France. La Pensée Sauvage, Grenoble.

Laborde, C. (1991) Deux usages complémentaires de la dimension sociale dans les situations d'apprentissage en mathématiques, en Garnier, C ; Bednarz, N. y Ulanovskaya, I. (comps.) Après Vygotski et Piaget. Perspectives sociale et constructiviste. Ecoles russe et occidentales, Bruselas, De Boeck Université.

Lee, L y Wheeler, D (1987) Algebraic thinking in high school sutdents : their conceptions of generalisation and justification. Deparment of Mathematics, Concordia University, Montreal.

Lee, L.; (1996) An initiation into algebraic culture through generalization activities, en en Bednarz et al (eds), Approaches to Algebra, pp 87-106, Kluwer Publischers, Netherlands.

Lemoyne, G.; Conne, F.; Brun, J.; (1991) Connaissances arithmétiques te escritures algébriques chez des élèves de 13 a 15 ans. Séminaires de Didactique des Mathématiques et de l'informatique. Université Joseph Fourier.

Lemoyne, G.; Conne, F.; Brun, J.; (1993) Du traitement des formes a celui des contenus d'écritures littérales: une perspective d'enseignement introductif de l'algèbre. Recherche en Didactique des Mathématiques 13. 3.

Lemoyne ; G. et al. (1997), Les élèves de la psychologie cognitive et de la didactique des mathématiques dans l'ingénierie didactique, Actes des premières journées didactiques de la Fouly, Brun, J ; Conne, F ; Floris R. (comps.)

Lerner, D (1996) La enseñanza y el aprendizaje escolar. Alegato contra una falsa oposición. Piaget-Vigotsky: contribuciones para replantear el debate. Buenos Aires, Paidós Educador, 1996.

Macgregor, M. Stacey, K. (1997) Students' Undestranding of Algebraic Notation: 11.15. Educational Studies in Mathematics 33. pp 1. 19. Kluwer Academic Publishers. Netherlands

Malara, N.; (1994) Il pensiero algebraico: como promuoverlo sin dalla scuola dell' abbligo limitandone le difficolta ? "Comunicación orel en SFIDA '94, Nice, Francia .

Malara, N. et al. (s/f) Theoriy and Practice: A case of Fruitful Relationship for the Renewal of the Teaching and Learning of Algebra. Versión Borrador.

Mason, J.; (1996) Expressing Generality and roots of Algebra, en Bednarz et al (eds), Approaches to Algebra, pp 65-86 , Kluwer Publischers, Netherlands.

Mason, J. (1996) Expressing generality and roots of algebra in Bednarz, N. et al (eds.) Approaches to Algebra, 65-86. Kluwer Academic Publishers. Netherlands.

Margolinas, C (1992) Elémets pour lánalyse du role du maitre: les phases de conclusion. *Recherches en didactique des mathématiques.* Vol 12.1 pp 113-158. La Pensée Sauvage, Grenoble.

Margolinas, C; (1993) De L'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques, La Pensée Sauvage Editions.

Margolinas, C. (1998) Le Milieu et le CONTRAT ; Concepts pour la CONSTRUCTION ET L ? Analyse de Situations d' Enseignement, en Noirfalise (ed) Actes de l'Université d'été. La Rochelle-Charente-Maritime. Irem de Clermont- Ferrand.

Mercier, A. ; (1997) Le milieu et la dimension adidactique des relations didactiques. Actes des premières journées didactiques de la Fouly, Brun, J ; Conne, F ; Floris R. (comps.)

Mercier, A; (1998), La participation des élèves à l'enseignement, *Recherches en Didactique des mathématiques,* vol 18/3, 279-310. La Pensée Sauvage, Grenoble

Olson, D.R.; (1998) el mundo sobre el papel. El impacto de la escritura y la lectura en la estructura del conocimiento. Gedisa Editorial, Barcelona.

Panizza, M., Sadovsky, P., Sessa, C. (1995). On pupil's representations about some algebraic objets. Comunicación en Proceedings of PME 19, Recife, Brasil.

Panizza M., Sadovsky P., Sessa C. (1996*)* The first Algebraic Learning: the failure of succes. *Proceedings of the XX th Conference of International Group of Psycology of Mathematics Education,*(Asissi), *PME 20,* Vol. 4, 107-114, Valence.

Panizza M., Sadovsky P., Sessa C. (1999)., La ecuación lineal con dos variables: entre la unicidad y el infinito. *Enseñanza de las Ciencias,* Vol 17, no 3,453-461, Barcelona.

Perrin-Glorian, M.J (s/f) Place de l'ingénierie didactique parmi les méthodologies de recherche en didactique des mathématiques en France. *DIDIREM.* Université Paris 7.

Perrin-Glorian, M.J. ; (1993), Questions Didactiques soulevées à partir de l'enseignement des mathématiques dans des classes « .faibles », *Recherches en Didactique des mathématiques,* vol 13/1.2, 5-.118 La Pensée Sauvage, Grenoble

Perrin-Glorian, M. J. (1994) Théorie des situations didactiques. _Vingt ans de didactique des mathematiques en France. La Pensée Sauvage, Grenoble.

Perrin-Glorian, M.J. (1998) Analyse d'un problème de fonctions en termes de milieu : structuration du milieu pour l' élève et pour le maître, en Noirfalise (ed) Actes de l'Université d'été. La Rochelle-Charente-Maritime. Irem de Clermont- Ferrand.

