P

Teorías no clásicas de la verdad

Operacionales y subestructurales

Autor:
Rosenblatt, Lucas
Tutor:
Barrio, Eduardo Alejandro

2015

Tesis presentada con el fin de cumplimentar con los requisitos finales para la obtención del título Doctor de la Facultad de Filosofía y Letras de la Universidad de Buenos Aires en Filosofía

Posgrado

TEORÍAS NO CLÁSICAS DE LA VERDAD: OPERACIONALES Y SUBESTRUCTURALES

Lucas Rosenblatt

l_rosenblatt@hotmail.com

Tesis de Doctorado
Filosofía
Universidad de Buenos Aires
Director: Eduardo Barrio

Junio de 2015

Índice general

Prefacio

0.1. ¿De qué se trata?

El tema de esta tesis es parte de un campo de creciente influencia. Varios resultados muestran que las lógicas no clásicas tienen un gran potencial para resolver problemas tradicionales que no tienen una respuesta adecuada si nos restringimos a las herramientas proporcionadas por la lógica clásica. Entre estos me preocupan principalmente las paradojas de la autorreferencia, especialmente aquellas que involucran conceptos semánticos, como la verdad, la denotación y la satisfacción, entre otros.

Recientemente, se han desarrollados varias propuestas que estudian las paradojas de la verdad desde un enfoque no clásico. A grandes rasgos, podemos dividir estas propuestas en las que son 'operacionales' y las que son 'subestructurales'. Mientras que los enfoques operacionales hacen frente a las paradojas modificando el comportamiento de alguna(s) conectiva(s), los enfoques subestructurales modifican directamente la relación de consecuencia. Esta monografía puede utilizarse como una introducción crítica al tema de las teorías no clásicas de la verdad. Presenta, en bastante detalle, teorías paracompletas de la verdad, teorías paraconsistentes de la verdad, teorías no transitivas de la verdad y teorías no contractivas de la verdad. Hasta dónde sé, aún no existe nada como esto en la bibliografía, así que pensé que no era una mala idea llenar el vacío.

Esta tesis también puede verse como una defensa de una teoría no clásica de la verdad específica. La principal novedad, supongo, es que la teoría combina ideas del enfoque operacional con las ideas del enfoque subestructural y, en este sentido, puede entenderse como una especie de compromiso entre los dos enfoques.

La metodología que voy a utilizar se basa en la aplicación de métodos matemáticos. Esto me permitirá presentar y comprender una serie de problemas filosóficos con mayor precisión, por medio del uso de herramientas tales como los lenguajes formales, la teoría de modelos y varios procedimientos de prueba. En particular, espero lograr una serie de resultados técnicos sobre el concepto de verdad y extraer algunas conclusiones filosóficas mediante el estudio y la comparación de las propiedades de varias teorías formales no clásicas que buscan caracterizarlo.

0.2. Resumen de los capítulos

En el capítulo 1 se presenta el teorema de la indefinibilidad de la verdad de Alfred Tarski. Después de eso, esbozo varias lógicas no clásicas que podrían ser utilizadas para hacer frente a este teorema. También ofrezco algunas razones generales a preferir el tratamiento no clásico del concepto de la verdad sobre el tratamiento clásico.

La segunda parte de esta monografía trata acerca de las teorías paracompletas y paraconsistentes de la verdad. Está compuesta por los capítulos 2, 3 y 4. En el capítulo 2 se presenta el enfoque paracompleto. Me centro, sobre todo, en la propuesta de Hartry Field, la que, según creo, es la más influyente entre las teorías paracompletas. No sólo presento su teoría con cierto detalle, sino también analizo una serie de críticas que se le han hecho. Algunos de los contenidos de este capítulo ya han aparecido en [62].

En el capítulo 3 se analizan las teorías paraconsistentes de verdad. Esta vez, considero mayormente las propuestas de Graham Priest y de J.C. Beall. Al igual que en el capítulo 3, no sólo ofrezco una presentación de dichas teorías, sino que también analizo una serie de dificultades que afectan estas propuestas.

El capítulo 4 se basa en [90] y contiene una teoría paracompleta y/o paraconsistente alternativa que he defendido anteriormente. Su principal ventaja es que evita una serie de dificultades que afectan a las teorías paracompletas y paraconsistentes estándar. El enfoque está destinado a servir de base para la teoría que defiendo en el capítulo 7. También he agregado un apéndice a este capítulo que se basa en [63].

La parte III considera las teorías subestructurales de la verdad y contiene tres capítulos. En el capítulo 5 analizo el enfoque no transitivo, un nuevo enfoque que ha ganado cierta popularidad recientemente. El punto principal del capítulo es señalar que este enfoque se enfrenta a un par de problemas que, hasta donde sé, no han sido notados. El capítulo está basado principalmente en [11] y [10].

En el capítulo 6 exploro las teorías no contractivas de la verdad. Considero varias teorías no contractivas que se han propuesto en la bibliografía y señalo una serie de posibles problemas con cada una de ellas.

El capítulo 7 explora la posibilidad de desarrollar una teoría no contractiva compatible con los enfoques paracompletos y paraconsistentes. Esta teoría debe entenderse como complemento de la propuesta del capítulo 4. El capítulo analiza y discute con cierto detalle algunas de sus propiedades, virtudes y problemas. He añadido dos apéndices en el que el lector puede encontrar algunas pruebas de ciertas propiedades cruciales de la teoría que defiendo.

La parte IV contiene el capítulo 8, y es muy breve. Allí sólo ofrezco algunas observaciones finales.

0.3. Agradecimientos

Mi primer agradecimiento es a mi director de tesis, Eduardo Barrio. Mi interés en las paradojas semánticas y en el concepto de verdad surgió en uno de sus seminarios hace ya muchos años. Él ha sido, desde entonces, un gran apoyo, sobre todo a lo largo del proceso de escritura de esta tesis. Le doy las gracias por ello.

También tengo una profunda deuda con Federico Pailos, Lavinia Picollo, Diego Tajer, Damián Szmuc y Paula Teijeiro. He discutido muchas de mis ideas con ellos en varias ocasiones. Creo que la calidad de esta tesis ha mejorado sustancialmente gracias a ellos. También estoy muy agradecido con José Tomás Alvarado, Rodrigo Bacellar, Natalia Buacar, Catrin Campbell-Moore, Walter Carnielli, Ramiro Caso, Marcelo Coniglio, Roy Cook, Eleonora Cresto, Bruno Da Ré, Pablo Egré, Norbert Grazl, Volker Halbach, Ole Hjortland, Jeff Ketland, Nicolás Loguercio, Alonso Losada, Julien Murzi, Ignacio Ojea, Francesco Paoli, Juan Redmond, Dave Ripley, Ariel Roffé, Mariela Rubin, Thomas Schindler, Johannes Stern, Marta Sznajder y Elia Zardini. Todos ellos han contribuido de una manera u otra a mejorar los contenidos de esta tesis doctoral.

Parte I

Introducción

Capítulo 1

Teorías no clásicas de la verdad

1.1. Introducción

Desde los trabajos de Alfred Tarski en los años 30 (en especial [102], reimpreso luego en [104]), se sabe que no es posible dar una definición adecuada de la noción verdad en el marco de una teoría cuya lógica subyacente esté regida por la relación de consecuencia clásica. Más precisamente, el famoso teorema de la indefinibilidad de Tarski nos dice que cualquier teoría que cumpla con un número pequeño de requisitos mínimos es incompatible con una noción transparente de verdad[1].

Una versión actualizada del teorema establece que cualquier teoría que satisfaga las tres condiciones siguientes es trivial:

1. La teoría está expresada en un lenguaje capaz de representar su propia sintaxis; en particular, el lenguaje tiene suficientes recursos expresivos para hablar de sus propias oraciones.

2. Para cualquier enunciado ϕ del lenguaje, la teoría admite la sustitución de ϕ por ϕ *es verdadera* (y viceversa) en cualquier contexto (no intensional)[2].

3. La lógica subyacente de la teoría es clásica.

[1] Un predicado de verdad *transparente* es, informalmente, uno que satisface la segunda condición del teorema de Tarski. Por el momento, me quedaré con esta caracterización vaga, más adelante ofreceré una definición más rigurosa.

[2] En este capítulo voy omitir distinciones entre uso y mención. Por ejemplo, en la condición 2 del teorema de Tarski debería leerse $\langle\phi\rangle$ *es verdadera* en lugar de ϕ *es verdadera*, donde $\langle\phi\rangle$ es un nombre para la oración ϕ. Supondré que el contexto siempre es suficiente para evitar cualquier tipo de ambigüedad.

La teoría resultante es trivial porque la primera condición es todo lo que se necesita para construir una oración paradójica λ, a veces llamada 'oración del mentiroso', tal que:

λ si y sólo si no es el caso que λ es verdadera.[3]

Intuitivamente, λ es (equivalente a) una oración que dice de sí misma que no es verdadera. La existencia de tal oración contradice inmediatamente la segunda condición del teorema de Tarski, siempre y cuando la tercera condición se cumpla.

Para superar esta dificultad, tenemos, a grandes rasgos, las siguientes tres alternativas disponibles. La primera de ellas es rechazar la condición 1 y vivir con el hecho de que no podemos expresar ciertas verdades acerca de las oraciones. La segunda es rechazar la condición 2, lo que equivale a la aceptación de la existencia de oraciones ϕ que no son sustituibles por ϕ *es verdadera*. Nuestra última opción es rechazar la condición 3. Esta opción implica movernos por fuera del reino de la lógica clásica. El presente trabajo favorece este último enfoque.

Con el fin de ver exactamente cómo la lógica clásica debe ser modificada, consideremos el siguiente esquema de prueba informal de la paradoja del mentiroso. Por la condición 1, sabemos que existe una oración λ con las características mencionadas anteriormente. Supongamos que λ es verdadera. Por la condición 2 y el significado de λ, podemos inferir que λ es verdadera, pero también que no lo es. Supongamos ahora que λ no es verdadera. Una vez más, por la condición 2 y el significado de λ, podemos inferir que λ es verdadera, pero también que no lo es. Teniendo en cuenta que la ley de tercero excluido nos dice que cada oración es verdadera o no lo es, obtenemos una contradicción razonando por casos. Por último, ya que la regla *Ex Contradictione Quodlibet* (a veces también llamada "regla de explosión") nos dice que a partir de una contradicción todo se sigue, podemos inferir cualquier oración.

Este esquema prueba será útil para presentar las diferentes alternativas que se han considerado en la bibliografía para hacer frente a la paradoja del mentiroso y a otras paradojas semánticas similares. A grandes rasgos, hay

[3]Es muy común hacer una distinción entre una oración que dice de sí misma que es falsa -típicamente denominada 'oración del mentiroso'- y una oración que dice de sí misma que no es verdadera -normalmente llamada 'oración del mentiroso reforzada'. A excepción de algunas partes de los capítulos 3 y 4, no haré tal distinción, ya que la mayoría de las teorías que analizaré trata a dichas oraciones como si fueran equivalentes. De hecho, en lo que sigue será útil considerar directamente la oración del mentiroso reforzada (a la que me referiré, imprudentemente, como oración del mentiroso).

dos formas de debilitar la lógica clásica de modo que las oraciones paradójicas no se puedan utilizar para trivializar la noción de verdad. La primera consiste en alterar el comportamiento de alguna(s) de la(s) constantes lógicas habituales. La segunda consiste en alterar el comportamiento de la relación de consecuencia. Voy a llamar al primer tipo de enfoque 'operacional' y al segundo 'subestructural'.

1.1.1. El enfoque operacional

En el enfoque operacional hay dos grandes familias de teorías: las paracompletas y las paraconsistentes. Aunque no es del todo sencillo ofrecer una caracterización rigurosa de la distinción, voy a decir que una teoría es *paracompleta* si rechaza alguna oración ϕ junto con su negación, y voy a decir que una teoría es *paraconsistente* si acepta alguna oración ϕ junto con su negación[4]. De ello se desprende que las teorías paracompletas bloquean la prueba esbozada anteriormente rechazando la ley de tercero excluido, mientras que las teorías paraconsistentes bloquean la prueba rechazando la regla de explosión.

Teorías paracompletas

Uno de los primeros en ensayar una respuesta formal paracompleta a las paradojas autorreferenciales fue Saul Kripke en su [54][5]. La idea detrás del rechazo de la ley del tercero excluido para la oración λ es que si asumimos que λ es verdadera, podemos inferir una contradicción, y si asumimos que es falsa, podemos inferir una contradicción una vez más; por lo tanto, λ no puede ser verdadera ni falsa. Esto, por supuesto, no es posible en un contexto clásico, donde el principio de bivalencia se cumple (cada oración es o bien verdadera o bien falsa).

Kripke considera varias teorías en las que este principio se rechaza[6]. En estas teorías se introduce una categoría semántica adicional, diferente de

[4]Esta manera de trazar la distinción es ya controversial. Es más común reservar el nombre 'paracompleto' para las teorías que rechazan alguna instancia de la ley de tercero excluido, y usar el nombre 'paraconsistente' para referirse a aquellas teorías que rechazan la regla de explosión, reservándose el nombre 'dialeteismo' para las teorías que aceptan contradicciones. Sin embargo, esta terminología un tanto no estándar es inofensiva en este contexto. Por ejemplo, todas las teorías paraconsistentes que consideraré son también dialeteicas, y todas las teorías paracompletas -en mi sentido- rechazarán (al menos alguna versión de) la ley de tercero excluido.

[5]Kripke fue anticipado en cierta medida por el trabajo de Fitch [39]. Además, alrededor de la época en que Kripke publicó su famoso artículo, otros estaban trabajando en ese tema también. De especial importancia es el trabajo de Martin y Woodruff, por ejemplo, en [58].

[6]Aunque, curiosamente, Kripke sostiene que no es necesario introducir un valor de

la verdad y la falsedad, y se afirma que λ pertenece a esa nueva categoría. Como consecuencia, habrá oraciones tales que ni ellas ni sus correspondientes negaciones serán verdaderas, lo que significa que la ley de tercero excluido no será universalmente válida.

La principal virtud de este enfoque es que en él es posible acomodar un concepto transparente de verdad, es decir, se cumple que para cada oración ϕ del lenguaje podemos sustituir ϕ por ϕ *es verdadera* en todo contexto (no intensional)[7] sin generar una inconsistencia.

El enfoque paracompleto de Kripke ha sido desarrollado y defendido por varios filósofos (véase, por ejemplo [50]). Como el propio Kripke señaló, hay varias teorías no clásicas que son compatibles con un predicado de verdad transparente. Quizás la más popular dentro de la familia paracompleta sea la teoría de tres valores que normalmente se conoce con el nombre de K_3 (la 'K ' se utiliza porque la teoría hace uso del esquema de valuación fuerte de Stephen Cole Kleene, que presentaré oficialmente en el próximo capítulo)[8]. A pesar de ello, se ha argumentado que tanto K_3 como otras teorías paracompletas deben enfrentar una serie de dificultades. Mencionaré las que, a mi parecer, son las dos más graves.

La primera es que carece de un condicional adecuado. Esto significa que no es adecuada para expresar y razonar con oraciones de la forma *si ϕ, entonces ψ*. Esto es un problema porque uno de los requisitos que el propio Tarski impuso sobre cualquier definición adecuada para el predicado de verdad es que cada instancia del llamado *esquema T* debe estar implicada por dicha definición. El esquema T establece que para cada oración ϕ del lenguaje, el siguiente bicondicional debe cumplirse:

ϕ *es verdadera* si y sólo si ϕ.

---

verdad extra para ello. Básicamente, a pesar de que ciertas oraciones no son ni verdaderas ni falsas, él no considera esta categoría semántica adicional como un *valor de verdad* extra.

[7] Para que este principio de sustitución sea aceptable el contexto debe ser no intensional. Por ejemplo, si un predicado epistémico como el de creencia está disponible en el lenguaje, no sería deseable que ϕ sea sustituible por ϕ *es verdadera* siempre. Un agente podría creer que $2 + 2 = 4$ sin creer que 'dos más dos son cuatro' es cierto, ya que podría ser incapaz de entender español.

[8] En su trabajo Kripke también se centra en otros dos esquemas de valuación: el esquema de Kleene débil (véase el capítulo 2) y el esquema supervaluacionista. Este último crea algunos problemas con mi definición de paracompletitud, ya que la ley de tercero excluido se mantiene pero hay ciertas oraciones -λ es una de ellas- para las cuales la metarregla de razonamiento por casos falla. Es decir, aunque podemos probar que λ *o no* λ es el caso, no podemos probar λ ni su negación. Sin embargo, no voy a considerar el esquema supervaluacionista en esta monografía, ya que no es compatible con un predicado de verdad totalmente ingenuo.

Puesto que no hay un condicional adecuado en estas teorías, no es posible probar algunas oraciones de la forma *si ϕ, entonces ϕ*. Como consecuencia de ello, tampoco es posible demostrar ciertas instancias del esquema T. El problema radica en que que cada bicondicional donde ambas partes no sean ni verdaderas ni falsas también será, él mismo, ni verdadero ni falso. Por ejemplo, si tomamos λ nuevamente, el bicondicional λ *si y sólo si* λ *es verdadera* no es declarado verdadero por estas teorías. Como muchos filósofos han señalado, esta dificultad no se resuelve fácilmente. Las formas más obvias de añadir un condicional a estas teorías las hace inconsistentes -de hecho, triviales- en virtud de otra famosa paradoja: la paradoja de Curry (llamada así en honor a Haskell Curry; véase [31]).

El segundo problema importante que afecta a estas teorías surge de su limitación expresiva. Algunas de las teorías expuestas por Kripke no tienen los recursos expresivos para caracterizar semánticamente aquellas oraciones que no son ni verdaderas ni falsas *en su lenguaje objeto*. En otras palabras, aunque estas teorías declaran determinadas oraciones como ni verdaderas ni falsas "desde afuera", este hecho semántico no puede ser expresado "dentro" de estas teorías. Por ejemplo, en K_3, la oración que expresa que λ no es verdadera ni falsa no es verdadera (ni falsa). Por otra parte, no hay ninguna manera sencilla de agregar al lenguaje un operador específicamente diseñado para expresar la idea de que una oración no es verdadera ni falsa, ya que la adición de un operador de este tipo suele producir nuevas inconsistencias.

Recientemente, en una serie de artículos (por ejemplo, [35] y [36]) y un libro ([37]), Hartry Field ha presentado una teoría paracompleta sofisticada basada en el enfoque de Kripke, donde se prueba no sólo cada instancia del esquema T, sino que también el lenguaje incluye un operador capaz de llevar a cabo la tarea de clasificar semánticamente todas las oraciones que no son verdaderas ni falsas. Esto se logra mediante la introducción de un nuevo condicional, uno que no se puede definir de la manera habitual usando las otras conectivas extensionales, tales como la negación, la conjunción y la disyunción. Para definir este nuevo condicional, Field utiliza secuencias de revisión, una técnica que ha sido desarrollada por Hans Herzberger, Anil Gupta y Nuel Belnap (véase [49] y [43]) para otros propósitos (relacionados). La construcción de un condicional no es una tarea sencilla, ya que trae consigo la posibilidad de expresar nuevas oraciones paradójicas similares a la del mentiroso, pero que involucran un condicional en lugar de una negación. Por supuesto, estoy pensando en paradojas como la de Curry, que ya he mencionado.

En los últimos años, varios autores han señalado que las soluciones paracompletas a las paradojas, entre ellas la de Field, tienen que enfrentarse a una serie de dificultades serias. Aquí sólo mencionaré dos.

En primer lugar, no está claro en qué medida estas soluciones pueden expresar cualquier concepto semántico en su lenguaje objeto sin volverse susceptibles a nuevas paradojas, como la denominada 'paradoja de la validez' (también llamada 'paradoja v-Curry'; véase [20]). Algunas veces este problema se caracteriza como 'el problema de la revancha', esto es, una paradoja que se produce cuando, en el proceso de resolver las paradojas tradicionales, ciertas nociones metateóricas se introducen en el lenguaje objeto produciendo nuevas paradojas[9]. Por ejemplo, aunque estas teorías parecen proporcionar una respuesta natural y bien motivada a la paradoja del mentiroso, no pueden expresar el concepto de no tener un valor designado, o el concepto de ser inválido, ya que la introducción de los correspondientes predicados traería nuevas inconsistencias.

En segundo lugar, algunos detractores del enfoque paracompleto han señalado que no es posible dar una buena explicación del funcionamiento de las cuantificaciones restringidas en este enfoque, es decir, de las oraciones de la forma *todos los ϕs son ψs.* Esta es una cuestión apremiante porque algunos defensores del enfoque paracompleto (entre los cuales tenemos a Field) son deflacionistas acerca del concepto de verdad. Esto significa que toman el predicado veritativo como un mero dispositivo lógico-lingüístico cuya única función es la de permitir la expresión de generalizaciones restringidas. Si no hubiera ningún predicado de verdad disponible en el lenguaje, no seríamos capaces de expresar oraciones como *todos los teoremas de la aritmética son verdaderos*, ya que hay un número infinito de estos teoremas, o *todo lo que el Papa Francisco dijo es verdadero*, ya que podríamos no saber todo lo que dijo. Por lo tanto, es conveniente exigir que cualquier teoría de la verdad esté basada en una lógica que ofrezca un tratamiento satisfactorio de las cuantificaciones restringidas.

Tendremos la oportunidad de ver de nuevo a estos temas con más detalle. Las teorías paracompletas, así como sus problemas, serán el tema del próximo capítulo.

Teorías paraconsistentes

Es un hecho conocido que algunos filósofos han argumentado que existe un diagnóstico diferente para el mentiroso y otras oraciones paradójicas similares. En lugar de sostener que λ no es verdadera ni falsa, afirman que es *tanto* verdadera *como* falsa. Estos filósofos razonan de la siguiente forma. Si asumimos que λ es verdadera, podemos inferir que es falsa, y si asumimos

[9] Esto es, por supuesto, una caracterización aproximada. Seré un poco más riguroso en el capítulo 2

que λ es falsa, podemos inferir que es verdadera. Por lo tanto, λ debe ser verdadera *pero también* falsa.

λ es, desde este enfoque, una contradicción verdadera o, como algunos teóricos paraconsistentes prefieren llamarla, una 'dialeteia' (el término fue acuñado por Graham Priest y Richard Routley, después conocido como Sylvan). Sin embargo, es crucial para que esta posición tenga sentido que no todas las contradicciones verdaderas deban ser rechazadas, sino sólo aquellas que trivializan nuestras teorías. A lo largo de las últimas décadas, el principal defensor de este enfoque ha sido Graham Priest (véase, por ejemplo, [72]), quien ha ofrecido diversos argumentos a favor de la idea de que hay ciertas contradicciones que son verdaderas. Aunque esto puede sonar extraño en un primer momento, es innegable que el enfoque paraconsistente goza de varias ventajas sobre sus rivales. Por ejemplo, en algunas teorías paraconsistentes no sólo se cumple que para cada oración ϕ, ϕ puede ser sustituida por ϕ *es verdadera* en todo contexto (no intensional), sino también que todas las instancias del esquema T son válidas.

Hay varias teorías paraconsistentes disponibles para hacer frente a las paradojas semánticas. Tal vez la más conocida sea la 'lógica de las paradojas' LP (presentaré oficialmente LP en el capítulo 3). Esta teoría se puede caracterizar por medio de una semántica trivaluada que clasifica las oraciones como verdaderas, falsas, o *verdaderas-y-falsas*. A veces se argumenta que LP es superior a K_3 y otras teorías paracompletas en varios aspectos. En primer lugar, el conjunto de oraciones válidas en LP es el mismo que el conjunto de oraciones clásicamente válidas. En segundo lugar, LP puede caracterizar el estatus semántico de oraciones paradójicas, como la del mentiroso, en el lenguaje objeto. En tercer lugar, LP declara válida cada oración condicional de la forma *si* ϕ*, entonces* ϕ, algo que no era posible en K_3.

Aún así, la propuesta paraconsistente no está libre de problemas. Por un lado, a pesar de que el esquema T es demostrablemente válido, el condicional de algunas teorías paraconsistentes, entre ellos el de LP, no satisface la regla de *modus ponens*. La gravedad de este problema radica en el hecho de que *modus ponens* es generalmente considerada como una regla constitutiva del significado del condicional. De hecho, sería problemático utilizar el nombre 'condicional"para una conectiva que no valide dicha regla. Esto implica que estas teorías carecen de un condicional adecuado, al igual que sus rivales paracompletas.