Perrin, M.J.(1999), Problèmes d'articulation des cadres théoriques: l'exemple du concept de milieu. *Recherches en Didactique des mathématiques,* vol 19/3, 279-322. La Pensée Sauvage, Grenoble

Piaget, J.(1975). Introducción a la epistemología genética. El pensamiento matemático. Biblioteca de Psicología Evolutiva. Paidós, Buenos Aires.

Piaget, J.(1978) La equilibración de las estructuras cognitivas. Problema central del Desarrollo. Siglo XXI, México.

Piaget, J. y García, R; (1982), Psicogénesis e historia de la ciencia, siglo veintiuno editores.

Radford, L. (1996) Some Reflections on Teaching Algebra Through Generalization. Approaches to Algebra, Bednarz et al (eds), 107-111 , Kluwer Publischers, Netherlands.

Robert, A. (1998), Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en Didactique des mathématiques*, vol 18/2, 139-190. La Pensée Sauvage, Grenoble.

Robert,A; Robinet,J (1993) Prise en compte du meta en didactique des mathematiques. *Cahier de DIDIREM. IREM. Paris VII*

Robert, A., Robinet, J. (1996) Prise en compte du méta en Didactique des Mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 16.2, pp 145-176. La Pensée Sauvage, Grenoble .

Robinet, J.; (1986) Les "réels : Quels modèles en ont les élèves. Educational Studies in Mathematics 17 pp 359-386

Rouchier, A. Steinbring, H ; (1988) The practice of teaching and research in didactics. *Recherches en didactique des mathématiques*. Vol 9.2 pp 189-220. La Pensée Sauvage, Grenoble.

Sadovsky, P. (1999) Arithmetic And Algebraic Practices: Possible Bridge Between Them. Proccedings of the 23rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Haifa, July 25-30 1999, pp 145-152.

Sadovsky, P; Sessa, C (2000) Interacciones en la clase de matemática: interferencias no previstas para situaciones previstas. Projeto-Revista de Educaçao. Vol II.3, pp 7-11, Porto Alegre, Brasil.

Sackur, C, Drouhard, J.P, Maurel, M, Pecal, M (1997) Comment recueillir des connaissances cachées en Algebre et qu en faire_. Reperes-IREM 28. Pp 37-67.

Sensevy, G. (1998). Institutions didactiques. Étude et autonomie à l'école élémentaire. Presses Universitaires de France. París.

Sierpinska, A.;(1985) Obstacles épistémologiques relatifs a la notion de limite. Recherches en Didactique des mathématiques. Vol 6.1 pp 5-67. La Pensée Sauvage. Grenoble.

Sierpinska, A., (1989) Sur un programme de recherche lié à la notion d'obstacle épistémologique, en Bednarz,N. y Garnier C. (eds.) Construction des savoirs, obstacles et conflits, CIRADE-Agence d'Arc inc.

Schoenfeld, A (1991) Learning to think mathematically. Problem Solving, Metacognition and sense making in Mathematics. Grounws D (De). Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning. New York, Macmillan, 1992.

Schubauer-Léoni, M.L. (1989) Problématisation des notions d' obstacle épistémologique et de conflit socio-cognitif dans le champ pédagogique, en , en Bednarz,N. y Garnier C. (eds.) Construction des savoirs, obstacles et conflits, CIRADE- Agence d'Arc inc.

Schubauer-Léoni M.L. (1998) Le contrat didactique : une construction théorique et une connaissance pratique, Interactions didactiques 9., Université de Genève et de Neuchâtel.

Sfard, A. (1991) On the dual nature of Mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. Educational Studies in Mathematics 22.1 Kluwer Academic Publishers. Netherlands

Tavignot, P (1994) Réflexion sur les aspects méthodologiques de la recherche en Didactique des Mathématiques. Vingt ans de didactique des mathématiques en France. La Pensée Sauvage, Grenoble.

Trognon, A; (1999), Éléments d'analyse interlocutoire en Apprendre dans l'interaction . Presses Universitaires de Nancy, Publications de L'Université de Provence.

Vergnaud, G.; Cortés, A.; Favre-Artigue, P. (1987) Introduction de l'algèbre auprès de débutants faibles. Problèmes épistémologiques et didactiques. Actes du colloque de Sevres. Didactique et acquisition des connaissances scientifiques, 259-288. Editions La Pensée Sauvage.

Vergnaud, G.; (1989) Difficultés conceptuelles, erreurs didactiques et vrais obstacles épistémologiques dans l'apprentissage des mathématiques, en , en Bednarz,N. y Garnier C. (eds.) Construction des savoirs, obstacles et conflits, CIRADE- Agence d'Arc inc.

Vergnaud, G. (1990) La Théorie des Camps Conceptuels. *Recherches en Didactique des mathématiques*, vol 10/2.3, 133-170. La Pensée Sauvage, Grenoble.

Vion, R. (1999) Linguistique et communictation verbale, en en Apprendre dans l'interaction . Presses Universitaires de Nancy, Publications de L'Université de Provence

Wheeler; G. (1996) Rough or Smooth? The Transition from Arithemetic to Algebra in Problem Solving. Algebra. Approaches to Algebra, Bednarz et al (eds), 147-149, Kluwer Publischers, Netherlands.

Woillez, D: (1998) Rapports entre raisonnement arithmétique et utilisation de l'algèbre en quatrième : étude du cas d'un élève prénommé Simon, en Noirfalise (ed) Actes de l'Université d'été. La Rochelle-Charente-Maritime. Irem de Clermont- Ferrand.

Yackel, E; Cobb, P. (1996) Sociomathematical Norms, argumentation, and autonomy in Mathematics. *Journal For Research in Mathematics Education.* Vol. 27/4, 458-477.