Una segunda dificultad se relaciona con la cuestión de la limitación expresiva. Aún concediendo que LP y otras teorías similares tienen los medios para categorizar semánticamente, dentro de su lenguaje objeto, el estatus semántico de las oraciones que son verdaderas y falsas, no pueden caracterizar otros conceptos semánticos que son igual de importantes, como el de 'verdad estricta' (es decir, el concepto de ser verdadero, pero no falso) o el de 'falsedad estricta' (es decir, el concepto de ser falso, pero no también verdadero). Por ejemplo, la oración que expresa que λ es a la vez verdadera y falsa es ella misma verdadera y falsa, y no sólo verdadera, como podría esperarse. Por otra parte, no existe una manera sencilla de añadir este tipo de predicados sin crear nuevas paradojas que trivializan estas teorías.

Ha habido algunos intentos de añadir un condicional (no extensional) que satisfaga el esquema T, la regla de *modus ponens*, y otros principios deseables. Por ejemplo, Priest (véase [72]) y más recientemente J.C. Beall (véase [17]) han sugerido el uso de una semántica de mundos posibles (e imposibles), como a veces se hace en el ámbito de las lógicas relevantes, para obtener condicionales fuertes que sean compatibles con una teoría de la verdad que satisfaga el esquema T.

Sin embargo, incluso estas propuestas paraconsistentes sofisticadas sufren de algunos de los inconvenientes ya mencionados a propósito de las teorías paracompletas. Tendremos la oportunidad de analizar estos problemas más adelante, ya que las teorías paraconsistentes, así como las dificultades que las afectan, serán el tema del capítulo 3.

1.1.2. El enfoque subestructural

Existe una familia de propuestas recientes en las que en lugar de modificar el comportamiento de las constantes lógicas, se rechaza alguna de las propiedades estructurales que normalmente se atribuyen a la relación consecuencia lógica. Por lo general, se asume que una relación de consecuencia cumple con las siguientes condiciones (véase por ejemplo [103]):

- Si $\phi \in \Gamma$, entonces Γ implica ϕ. (*reflexividad*)
- Si Γ implica ϕ y $\Gamma \subseteq \Delta$, entonces Δ implica ϕ. (*monotonía*)
- Si Γ implica ϕ y ϕ implica ψ, entonces Γ implica ψ. (*corte*).

Además, nótese que como la relación de consecuencia es una relación entre un *conjunto de oraciones* (las premisas) y una oración (la conclusión), también satisface la propiedad de contracción:

- Si Γ, ϕ, ϕ implica ψ, entonces Γ, ϕ implica ψ (*contracción*)

Esta definición ha sido cuestionada de varias maneras (sigo a [55] aquí). En primer lugar, es natural generalizar la relación de consecuencia a argumentos con más de una conclusión. De hecho, hay razones conceptuales y técnicas para permitir que los argumentos tengan múltiples conclusiones.

Por ejemplo, el marco de conclusiones múltiples es más general que el marco que sólo permite una conclusión, ya que, obviamente, cualquier argumento con una sola conclusión puede ser representado en el marco de múltiples conclusiones, mientras que lo contrario no siempre se cumple.

En segundo lugar, al trabajar con conjuntos hacemos que la relación de consecuencia sea automáticamente contractiva. Sin embargo, puede haber contextos en los que tener dos ocurrencias de una oración en lugar de una sola ocurrencia sea importante, es decir, contextos en los que la relación de consecuencia no sea contractiva. Una manera de dar cabida a este fenómeno es trabajar con entidades plurales distintas de los conjuntos, tales como secuencias o multiconjuntos (ofreceré una definición de multiconjunto en unos pocos párrafos).

En tercer lugar, podríamos sospechar de la propiedad de monotonía por razones obvias. Por ejemplo, si queremos que nuestra noción de consecuencia represente ciertos razonamientos relevantes, entonces no deberíamos estar autorizados a agregar premisas irrelevantes *ad libitum*. Pero la propiedad de monotonía nos permite hacer precisamente eso.

En cuarto lugar, la regla de corte encarna la idea de que la relación de consecuencia es transitiva. Pero hay una serie de maneras de cuestionar este dogma también. Por ejemplo, si estamos razonando con predicados vagos (como 'es calvo' o 'es un adulto'), no es difícil motivar a la idea de que la transitividad causará problemas.

En quinto lugar, podrían existir motivos para cuestionar la propiedad de la reflexividad también. Por ejemplo, si se espera que la relación de consecuencia capture algún tipo de razonamiento no circular, entonces no debemos permitir derivaciones en las que la premisa y la conclusión sean la misma oración.

Ahora bien, volviendo a las paradojas semánticas, hay dos propiedades estructurales que se utilizan sin excepción (aunque en muchas ocasiones de forma tácita) en la derivación de una inconsistencia (o de trivialidad) a partir de una oración paradójica: transitividad (corte) y contracción. Por lo tanto, hay dos tipos de teorías subestructurales que debemos tener en cuenta, las que rechazan la regla de corte (las 'teorías no transitivas'), y las que rechazan la regla de contracción estructural (las 'teorías no contractivas').[10]

[10] ¿Qué ocurre con las otras propiedades estructurales de la relación de consecuencia, como la reflexividad y la monotonía? ¿También juegan un papel en las paradojas? La segunda no juega un papel importante, como veremos a continuación. Hay oraciones paradójicas que conducen a trivialidad sin la ayuda de dicha propiedad. La reflexividad, por otro lado, sí juega un papel. Sin embargo, al momento de escribir esta monografía nadie ha defendido de manera sistemática una teoría no-reflexiva que se ocupe de las paradojas, así que voy a pasar por alto esta posibilidad. Sin embargo, el lector puede consultar [40]

Teorías no transitivas

En las teorías no transitivas la idea principal es que hay oraciones ϕ_1, ϕ_2 y ϕ_3 tal que ϕ_2 se sigue de ϕ_1, ϕ_3 se sigue de ϕ_2, pero ϕ_3 no se sigue de ϕ_1. ¿Cómo es esto relevante para las paradojas de la verdad? Pues bien, la paradoja del mentiroso se evita porque aunque cualquier oración implica la oración del mentiroso λ y λ implica cualquier oración, no se sigue que cualquier oración implique cualquier oración, debido a la falla de transitividad .

Podemos ofrecer una interpretación semántica plausible de la falla de transitividad en términos de aserción y negación[11]. Para entender en qué consiste esta interpretación, es útil tener en cuenta la distinción entre una aserción (negación) estricta y una aserción (negación) tolerante[12]. Informalmente, diremos que una oración es estrictamente asertable (negable) si es verdadera (falsa), pero no también falsa (verdadera). Y decimos que una oración es tolerantemente asertable (negable) si es verdadera y falsa. Por lo tanto, una relación de consecuencia es *estricta-tolerante* cuando va de premisas estrictamente verdaderas a una conclusión tolerantemente verdadera (o, equivalentemente, a una conclusión que no es estrictamente falsa). Si suponemos que sólo hay dos categorías semánticas disponibles, lo verdadero y lo falso, la relación de consecuencia estricta-tolerante coincide con la relación de consecuencia clásica. Pero si hay oraciones que no son ni estrictamente verdaderas ni estrictamente falsas, tales como λ, entonces la relación ya no será transitiva. En otras palabras, la relación de consecuencia ya no se define como la preservación de algún valor designado, sino como un debilitamiento de estándar al pasar de las premisas a la conclusión. Un argumento podría todavía ser válido aún cuando las premisas fueran estrictamente verdaderas y la conclusión apenas tolerantemente verdadera (es decir, no estrictamente falsa), y del mismo modo, cuando las premisas son tolerantemente verdaderas y la conclusión estrictamente falsa.

Algunos de los filósofos que suscriben a esta idea (véase [25], [26], [87], y [88]) sugieren que la virtud fundamental del enfoque no transitivo (al menos en una de sus versiones) es que cada inferencia clásicamente válida se conserva, incluso en la presencia de oraciones paradójicas. En otras palabras,

---

para algunos indicios.

[11] A veces usaré el término técnico 'asertable' ('asertar') en lugar de 'aseverable' ('aseverar') o 'afirmable' ('afirmar') para tener presente que estamos hablando de la propiedad asociada con el acto de aserción.

[12] Mediante el uso del par aserción/negación en lugar del par aceptación/rechazo, sólo estoy siendo fiel a la terminología de los defensores del enfoque no transitivo. Aunque estos dos pares son conceptualmente diferentes, ya que la aceptación y el rechazo son actitudes que un agente tiene hacia una proposición mientras que la aserción y la negación son actos de habla, la distinción estricto/tolerante se puede aplicar a ambos.

la ley de tercero excluido, la regla de explosión, la regla de *modus ponens*, la metarregla de prueba condicional, y muchos otros principios que han sido rechazados con el fin de hacer frente a las paradojas, son declarados válidos en este enfoque. La razón por la que esto es así es que la regla corte es eliminable en muchas presentaciones de la lógica clásica. Esto significa que ninguna prueba de una inferencia clásicamente válida requiere el uso de corte. Cuando se añade el predicado veritativo, esto ya no es así. Sin embargo, todo lo que se pierde, a nivel inferencial, son aquellos razonamientos que involucran esencialmente las paradojas. Para todos los demás, la regla de corte es prescindible.

Como veremos en el capítulo 5, el enfoque no transitivo no está exento de problemas. Una característica muy interesante del enfoque tiene que ver con las metainferencias que (in)valida[13]. Aunque las reglas de *modus ponens*, *modus tollens*, silogismo disyuntivo, son todas ellas *inferencias* válidas, las mismas dejan de ser válidas *qua* metainferencias. De hecho, se puede demostrar que las *metainferencias* que fallan en esta teoría son exactamente las *inferencias* que fallan en la lógica *LP*. Por lo tanto, hay un sentido importante en el que el enfoque no transitivo se aparta de la lógica clásica.

Otra preocupación que voy a abordar más adelante es que, aunque el enfoque no transitivo ofrece un tratamiento adecuado de la paradoja de la validez (sin corte no es posible trivializar una teoría usando la paradoja de la validez), éstas no pueden representar plenamente sus propias nociones de validez. Aunque para cada inferencia válida, las teorías no transitivas pueden probar la afirmación que expresa que la inferencia es válida, hay algunas metainferencias no válidas que la teoría declara como válidas, y esto parece ser un problema importante.

Voy a considerar el enfoque no transitivo pormenorizadamente en el capítulo 5, por lo que hasta entonces, pospongamos estas cuestiones.

Teorías no contractivas

Los conjuntos son entidades extensionales. Se definen puramente en términos de sus miembros. El conjunto $\{\phi, \phi\}$ es idéntico al conjunto $\{\phi\}$. Esto motiva la regla de contracción:

[13]Es relativamente estándar hacer una distinción entre leyes (por ejemplo, la ley de tercero excluido), reglas o inferencias (por ejemplo, la regla de explosión) y metarreglas o metainferencias (por ejemplo, la metarregla de prueba condicional o la metarregla de razonamiento por casos). Una ley establece que una determinada fórmula es válida. Una regla establece que el argumento que va de ciertas fórmulas a otra(s) fórmula(s) es válido. Por último, una metarregla dice que si ciertos argumentos son válidos, luego otro argumento es también válido. A veces seré descuidado y diré 'regla' en lugar de 'metarregla'. Espero que el contexto sea suficiente para disipar las posibles confusiones.

- Si Γ, ϕ, ϕ implica ψ, entonces Γ, ϕ implica ψ.

Esta regla nos indica que hay cosas que si algo puede deducirse a partir de dos ocurrencias de una oración, entonces puede deducirse a partir de una sola ocurrencia de esa oración. Si entendemos a la colección de premisas como un conjunto, esta regla es trivialmente correcta. El único modo en que esta regla podría fallar es si dos ocurrencias de una oración ϕ no son lo mismo que una ocurrencia ϕ. Es decir, la colección cuyos miembros son ϕ y ϕ debe ser distinta de la colección cuyo único miembro es ϕ. Pero vimos que esto no puede suceder si trabajamos con conjuntos. Por esa razón, en este enfoque las inferencias deben ser entendidas en términos de *multiconjuntos* en lugar de conjuntos. Un multiconjunto es como un conjunto excepto por el hecho de que es sensible a las diferentes ocurrencias de un miembro. Por ejemplo, el multiconjunto cuyos miembros son a, a y b *no* es el mismo que el multiconjunto cuyos miembros son a y b.

Desde un punto de vista más informal, las teorías no contractivas explotan la idea de que en algunas inferencias hacemos uso de ciertas suposiciones más de una vez. En particular, cuando derivamos una inconsistencia de la oración λ, utilizamos el supuesto de que λ es verdadera en dos ocasiones: cuando inferimos queλ es verdadera y cuando inferimos que es falsa. En otras palabras, podríamos decir que λ junto con λ implica una contradicción, pero λ por sí sola no lo hace.

Hay diferentes maneras de motivar conceptualmente la falla de contracción. Algunos (véase [55]) utilizan la idea de que las oraciones deben ser entendidas como piezas de información y que la información se pueden acumular de cierta forma que hace que no sea posible contraerla. Otros (véase [111]) han sugerido que ciertas oraciones expresan estados de cosas inestables que son incompatibles con la regla de contracción. Y aún otros (véase [24]) afirman que la regla de contracción falla por ciertas oraciones que expresan más de una proposición de forma simultánea. Exploraré estas ideas en los capítulos 6 y 7.

Una característica interesante de algunas teorías no contractivas es que podemos aceptar (alguna versión de la afirmación) λ *o no* λ, y que podemos rechazar (alguna versión de la afirmación) λ *y no* λ. Por lo tanto, una propiedad interesante de este enfoque es que la paradoja del mentiroso puede ser bloqueada sin alterar el comportamiento de la negación. De hecho, podemos utilizar la negación (junto con algunas de las otras conectivas) para definir un condicional que valida todas las instancias del esquema T, que satisface la regla de *modus ponens*, que satisface el teorema de deducción, entre otras cosas *prima facie* deseables. Para decirlo de un modo diferente, ya que podemos utilizar la negación para definir el condicional, la paradoja de Curry no plantea un problema independiente de la paradoja del mentiroso. Los mismos recursos pueden ser usados para lidiar con ambas.

Una ventaja adicional de las teorías no contractivas es que, al igual que las teorías no transitivas, pueden ofrecer un tratamiento adecuado de la paradoja de la validez. De hecho, mientras que las teorías no transitivas prueban como válidas algunas metainferencias inválidas, nada como esto parece ocurrir con las teorías no contractivas.

A pesar de estas virtudes, el enfoque no contractivo debe enfrentarse a una serie de obstáculos, por supuesto. Tal vez el principal desafío para los defensores de este enfoque es el de proporcionar una explicación filosófica conceptualmente motivada del rechazo de la regla contracción *para oraciones paradójicas*.

Además, en general, las teorías no contractivas se presentan por medio de cálculos de secuentes no interpretados. Por lo tanto, parece apropiado exigir una formulación semántica filosóficamente iluminadora de estas teorías[14].

Un problema adicional que no ha sido muy explorado en la bibliografía es el de cómo entender las expresiones cuantificacionales en este enfoque. En particular, dado que en algunas teorías no contractivas hay una ambigüedad entre una lectura extensional de la conjunción y la disyunción, y una lectura intensional, podríamos preguntarnos si lo mismo sucede con los cuantificadores. Después de todo, es habitual interpretar el cuantificador universal como una conjunción generalizada y el cuantificador existencial como una disyunción generalizada .

A pesar de todo esto, el enfoque no contractivo tiene varias características atractivas. Vamos a tener la oportunidad de analizar estas cuestiones con más detalle en los capítulos 6 y 7, donde consideraré varias teorías no contractivas y defenderé una en particular.

1.2. La propuesta

Esta monografía está pensada como una introducción a algunos de los últimos avances en el tema de las teorías no clásicas de la verdad y, al mismo tiempo, como una defensa de una teoría no clásica específica. La idea general detrás de toda la monografía es que ciertas lógicas no clásicas son muy útiles para hacer frente a las paradojas semánticas autorreferenciales. En lo que queda del capítulo 1 voy a dar argumentos a favor de la afirmación de que, al menos en este sentido, estas lógicas son muy superiores a la lógica clásica. De

[14]Hay semántica algebraicas para estas teorías, pero no son muy esclarecedoras desde un punto de vista conceptual.

hecho, voy a argumentar que la lógica clásica es incompatible con el proyecto de explicar cómo debemos razonar con conceptos semánticos ingenuos[15].

Las teorías no clásicas de la verdad son numerosas y variadas. Aunque últimamente ha habido muchas propuestas para lidiar con las paradojas semánticas desde un punto de vista operacional (el capítulo 2 se encarga de las lógicas paracompletas y el capítulo 3 de las lógicas paraconsistentes) y desde un punto de vista subestructural (el capítulo 5 analiza las relaciones de consecuencia no transitivas y el capítulo 6 varias relaciones de consecuencia no contractivas), hasta ahora ha habido poco en lo que respecta a una posible combinación de estos dos enfoques. Uno de mis objetivos es presentar una propuesta que vaya en esta dirección. En el capítulo 4 argumentaré que aunque la resolución de la paradoja del mentiroso y de otras paradojas similares nos obliga a rechazar algunos principios clásicamente válidos, no se nos exige, como muchos han sugerido, la postulación de categorías semánticas diferentes de la verdad y la falsedad. En particular, voy a sugerir que varias de las teorías paracompletas y paraconsistentes existentes en la bibliografía se pueden caracterizar en términos de modelos con sólo dos categorías semánticas. Esto se logra mediante el uso de una herramienta formal conocida como matrices no deterministas. Voy a mostrar, además, que estas teorías bivalentes tienen una serie de ventajas sobre sus alternativas multivaluadas.

Estas ideas, sin embargo, no son suficientes por sí solas. Hay paradojas puramente estructurales que parecen ser devastadoras para los enfoques puramente operacionales. En los últimos años, la afirmación de que la regla de contracción estructural debe ser rechazada con el fin de evitar ciertas paradojas autorreferenciales ha ganado un considerable apoyo. Los defensores de las lógicas no contractivas sostienen que su enfoque es más adecuado que otros enfoques no clásicos (no subestructurales) para lidiar con las paradojas. Sin embargo, adoptar una teoría puramente subestructural (en este caso, no contractiva) tampoco parece ser del todo satisfactorio. Argumentaré, en este sentido, que los enfoques puramente subestructurales no tienen suficientes recursos conceptuales para explicar el estatus semántico de oraciones como la del mentiroso. Por lo tanto, algún compromiso entre ambos enfoques parece ser necesario.

Es por eso que en el capítulo 7 desarrollo una teoría que se ocupa de las paradojas de la verdad (así como de otras paradojas) mediante la combinación de una lógica paracompleta/paraconsistente con una lógica no contractiva. La idea es construir una teoría donde la regla estructural de contracción no sea válida, pero al mismo tiempo tampoco la ley de tercero excluido (y/o la regla de explosión). Este enfoque tiene una serie de virtudes. El diagnóstico

[15]Para una excelente visión general de diversas teorías *clásicas* de la verdad, véase [46].

para la paradoja del mentiroso es el mismo que en las respuestas operacionales. La oración es o bien ni verdadera ni falsa, o bien tanto verdadera como falsa. Sin embargo, para hacer frente a las paradojas puramente estructurales, como la paradoja de la validez, la idea es rechazar la regla estructural de contracción .

Por lo tanto, no hay necesidad de afirmar que el enfoque no contractivo es, en general, un rival de otros enfoques no clásicos tales como los basados en lógicas paracompletas o paraconsistentes. De hecho, la teoría que defiendo puede ser vista como una especie de compromiso entre el enfoque operacional y el enfoque no contractivo.

1.3. Una presentación más rigurosa

En la sección previa ofrecí una presentación informal del famoso teorema de la indefinibilidad de Tarski. También esbocé algunas propuestas para hacer frente a este teorema que analizaré con más atención posteriormente. En esta sección, presentaré algunas cuestiones con mayor precisión. Esto nos permitirá ver más claramente las distintas opciones disponibles para enfrentar el teorema de Tarski.

1.3.1. Preliminares técnicos

Autorreferencia

En lo que sigue sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden con un número infinito de constantes individuales $c_1, c_2, c_3, ...$, un número infinito de predicados $R_1^n, R_2^n, R_3^n, ...$ de cada aridad n, un número infinito de variables individuales $x_1, x_2, x_3, ...$, las conectivas $\neg, \vee$, y el cuantificador $\exists$ (las otras conectivas y cuantificadores pueden definirse a partir de estos). Para simplificar la notación, a menudo usaré $a, b, c, ...$ para las constantes, $P, Q, R, ...$ para los predicados y $x, y, z, ...$ para las variables. Utilizaré el símbolo $\supset$ si el condicional es definible en términos de la negación y la disyunción (conjunción) y usaré el símbolo $\rightarrow$ cuando (quizás) no lo es (consideraciones análogas se aplican al bicondicional en relación a los símbolos $\equiv$ y $\leftrightarrow$). Cuando sea necesario, asumiré que el lenguaje $\mathcal{L}$ contiene una constante de verdad $\top$ y una constante de falsedad $\bot$. Usaré el símbolo $\mathcal{L}^+$ para el lenguaje que se obtiene agregando un predicado de verdad unario $Tr(x)$ (y quizás un predicado de validez binario $Val(x, y)$) a $\mathcal{L}$. En general, utilizaré t_1, t_2, t_3,... para términos singulares (i.e. variables individuales o constantes individuales) y las letras griegas ϕ, ψ, etc. como (meta)variables para fórmulas de $\mathcal{L}$ y de $\mathcal{L}^+$.

Como mi intención es hablar de oraciones autorreferenciales, será necesario el uso de algún sistema de nombres. Una opción tomada por muchos lógicos es utilizar una teoría matemática, como la aritmética de Robinson o la aritmética de Peano. Estas teorías pueden utilizarse para ese propósito debido a que son capaces de codificar su propia sintaxis. El lenguaje de la aritmética habla de números y podemos hacer que los números representen propiedades sintácticas, como la de ser un término, una fórmula, una prueba, etc.

No voy a seguir esta opción en el presente trabajo. En su lugar, voy a suponer que nuestro lenguaje contiene constantes individuales que denotan oraciones en cada modelo. En otras palabras, por cada oración ϕ de $\mathcal{L}^+$ hay un nombre en $\mathcal{L}^+$ que denota esa oración en cada modelo[16]. Voy a usar la notación $\langle\phi\rangle$ para el término que denota la oración ϕ en cada modelo. Esto tiene dos consecuencias. Una de ellas es que nuestro sistema de nombres no será puramente sintáctico, ya que la denotación de los nombres depende de los modelos que utilizamos para interpretar el lenguaje. La otra es que todos los modelos serán infinitos, pues en el dominio de cada modelo están contenidas todas las oraciones del lenguaje. Parece fácil convivir con ambas consecuencias.

Esta forma de obtener expresiones autorreferenciales es suficiente para construir las oraciones paradójicas habituales. Por ejemplo, si tenemos un predicado veritativo $Tr(x)$ disponible, habrá un nombre $\langle\lambda\rangle$ que denota la oración $\neg Tr\langle\lambda\rangle$ en cada modelo (i.e. la oración del mentiroso), un nombre $\langle\kappa\rangle$ que denota $Tr\langle\kappa\rangle \supset \bot$ en cada modelo (i.e. la oración de Curry), y así sucesivamente. Además, si tenemos un predicado de validez disponible, habrá un nombre $\langle\pi\rangle$ que denota la oración $Val(\langle\pi\rangle, \langle\bot\rangle)$ en cada modelo (i.e. la oración v-Curry). Del mismo modo para otras construcciones autorreferenciales
.

En esta monografía voy a presentar una serie de lógicas que difieren de una forma u otra de la lógica clásica. Como consecuencia de ello, será muy útil tener una caracterización rigurosa de la relación de consecuencia clásica a nuestra disposición. Las siguientes dos subsubsecciones están dedicadas a proporcionar tal caracterización.

Semántica

Es relativamente sencillo proporcionar una caracterización de la lógica clásica en términos modelo-teóricos. Por razones que se aclararán en los próximos capítulos, parece conveniente utilizar modelos basados en una matriz.

[16]Tomo prestada esta forma de construir expresiones autorreferenciales de [87].

Definición (*Matriz*) Una *matriz* $\mathcal{M}$ para un lenguaje de primer orden $\mathcal{L}$ es una tupla $< \mathcal{V}, \mathcal{D}, \mathcal{O} >$, donde:

- $\mathcal{V}$ es un conjunto no vacío de valores de verdad,
- $\mathcal{D}$ es un subconjunto propio no vacío de $\mathcal{V}$, el conjunto de valores designados, y
- $\mathcal{O}$ es un conjunto de funciones tal que:
  - para cada conectiva n-aria $\diamond$ de $\mathcal{L}$, hay una correspondiente función $\diamond^{\mathcal{M}}$ en $\mathcal{O}$ tal que $\diamond^{\mathcal{M}}$: $\mathcal{V}^n \longrightarrow \mathcal{V}$, y
  - para cada cuantificador $\mathcal{Q}$ en $\mathcal{L}$, hay una correspondiente función $\mathcal{Q}^{\mathcal{M}}$ en $\mathcal{O}$ tal que $\mathcal{Q}^{\mathcal{M}}$: $\mathcal{P}\mathcal{V} - \{\varnothing\} \longrightarrow \mathcal{V}$.

Sea d un conjunto no vacío de objetos, el dominio de cuantificación, y sea v una función de interpretación. Decimos que la estructura $< d, v^{\mathcal{M}} >$ es una interpretación para $\mathcal{L}$ basada en la matriz $\mathcal{M}$. Para cada constante de individuo c de $\mathcal{L}$, $v^{\mathcal{M}}(c) \in d$, y para cada predicado n-ário R de $\mathcal{L}$, $v^{\mathcal{M}}(R) \subseteq d^n$. Intuitivamente, $v^{\mathcal{M}}(c)$ es el objeto denotado por c y $v^{\mathcal{M}}(R)$ es la propiedad (concepto, conjunto) denotada por R.

Para simplificar las cosas tanto como sea posible voy a utilizar de manera ambigua v como una función de interpretación para el vocabulario no lógico y como una función de valuación que asigna valores semánticos a las fórmulas. También voy a asumir que no hay símbolos de función en $\mathcal{L}$, de modo que los únicos términos singulares de $\mathcal{L}$ son las constantes y las variables de individuo.

Otra simplificación que voy a hacer es que omitiré casi por completo las funciones de asignación para las variables de $\mathcal{L}$. Por lo general, para interpretar las fórmulas cuantificadas tenemos que considerar las funciones de valuación *v junto con una asignación de los objetos en d a las variables individuales*. De hecho, si queremos saber el valor semántico de una fórmula de la forma $\exists x\phi$ de acuerdo con una determinada función de valuación y una cierta asignación de objetos en d a las variables, tenemos que considerar todas las funciones de asignación que difieren de la asignación original a lo sumo en lo que asignan a la variable ligada por $\exists$, en este caso x. Diré que v' es una x-variante de v si ambas difieren a lo sumo en lo que la función de asignación asigna a la variable x, pero no tendré una notación especial para la función de asignación.

Una matriz para la lógica clásica (de aquí en adelante, CL) puede construirse del modo siguiente:

Definición (*Lógica clásica (CL)*) CL puede caracterizarse por medio de la matriz $\mathcal{M} =< \mathcal{V}, \mathcal{D}, \mathcal{O} >$, donde:

- $\mathcal{V} = \{0, 1\}$,
- $\mathcal{D} = \{1\}$, and
- $\mathcal{O}$ está definido de la siguiente forma:

	$\neg^{CL}$
1	0
0	1

$\vee^{CL}$	1	0
1	1	1
0	1	0

$\wedge^{CL}$	1	0
1	1	0
0	0	0

	$\exists^{CL}$
$\{1\}$	1
$\{1, 0\}$	1
$\{0\}$	0

Luego, si $< d, v >$ es una interpretación, decimos que v^{CL}, la interpretación v basada en $\mathcal{M}$ que caracteriza CL, se define recursivamente como sigue:

- $v^{CL}(Rc_1, ..., c_n) = 1$ si y sólo si $< v^{CL}(c_1), ..., v^{CL}(c_n) >\in v^{CL}(R)$.
- $v^{CL}(\neg\psi) = 1 - v^{CL}(\psi)$,
- $v^{CL}(\psi \vee \chi) = max\{v^{CL}(\phi), v^{CL}(\psi)\}$,
- $v^{CL}(\psi \wedge \chi) = min\{v^{CL}(\phi), v^{CL}(\psi)\}$, y
- $v^{CL}(\exists x\psi) = sup\{v'^{CL}(\psi)$: v'^{CL} es una x-variante de $v^{CL}\}$.

En la definición anterior *max* representa el *máximo* de los valores en el conjunto, *min* el *mínimo*, y *sup* representa el *supremo* (es decir, la cota mínima superior) de los valores del conjunto.

Ahora estamos en condiciones de ofrecer una definición modelo-teórica de validez para CL.

Definición (*Validez en CL*) Decimos que un argumento de Γ a Δ es *CL-válido* ($\Gamma \vDash_{CL} \Delta$) si y sólo si para cada interpretación v^{CL}, si $v^{CL}(\gamma) = 1$ para cada $\gamma \in \Gamma$, entonces $v^{CL}(\delta) = 1$ para algún $\delta \in \Delta$[17].

[17]Por ahora, el lector puede tomar conclusiones individuales si así lo prefiere. En este punto nada importante depende de ello, excepto que el autor considera que las conclusiones múltiples son más atractivas. De hecho, incluso si el lector cree que los razonamientos del lenguaje natural siempre tienen una sola conclusión, considerar múltiples conclusiones no hace daño. Como ya señalé, además de tener algunas ventajas técnicas, un marco que permite múltiples conclusiones es simplemente más general que un marco que sólo permite conclusiones individuales. Una discusión más sofisticada de este tema puede encontrarse en [83] y [84]. Véase también [100] para una defensa de las conclusiones individuales.

Por supuesto, si el lenguaje contiene un predicado veritativo $Tr(x)$, es necesario ofrecer también condiciones de verdad para las oraciones de la forma $Tr\langle\phi\rangle$. Desde un punto de vista intuitivo, esto es fácil de hacer:

- $v(Tr\langle\phi\rangle) = v(\phi)$

Utilizaré la notación v^{CL^+} para cualquier valuación que satisfaga esta condición además de las cláusulas semánticas previas para los operadores lógicos. Es sencillo modificar la definición de validez para que tenga en cuenta esta última condición. Diré que un argumento de Γ a Δ es CL^+*-válido* ($\Gamma \vDash_{CL^+} \Delta$) si y sólo si para cada interpretación v^{CL^+}, si $v^{CL^+}(\gamma) = 1$ para cada $\gamma \in \Gamma$, entonces $v^{CL^+}(\delta) = 1$ para algún $\delta \in \Delta$.

Diré, además, que un predicado veritativo es (semánticamente) transparente si satisface la siguiente condición:

Definición (*Transparencia*) Consideremos un argumento con premisas Γ y conclusiones Δ. Sea ϕ una fórmula cualquiera. Supongamos que Γ' (Δ') es exactamente como Γ (Δ) excepto en que (quizás) al menos una ocurrencia ϕ fue reemplazada por $Tr\langle\phi\rangle$ o viceversa. Diré que el predicado veritativo $Tr(x)$ es *transparente* si y sólo si: $\Gamma \vDash \Delta$ si y sólo si $\Gamma' \vDash \Delta'$.

También podemos definir en qué consiste que un predicado veritativo sea (semánticamente) *ingenuo*.

Definición (*Ingenuidad*)
Un predicado veritativo es *ingenuo* si $v(Tr\langle\phi\rangle \equiv \phi) = 1$.[18]

En CL, ambas condiciones son equivalentes. Sin embargo, más adelante veremos que en contextos no clásicos estas condiciones no siempre coinciden. Dicho esto, en general, trataré las ingenuidad y la transparencia como propiedades equivalentes, a menos que sea importante hacer la distinción para algún propósito específico.

Obsérvese que las condiciones de verdad de las fórmulas de la forma $Tr\langle\phi\rangle$ están diseñadas para asegurar que la transparencia del predicado $Tr(x)$ se cumpla. Sin embargo, no es difícil ver que no puede existir un predicado de verdad transparente en el contexto de la lógica clásica. Pues consideremos nuevamente la oración del mentiroso λ. Recordemos que $\langle\lambda\rangle$ denota la oración $\neg Tr\langle\lambda\rangle$ en cada modelo. Por lo tanto, por definición
$v(\lambda) = v(\neg Tr\langle\lambda\rangle)$.
Ahora bien, por la condición de transparencia, tenemos

[18] Más adelante generalizaré la condición de ingenuidad a otros condicionales que no son definibles en términos de la disyunción (conjunción) y la negación.

$v(Tr\langle\lambda\rangle) = v(\lambda)$.
Juntando estas dos cosas, inferimos
$v(Tr\langle\lambda\rangle) = v(\neg Tr\langle\lambda\rangle)$.
Sin embargo, por la cláusula semántica para $\neg$, tenemos:
$v(\neg Tr\langle\lambda\rangle) = 1 - v(Tr\langle\lambda\rangle)$.
Luego, obtenemos:
$v(Tr\langle\lambda\rangle) = 1 - v(Tr\langle\lambda\rangle)$.
Desafortunadamente, esto quiere decir que $v(Tr\langle\lambda\rangle) = 1$ si y sólo si $v(Tr\langle\lambda\rangle) = 0$, lo cual implica una contradicción. Un razonamiento similar puede aplicarse a la oración de Curry κ y a otras oraciones paradójicas.

Hemos visto por qué no puede existir un predicado veritativo transparente en el contexto de la lógica clásica desde una perspectiva modelo-teórica. Veamos esto mismo ahora desde una perspectiva sintáctica.

Teoría de la prueba

Dado que en los próximos capítulos quiero discutir algunas soluciones subestructurales a las paradojas, resulta conveniente presentar CL por medio de un cálculo de secuentes (para la idea general de un cálculo de secuentes, el lector puede consultar [106] y [60]). La razón es que en un cálculo de secuentes las propiedades estructurales de la relación de consecuencia se hacen explícitas, mientras que en otras presentaciones, como las que utilizan sistemas de deducción natural o cálculos axiomáticos, estas propiedades están generalmente implícitas (diré más sobre esto a continuación).

Definición El sistema CL[19] para la lógica clásica contiene los siguientes secuentes iniciales y reglas (donde Γ, Δ, Π y Σ son multiconjuntos finitos y ϕ^{At} es cualquier fórmula atómica; además, para las reglas cuantificacionales, sea t cualquier término y a una variable que no ocurre (explícita o implícitamente[20]) en el secuente que es la conclusión de la regla):

Secuentes iniciales

$$\text{Ax}\ \frac{}{\phi^{At} \Rightarrow \phi^{At}}$$

Reglas estructurales

[19] CL es similar a lo habitualmente se denomina LK (el cálculo de secuentes de Gentzen para la lógica clásica). Véase [41], más tarde traducido al inglés en [42].

[20] Esto se necesita porque más tarde voy a introducir un predicado veritativo. La introducción dicho predicado trae complicaciones relacionadas con su interacción con los cuantificadores. Tendré la oportunidad de tocar brevemente esta cuestión más abajo.

$$corte\ \frac{\Gamma \Rightarrow \phi, \Delta \qquad \Gamma, \phi \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta}$$

$$\text{L}W\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \phi \Rightarrow \Delta} \qquad \text{R}W\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \phi, \Delta}$$

$$\text{L}C\ \frac{\Gamma, \phi, \phi \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \phi \Rightarrow \Delta} \qquad \text{R}C\ \frac{\Gamma \Rightarrow \phi, \phi, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \phi, \Delta}$$

Reglas operacionales

$$\text{L}\neg\ \frac{\Gamma \Rightarrow \phi, \Delta}{\Gamma, \neg\phi \Rightarrow \Delta} \qquad \text{R}\neg\ \frac{\Gamma, \phi \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \neg\phi, \Delta}$$

$$\text{L}\wedge\ \frac{\Gamma, \phi \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \phi \wedge \psi \Rightarrow \Delta} \qquad \text{R}\wedge\ \frac{\Gamma \Rightarrow \phi, \Delta \qquad \Gamma \Rightarrow \psi, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \phi \wedge \psi, \Delta}$$

$$\text{L}\wedge\ \frac{\Gamma, \psi \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \phi \wedge \psi \Rightarrow \Delta} \qquad \text{R}\vee\ \frac{\Gamma \Rightarrow \phi, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \phi \vee \psi, \Delta}$$

$$\text{L}\vee\ \frac{\Gamma, \phi \Rightarrow \Delta \qquad \Gamma, \psi \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \phi \vee \psi \Rightarrow \Delta} \qquad \text{R}\vee\ \frac{\Gamma \Rightarrow \psi, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \phi \vee \psi, \Delta}$$

$$\text{L}\exists\ \frac{\Gamma, \phi(a) \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \exists x\phi \Rightarrow \Delta} \qquad \text{R}\exists\ \frac{\Gamma \Rightarrow \phi(t), \Delta}{\Gamma \Rightarrow \exists x\phi, \Delta}$$

Haré cuatro observaciones sobre CL. En primer lugar, CL puede presentarse de una forma ligeramente diferente. Por ejemplo, en lugar del par de reglas L$\wedge$ y el par de reglas R$\vee$, podemos introducir las siguientes reglas:

$$\text{L}\wedge\ \frac{\Gamma, \phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \phi \wedge \psi \Rightarrow \Delta} \qquad \text{R}\vee\ \frac{\Gamma \Rightarrow \phi, \psi, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \phi \vee \psi, \Delta}$$

Y en lugar de las reglas *de contexto compartido* L$\vee$ y R$\wedge$, podemos introducir las siguiente reglas *de contexto no compartido*:

$$\text{L}\vee\ \frac{\Gamma, \phi \Rightarrow \Delta \qquad \Pi, \psi \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \Pi, \phi \vee \psi \Rightarrow \Delta, \Sigma} \qquad \text{R}\wedge\ \frac{\Gamma \Rightarrow \phi, \Delta \qquad \Pi \Rightarrow \psi, \Sigma}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \phi \wedge \psi, \Delta, \Sigma}$$

Dada la presencia de las reglas estructurales de monotonía y contracción, ambas presentaciones son equivalentes[21].

En segundo lugar, las reglas para la negación, la conjunción, la disyunción y el cuantificador existencial son suficientes para expresar otras constantes lógicas. Los resultados de interdefinibilidad entre las constantes lógicas se

[21]Diré mucho más sobre este tema en el capítulo 6, donde dichas presentaciones ya no serán equivalentes.

cumplen, por lo que no es preciso tratar a todas las expresiones lógicas como primitivas. Por ejemplo, hemos omitido las reglas para el condicional material $\supset$[22]:

$$\text{L}\supset\ \frac{\Gamma \Rightarrow \phi, \Delta \qquad \Gamma, \psi \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \phi \supset \psi \Rightarrow \Delta} \qquad\qquad \text{R}\supset\ \frac{\Gamma, \phi \Rightarrow \psi, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \phi \supset \psi, \Delta}$$

En tercer lugar, dado que Γ, Δ y demás son multiconjuntos, en lugar de secuencias u otro tipo de estructuras más complejas, el orden en que las fórmulas aparecen no es relevante. Esto quiere decir que no necesitamos incorporar reglas estructurales de conmutatividad o asociatividad.

En cuarto lugar, aunque no las he utilizado hasta aquí, podemos añadir las siguientes reglas (aunque, en realidad, son secuentes iniciales) para las constantes $\top$ y $\bot$:

$$\text{R}\top\ \frac{}{\Rightarrow \top} \qquad\qquad \text{L}\bot\ \frac{}{\bot \Rightarrow}$$

Para los lectores que están más familiarizados con los sistemas de deducción natural, es preciso señalar que en los cálculos de secuentes no hay reglas de eliminación para las expresiones lógicas, sino simplemente reglas de introducción. Sin embargo, la comparación entre las dos presentaciones no es difícil de hacer. Las reglas de introducción a la derecha de un secuente se corresponden con las reglas de introducción de un sistema de deducción natural, mientras que las reglas de introducción a la izquierda de un secuente se corresponden con las reglas de eliminación en deducción natural. Por otra parte, si bien no hay reglas estructurales explícitas en los sistemas de deducción natural, cada regla estructural del cálculo de secuentes se corresponde con una característica del sistema de deducción natural. Por caso, la propiedad de que la regla de corte sea eliminable en un cálculo de secuentes se corresponde con a la propiedad de normalización de las pruebas en deducción natural (véase [106]), la regla de contracción estructural se corresponde con la posibilidad de que una suposición puede ser utilizada más de una vez en una derivación, y la regla de monotonía estructural se corresponde con

[22]Al igual que con L$\vee$ y R$\wedge$, en el cuerpo del texto escogí la versión de L$\supset$ con contexto compartido, pero también hay una versión con contexto no compartido disponible:

$$\text{L}\supset\ \frac{\Gamma \Rightarrow \phi, \Delta \qquad \Pi, \psi \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \Pi, \phi \supset \psi \Rightarrow \Delta, \Sigma}$$

Además, al igual que con R$\vee$ y L$\wedge$, R$\supset$ puede presentarse por medio de dos reglas de la siguiente forma:

$$\text{R}\supset\ \frac{\Gamma, \phi \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \phi \supset \psi, \Delta} \qquad\qquad \text{R}\supset\ \frac{\Gamma \Rightarrow \psi, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \phi \supset \psi, \Delta}$$

la posibilidad de que una suposición puede ser descargada vacuamente en el curso de una derivación. Hay otras relaciones también, pero estas son, según creo, las que debemos tener en cuenta para nuestros propósitos.

A veces se argumenta que los sistemas de deducción naturales son superiores a los cálculos de secuentes porque estos últimos son más engorrosos y difíciles de interpretar. En mi opinión, esto está lejos de la verdad, y de hecho, podemos darle sentido fácilmente a los secuentes siguiendo la línea de [84]. La expresión $\Gamma \Rightarrow \Delta$ equivale a la afirmación de que no debemos aceptar cada miembro de Γ y rechazar cada miembro de Δ. Para oraciones, podemos decir que $\Rightarrow \phi$ significa que debemos aceptar ϕ, y que $\phi \Rightarrow$ significa que debemos rechazar ϕ (o, lo que equivale a lo mismo por ahora, que no debemos aceptarlo).

Como queremos razonar con un predicado de verdad, necesitamos reglas que gobiernen su comportamiento. Voy a usar el nombre CL^+ para el sistema que se obtiene añadiendo las siguientes dos reglas a CL .

Reglas para la verdad

$$\mathrm{L}Tr\,\frac{\Gamma, \phi \Rightarrow \Delta}{\Gamma, Tr\langle\phi\rangle \Rightarrow \Delta} \qquad\qquad \mathrm{R}Tr\,\frac{\Gamma \Rightarrow \phi, \Delta}{\Gamma \Rightarrow Tr\langle\phi\rangle, \Delta}$$

Como ya anticipé, necesitamos tener cuidado con la interacción entre las reglas para la verdad y las reglas cuantificacionales. Considérese la siguiente derivación:

$$\mathrm{L}\exists\,\dfrac{\mathrm{L}Tr\,\dfrac{Ra \Rightarrow Ra}{Ra \Rightarrow Tr\langle Ra\rangle}}{\exists x R(x) \Rightarrow Tr\langle Ra\rangle}$$

La derivación no tiene errores, pero el secuente final es intuitivamente inaceptable[23].

Este es un problema general (hasta donde sé, inadvertido en la bibliografía) que afecta a muchas teorías de la verdad formuladas en un lenguaje de primer orden. De hecho, todo lo que necesitamos para plantear el problema es un cuantificador existencial (universal) que obedezca la regla de L$\exists$ (R$\forall$) y un predicado de verdad que obedezca la regla RTr (LTr). Obviamente, el problema se genera por el dispositivo formador de nombres $\langle\rangle$. La regla L$\exists$ nos dice, por lo general, que el término a no puede ocurrir en el secuente que es la conclusión de la regla. Pero, de hecho, no lo hace, ya que ese término aparece dentro de la expresión $\langle Ra\rangle$. Por lo tanto, no hay ninguna ocurrencia

[23]Existe una derivación dual para el cuantificador universal, en la que obtenemos una prueba de $Tr\langle Ra\rangle \Rightarrow \forall x R(x)$.

real de a en $Tr\langle Ra\rangle$, sino sólo una ocurrencia del término $\langle Ra\rangle$. Es por eso que más arriba exigí que no haya ninguna ocurrencia explícita *o implícita* de a en el secuente que es la conclusión de la regla. Esto significa que a no puede ocurrir de forma explícita y que no puede ser una parte de una fórmula que aparece nombrada, y que no puede ser una parte de una parte de una fórmula que aparece nombrada, y así sucesivamente. Por supuesto, la distinción entre ocurrencias explícitas e implícitas de a debe trazarse de modo riguroso. Puede ser que tengamos expresiones como $Tr\langle Tr\langle Tr...\langle Ra\rangle...\rangle\rangle$, por lo que se necesita una definición general que abarque todos estos casos. Eso no es una tarea fácil. La moraleja, creo, es que tenemos que tener cuidado con la interacción entre las reglas para la verdad y las reglas lógicas que contienen restricciones sobre la ocurrencia de los términos. Este es un asunto delicado que dejaré para otra ocasión. En lo que sigue, voy a trabajar con la distinción informal entre ocurrencias explícitas e implícitas.

Al igual que en la presentación semántica, podemos dar definiciones rigurosas de transparencia (en este caso transparencia sintáctica) e ingenuidad:

Definición Sea $\Gamma \Rightarrow \Delta$ cualquier secuente y sea $\Gamma' \Rightarrow \Delta'$ exactamente como $\Gamma \Rightarrow \Delta$ excepto que (quizás) al menos una ocurrencia de ϕ fue reemplazada por $Tr\langle\phi\rangle$ o viceversa. Diré que una predicado veritativo $Tr(x)$ es *transparente* si y sólo si: $\Gamma \Rightarrow \Delta$ tiene prueba si y sólo si $\Gamma' \Rightarrow \Delta'$ tiene prueba.

Definición Un predicado veritativo es *ingenuo* si y sólo si el secuente $\Rightarrow Tr\langle\phi\rangle \equiv \phi$ tiene prueba.

Al igual que antes, las nociones de ingenuidad y transparencia coinciden. Debe quedar claro que las reglas para la verdad RTr y LTr tienen el propósito de capturar la transparencia de la verdad (y, dado que L$\supset$ y R$\supset$ están disponibles, la ingenuidad de la verdad también). Sin embargo, al igual que en el caso semántico, es posible mostrar que no puede existir un predicado veritativo transparente en el sistema CL, pues la paradoja del mentiroso puede construirse ahora de la siguiente manera :

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$Tr\langle\lambda\rangle \Rightarrow Tr\langle\lambda\rangle$}
\LeftLabel{R$\neg$}
\UnaryInfC{$\Rightarrow \neg Tr\langle\lambda\rangle, Tr\langle\lambda\rangle$}
\LeftLabel{RTr}
\UnaryInfC{$\Rightarrow Tr\langle\lambda\rangle, Tr\langle\lambda\rangle$}
\LeftLabel{RC}
\UnaryInfC{$\Rightarrow Tr\langle\lambda\rangle$}
\AxiomC{$Tr\langle\lambda\rangle \Rightarrow Tr\langle\lambda\rangle$}
\RightLabel{L$\neg$}
\UnaryInfC{$Tr\langle\lambda\rangle, \neg Tr\langle\lambda\rangle \Rightarrow$}
\RightLabel{LTr}
\UnaryInfC{$Tr\langle\lambda\rangle, Tr\langle\lambda\rangle \Rightarrow$}
\RightLabel{LC}
\UnaryInfC{$Tr\langle\lambda\rangle \Rightarrow$}
\LeftLabel{\textit{corte}}
\BinaryInfC{$\Rightarrow$}
\LeftLabel{LW, RW}
\UnaryInfC{$\phi \Rightarrow \psi$}
\end{prooftree}
$$

Esto demuestra, por supuesto, que CL$^+$ es trivial. Una característica interesante de esta presentación en términos de secuentes es que ahora está muy claro cuáles son nuestras opciones para enfrentar la paradoja. Si la lógica clásica no está en cuestión, al menos una de las reglas LTr o RTr tiene que abandonarse. Por ende, los que estén deseosos de mantener el concepto de verdad transparente, deberán estar dispuesto a revisar la lógica clásica. Eso significa rechazar alguno de los otros pasos de la derivación. Los teóricos paracompletos normalmente rechazan el paso obtenido por R$\neg$, mientras que los teóricos paraconsistentes típicamente rechazan el paso obtenido por medio de L$\neg$. Téngase en cuenta que la ausencia de R$\neg$ implica que no podemos afirmar en general que $\phi \vee \neg\phi$, mientras que la ausencia de L$\neg$ implica que no podemos rechazar en general $\phi \wedge \neg\phi$.

Esto agota las opciones operacionales. La derivación todavía puede ser bloqueada modificando las propiedades estructurales de la relación de consecuencia. Los teóricos no contractivos normalmente rechazarán al menos uno de los pasos obtenidos por RC y LC. Esto significa que mientras que $\lambda, \lambda \Rightarrow$ $(\ \Rightarrow \lambda, \lambda)$ se cumple, no es el caso que $\lambda \Rightarrow$ $(\ \Rightarrow \lambda)$ se cumpla. Los teóricos no transitivos rechazarán el paso donde se corta λ. Más específicamente, afirmarán que si bien es cierto que $\Rightarrow \lambda$ y $\lambda \Rightarrow$, no podemos eliminar λ, por lo que el secuente vacío no se puede obtener[24].

Voy a dejar la paradoja del mentiroso por ahora[25]. Otra forma de mostrar que la noción de verdad no puede ser transparente en la lógica clásica es por medio de la paradoja de Curry. En esta presentación, la paradoja de la Curry se puede construir de la siguiente forma:

$$
\dfrac{
  \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{Tr\langle\kappa\rangle \Rightarrow Tr\langle\kappa\rangle \qquad \psi \Rightarrow \psi}{Tr\langle\kappa\rangle \supset \psi, Tr\langle\kappa\rangle \Rightarrow \psi}\ \mathrm{L}\supset}{Tr\langle\kappa\rangle, Tr\langle\kappa\rangle \Rightarrow \psi}\ \mathrm{L}Tr}{Tr\langle\kappa\rangle \Rightarrow \psi}\ \mathrm{L}C}{\Rightarrow Tr\langle\kappa\rangle \supset \psi}\ \mathrm{R}\supset}{\Rightarrow Tr\langle\kappa\rangle}\ \mathrm{R}Tr
  \qquad
  \dfrac{\vdots}{Tr\langle\kappa\rangle \Rightarrow \psi}
}{
  \dfrac{\Rightarrow \psi}{\phi \Rightarrow \psi}\ \mathrm{L}W
}\ corte
$$

Como en el caso de la paradoja del mentiroso, si la verdad se mantiene ingenua, entonces la lógica tiene que ser revisada. Las opciones operacionales son ahora diferentes. Usar una negación no clásica será inútil en este caso,

[24]Como señalé anteriormente, no estoy considerando aquí otras opciones que podrían estar disponibles, como el rechazo monotonía o reflexividad.

[25]Aunque aquí estoy concentrándome sobre todo en el concepto la verdad, el menú de opciones proporcionado también está disponible para otras paradojas autorreferenciales, tanto semánticas (e.g. las que involucran las nociones de satisfacción o denotación) como no semánticas (e.g. las que involucran conceptos modales, epistémicos o conjuntistas).

puesto que la paradoja no hace uso de ninguna negación[26]. Debemos rechazar alguna de las reglas del condicional, R$\supset$ o L$\supset$. La opción más popular es rechazar R$\supset$, ya que sin L$\supset$ *modus ponens* no puede probarse.

Las opciones estructurales son en su mayoría como antes, pero hay una diferencia importante. Rechazar monotonía ya no parece ser una opción, porque $\Rightarrow \psi$ se obtuvo sin su ayuda. Si bien es cierto que necesitamos LW para probar que todos los *argumento* son válidos, LW no es necesaria para demostrar que todos las *oraciones* son válidas, y esto ya es bastante malo. Por lo tanto, si bien podría ser factible abogar por una solución a la paradoja del mentiroso en la que la regla de monotonía no sea aceptable, una de las lecciones de la paradoja de Curry es que esto no va a ser útil en general[27].

Antes de seguir adelante, voy a considerar una paradoja que no involucra el predicado veritativo. Como hemos visto, las paradojas de la verdad siempre hacen uso de alguna conectiva lógica. Por ejemplo, la negación se usa en la paradoja del mentiroso. Las teorías paracompletas y las paraconsistentes hacen frente a esta paradoja mediante la modificación del comportamiento de la negación clásica. La paradoja de Curry, por su parte, es una paradoja que involucra un condicional. Las teorías paracompletas y las paraconsistentes, en este caso, resuelven esta paradoja (típicamente) mediante la introducción de un nuevo condicional (primitivo) diferente del condicional clásico. En la parte final de esta sección voy a echar un vistazo a la paradoja de la validez, una paradoja que no involucra ninguna conectiva.

Varios autores (véase, por ejemplo, [96], [88] y [112]) han argumentado recientemente que las teorías paracompletas y paraconsistentes habituales no están equipadas adecuadamente para hacer frente a esta paradoja. La paradoja es similar en espíritu a las paradojas de la verdad y, en particular, es estructuralmente similar a la paradoja de Curry (después de todo, tanto el condicional y como el predicado de validez son, en cierto modo, tipos de implicaciones), pero, como no involucra conectivas, los enfoques operacionales parecen indefensos ante esta paradoja.

Una manera de presentar la paradoja es diciendo que así como es deseable tener un concepto ingenuo de verdad, también podría ser deseable tener un concepto ingenuo de validez. Informalmente, diré que el concepto de validez es ingenuo si, dada una teoría, un argumento es válido en dicha teoría si y sólo si podemos afirmar, en la teoría, que dicho argumento es válido. De modo que el concepto de validez es ingenuo para una cierta teoría si la teoría

[26] Por supuesto, si el condicional se define en términos de la negación y la disyunción, la paradoja puede ser bloqueada. Pero más tarde veremos por qué no parece conveniente definir el condicional de esta manera en teorías con una negación no clásica.

[27] Además, aquellos que rechacen monotonía estructural deben dar una explicación de por qué el secuente $\Rightarrow$ es aceptable mientras que $\phi \Rightarrow \psi$ no lo es.

es capaz de expresar y probar la validez de sus propias inferencias.

¿Por qué es deseable tener un predicado para representar el concepto ingenuo de validez? Si bien hay razones conocidas (véanse las próximas dos secciones) para pensar que es deseable tener una teoría que sea semánticamente cerrada, en el sentido de que todos los conceptos semánticos (como verdad, satisfacción, etc.) sean capturados por esa teoría, ¿deberíamos demandar también que nuestras teorías sean además lógicamente cerradas, en el sentido de que todos los conceptos lógicos (como validez, consistencia, etc.) sean capturados por nuestras teorías?[28] La cuestión es, en cierto sentido, meramente verbal. Si tomamos a la validez como un concepto semántico, entonces la exigencia de cierre semántico ya exige que el concepto de validez tenga que ser representado. Sólo para ser claro, me abstendré de utilizar el término 'lógicamente cerrado' en este sentido, y voy a decir que una teoría está cerrada semánticamente sólo si capta correctamente las nociones de verdad, satisfacción, denotación, pero también validez, consistencia, inconsistencia, etc.

Ahora bien, el mismo tipo de consideraciones que nos llevan a exigir un concepto ingenuo de verdad pueden llevarnos también a exigir un concepto ingenuo de validez[29]. Por un lado, es deseable tener un predicado de validez ingenuo en el lenguaje porque nuestro lenguaje formal debería ser, como Fitch [39] observó, una formalización del lenguaje que en última instancia deberíamos utilizar. En la terminología de Kripke [54], la visión ingenua se opone al enfoque ortodoxo, en el que el metalenguaje es "esencialmente más rico" que el lenguaje objeto para el que se da la definición de validez. La analogía con las teorías ingenuas de la verdad es difícil de pasar por alto. Como en el caso de las teorías de la verdad, una teoría ingenua de la validez intenta representar con precisión su propio concepto de validez sin ser forzada a subir una escalera interminable de metalenguajes formales, siguiendo la metáfora de Fitch.

Otra motivación para desear un predicado que represente el concepto ingenuo de validez es proporcionada por Shapiro en [95]. Allí se argumenta

---

[28] Hasta donde sé, este uso de 'lógicamente cerrado' viene de [112].

[29] En ocasiones he escuchado el argumento según el cual, a diferencia de las conectivas usuales, la validez es un concepto puramente técnico sin un correlato intuitivo en lenguaje natural. Pero esto no parece razonable. No es raro escuchar que hablantes ordinarios expresen cosas como "esto se sigue de aquello" o "tal o cual razonamiento es aceptable", lo que *prima facie* significa que hay algún concepto intuitivo allí. Tal vez lo que se quiere decir no es que no existe un concepto intuitivo en el lenguaje natural para la validez, pero que dicho concepto se reduce a los conceptos correspondientes a las conectivas. Sin embargo, aún esto es difícil de sostener, ya que las propiedades estructurales de la relación validez -como la transitividad o la reflexividad- son completamente independientes de las conectivas.

que un predicado de validez ingenuo es necesario para el propósito de expresar generalizaciones restringidas (al igual que con verdad). De hecho, para un deflacionista duro sobre la validez este sería la única razón para tener un predicado de validez en el lenguaje. Por ejemplo, tal como se necesita el predicado de verdad para expresar afirmaciones como *todo lo que el Papa dijo es verdadero* (véase la sección 1.4), se necesita el predicado de validez para expresar afirmaciones como *todos los argumentos esgrimidos por el Papa son válidos*, donde tal vez el hablante quizás no tiene ni idea de cuáles fueron esos argumentos (después de todo, alguien que toma al Papa por alguien infalible respecto de la verdad, puede tomarlo también como infalible respecto de la lógica).

Sin embargo, al igual que en el caso de las teorías ingenuas de la verdad, las teorías ingenuas de la validez son riesgosas: existen paradojas de la validez que deben evitarse. Es sabido cómo generar una paradoja de este tipo. Un predicado diádico de validez $Val(x, y)$[30] para una teoría $\mathcal{T}$ es ingenuo si representa con precisión lo que la teoría $\mathcal{T}$ declara como válido. Es decir, para cada argumento de ϕ a ψ declarado válido por $\mathcal{T}$, hay una prueba en $\mathcal{T}$ de la afirmación $Val(\langle\phi\rangle, \langle\psi\rangle)$, y viceversa. Por lo general, se dice que un predicado de este tipo satisface las reglas de separación de la validez (“*Validity detachment*”) (LVal) y prueba de la validez (“*Validity proof*”) (RVal)[31]. Intuitivamente, LVal expresa la idea de que cada vez que ϕ y $Val(\langle\phi\rangle, \langle\psi\rangle)$ se cumplen, $\mathcal{T}$ nos asegura que ψ también se cumple, mientras que RVal expresa la idea de que si ϕ implica ψ en $\mathcal{T}$, entonces $\mathcal{T}$ implica $Val(\langle\phi\rangle, \langle\psi\rangle)$.

$$\mathrm{R}Val\,\frac{\phi \Rightarrow \psi}{\Rightarrow Val(\langle\phi\rangle, \langle\psi\rangle)}$$

$$\mathrm{L}Val\,\frac{}{Val(\langle\phi\rangle, \langle\psi\rangle), \phi \Rightarrow \psi}$$

Tal como fue formulada, LVal puede verse como una regla de 0 premisas. A veces, en cambio, LVal se presenta así

$$\mathrm{L}Val\,\frac{\Rightarrow Val(\langle\phi\rangle, \langle\psi\rangle) \qquad \Rightarrow \phi}{\Rightarrow \psi}$$

[30]Para simplificar la discusión que sigue representamos la noción de validez por medio de un predicado diádico. No hace falta decir que nada importante depende de esto. Los argumentos con más de una premisa y/o más de una conclusión pueden ser emulados utilizando conjunciones y disyunciones, respectivamente.

[31]A veces, estas reglas son etiquetadas como VD y VP, respectivamente. Pero como trabajaré principalmente con cálculos de secuentes, el etiquetado ‘derecha-izquierda’ parece más apropiado.

Sin embargo, esta versión de LVal es simplemente una variante de la regla de corte. Dado que más adelante discutiré un enfoque donde se abandona la regla de corte, se conveniente que utilicemos la primera versión. Otra versión que LVal que podemos considerar es:

$$\mathrm{L}Val\,\dfrac{\Gamma \Rightarrow \phi, \Delta \qquad \Pi, \psi \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \Pi, Val(\langle\phi\rangle, \langle\psi\rangle) \Rightarrow \Delta, \Sigma}$$

No hay ningún inconveniente con esta versión de la regla, pero para obtener la paradoja de la validez será suficiente utilizar la primera versión, la cual es más débil.

La mayor parte de las teorías formuladas en un lenguaje capaz de expresar oraciones autorreferenciales son triviales si satisfacen LVal y RVal. En tales teorías, es posible construir una oración que dice de sí misma que implica algo absurdo. Esta oración es responsable por lo que suele conocerse como la 'paradoja de la validez', a veces también llamada 'paradoja v-Curry', por su semejanza con la paradoja de Curry[32]. Sea $\perp$ una oración absurda y sea π la oración $Val(\langle\pi\rangle, \langle\perp\rangle)$, es decir, una oración que afirma de sí misma que implica $\perp$. Entonces, podemos razonar de la siguiente manera :

$$corte\,\dfrac{\mathrm{R}Val\,\dfrac{\mathrm{L}C\,\dfrac{\mathrm{L}Val\,\dfrac{}{\pi, Val(\langle\pi\rangle, \langle\perp\rangle) \Rightarrow \perp}}{\pi \Rightarrow \perp}}{\Rightarrow \pi} \qquad \dfrac{\vdots}{\pi \Rightarrow \perp}}{\Rightarrow \perp}$$

Lo que hace que esta paradoja sea diferente de, digamos, la de Curry o la del mentiroso, es que, al menos en algunas versiones, no hace uso de reglas operacionales. Así, por ejemplo, la ley de tercero excluido, la regla de explosión, *modus ponens*, prueba condicional, y otros principios que a veces son rechazados para evitar las paradojas habituales no juegan ningún papel en la derivación de esta paradoja. Así, se reducen nuestras opciones a la hora de revisar la lógica para evitar esta paradoja. Si se mantiene la validez ingenua, entonces debemos rechazar o bien la regla de contracción estructural o la regla de corte.

Es claro entonces que esta paradoja afecta en particular a los enfoques paracompletos y paraconsistentes que buscan representar conceptos ingenuos debilitando la lógica subyacente[33].

[32] Para una presentación moderna de la paradoja, consúltese [20].

[33] Debo decir, sin embargo, que esto no está fuera de toda controversia. Por ejemplo, tanto [29] como [52] señalan que si la validez se entiende como validez puramente lógica, entonces dicho concepto puede representarse dentro de cualquier teoría aritmética suficientemente fuerte, lo que significa que no hay ninguna paradoja de la validez lógica (asumiendo la

Una cuestión relacionada es que las teorías paracompletas y paraconsistentes estándar no pueden probar, so pena de la trivialidad, que si un argumento es válido, entonces preserva verdad de premisas a conclusión. Así que, aunque la validez se define como preservación de verdad, la teoría no puede validar la afirmación que expresa ese hecho. Más formalmente, lo que las teorías paracompletas y paraconsistentes no prueban (y no pueden probar) es
$Val(\langle\phi\rangle, \langle\psi\rangle) \Rightarrow Tr\langle\phi\rangle \rightarrow Tr\langle\psi\rangle$.
La razón es simple. Sea ϕ la oración de Curry κ y sea ψ la oración $\bot$. Entonces, utilizando L$\rightarrow$, una regla típicamente válida en teorías paracompletas y paraconsistentes, la definición de κ y las reglas para $Tr(x)$, podemos obtener fácilmente
$\kappa \Rightarrow \bot$,
y luego por RVal
$\Rightarrow Val(\langle\kappa\rangle, \langle\bot\rangle)$.
Si tuviéramos una prueba de la afirmación de que los argumentos válidos son preservadores de verdad, esto es, de
$Val(\langle\kappa\rangle, \langle\bot\rangle) \Rightarrow Tr\langle\kappa\rangle \rightarrow Tr\langle\bot\rangle$.
una aplicación de la regla de corte es suficiente para obtener
$\Rightarrow Tr\langle\kappa\rangle \rightarrow Tr\langle\bot\rangle$.
Pero esto es equivalente a $\Rightarrow Tr\langle\kappa\rangle$, y en ese caso podríamos inferir $\Rightarrow \bot$.

Ahora bien, que las teorías operacionales no sean capaces de probar que los argumentos válidos son preservadores de verdad no es ninguna sorpresa. Dada la validez de la regla *modus ponens*, la *ley* de *modus ponens*, a veces llamada '*pseudo modus ponens*', debe fallar en las teorías paracompletas y paraconsistentes estándar. En otras palabras, lo que falla es el teorema de deducción, y como el lector habrá notado, la afirmación (en el lenguaje objeto) de que los argumentos válidos preservan la verdad equivale a la afirmación de que el teorema de deducción se mantiene, por lo que esta falla era de esperarse. Sin embargo, la paradoja de la validez pone al defensor del enfoque operacional bajo una fuerte presión. Tal como lo veo, hay dos formas alternativas para hacer frente a la paradoja. O se rechaza la idea de que la validez debe comportarse de acuerdo con las reglas RVal y LVal (una idea que consideraré en el capítulo 2) o se desarrolla una noción paracompleta -o quizás una noción paraconsistente- de validez en la que la paradoja de la validez ya no pueda obtenerse (esto será considerado en los capítulos 2 y 6).

consistencia de la aritmética). También en [37] y [33] se sugiere que bajo una cierta forma de entender $Val(x, y)$, LVal falla y, bajo otra forma de entender $Val(x, y)$, RVal falla. Además, Meadows [59] ha mostrado cómo dar una semántica de punto fijo para una teoría paracompleta de la validez ingenua donde ciertas inferencias no son ni válidas ni inválidas. Voy a explorar algunas de estas cuestiones en el capítulo 2

Ambos caminos son interesantes.

En resumen, si la verdad y la validez son nociones ingenuas que han de ser rescatadas de las paradojas, parece que hay cuatro opciones disponibles: las teorías paracompletas, las teorías paraconsistentes, las teorías no contractivas y las teorías no transitivas.

Aún así, podríamos estar eludiendo una pregunta obvia: ¿por qué necesitamos un predicado de verdad ingenuo? En las dos secciones siguientes ofreceré dos argumentos en contra de los enfoques clásicos a las paradojas semánticas. Mi esperanza es que estos argumentos sean suficientes para motivar a un acercamiento a las paradojas donde la verdad se mantenga ingenua. Dado que sólo las teorías no clásicas son capaces de llevar esto a cabo, las teorías clásicas deben rechazarse.

1.4. ¿Por qué necesitamos un predicado veritativo ingenuo?

A veces se dice que la noción ingenua de verdad está conectada con la posición conocida como deflacionismo (acerca de la verdad). El deflacionismo no es fácil de caracterizar. Esto se debe, en gran parte, a que hay muchos puntos de vista que suelen recibir el nombre de 'deflacionismo'. Aún así, puede decirse que todos estos puntos de vista tienen algo en común. Todos ellos afirman que el predicado de verdad no representa ninguna propiedad sustantiva, y que, en consecuencia, para toda oración ϕ, se da que ϕ y ϕ *es verdadera* son equivalentes en algún sentido. Tal vez comparten el mismo contenido semántico, tal vez son intersubstituibles *salva veritate* en todo contexto no intensional, quizás una es afirmable si y sólo si la otra lo es. Los detalles no serán importantes en lo que sigue.

Las teorías no deflacionistas (o, si se quiere "inflacionistas") de la verdad son más complicadas. Un inflacionista podría desear que su teoría capture plenamente la equivalencia entre ϕ y ϕ *es verdadera*, pero no parece haber una conexión fuerte, como sí la hay en la posición deflacionista, entre la concepción inflacionaria de la verdad y la equivalencia entre ϕ y ϕ *es verdadera*. Es perfectamente razonable pensar que algunos casos de la equivalencia fallen para un concepto de verdad no deflacionista.

Sea como fuere, tanto los deflacionistas como los inflacionistas deben notar que algunas teorías no clásicas de la verdad tienen una manera muy fácil de capturar la equivalencia entre ϕ y ϕ *es verdadera*: estas teorías afirman que $\phi \leftrightarrow Tr\langle\phi\rangle$ es una oración válida (para algún bicondicional $\leftrightarrow$ apropiado). Como señala Priest [71], p.41:

> (...) it is difficult to hear this view in a way that does not endorse Tarski's T-schema in full generality.

Los deflacionistas, sin embargo, no utilizan normalmente estas consideraciones para inferir que el predicado de verdad no sirve para nada. Sugieren, en cambio, que aún así necesitamos el predicado veritativo para ciertos fines expresivos. Hay cosas que no son expresables sin él, incluso si no se corresponde con ninguna propiedad sustantiva en el mundo. En particular, el predicado veritativo es necesario para hacer generalizaciones de la siguiente clase[34]:

$$\forall x(\phi(x) \to Tr(x)) \qquad \exists x(\phi(x) \land \neg Tr(x))$$

Es debido a esto que a veces los deflacionistas hablan del predicado de verdad como un dispositivo lingüístico[35].

Ejemplos de esto son fáciles de encontrar. Creo que es más o menos seguro separar estos ejemplos en dos clases. En primer lugar, tenemos *generalizaciones infinitas*, como

todos los teoremas de la aritmética de Peano son verdaderos,

donde se cuantifica sobre un dominio infinito. Puesto que somos seres finitos, no podemos expresar la afirmación de arriba de ninguna otra manera. La aritmética de Peano tiene infinitos teoremas y nuestro lenguaje carece de conjunciones infinitas. De modo que no hay una oración de la forma

$$\phi_1 \land \phi_2 \land \phi_3 \land ....$$

donde ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3,... es una lista de los teoremas de la aritmética.

En segundo lugar, tenemos adscripciones de verdad ciegas, como

todo lo que el Papa Francisco dijo que es verdadero.

En este caso, el problema no radica en el carácter infinitario de la oración, sino en el hecho de que tal vez no sabemos lo que dijo. Un cristiano muy devoto, uno que, de hecho, cree en la infalibilidad del Papa, podría querer afirmar que todo lo que el Papa dijo que es verdadero, aún sin saber exactamente lo que dijo. Una vez más, esto no puede hacerse sin el predicado veritativo.

[34] A veces, los deflacionistas prefieren decir que el predicado de verdad es necesario para expresar acuerdo y desacuerdo. De todas formas, el ser capaz de hacer generalizaciones del tipo que tengo en mente es de hecho una forma de expresar acuerdo y desacuerdo.

[35] Quine fue el primero tal vez, cuando habló de 'la verdad y el ascenso semántico' en [77], pero muchos lo siguieron, siendo el más influyente, a mí parecer, Horwich, sobre todo en [51].

Como el lector puede ver, hay una diferencia importante entre los dos tipos de ejemplos. Para nuestros propósitos, sin embargo, la diferencia no será importante.

En suma, necesitamos el predicado de verdad porque nos permite expresar ciertas afirmaciones generales que de otro modo serían inexpresables. Y no sólo queremos expresar tales afirmaciones, sino también tener una teoría suficientemente potente para razonar con ellas. En lo que sigue voy a sugerir que si el predicado de verdad ha de cumplir con su papel expresivo, la noción de verdad que éste representa deberá ser ingenua. Esa es quizás la idea central detrás de muchas teorías no clásicas de la verdad.

Hasta donde puedo ver, la idea de que el predicado de verdad es un dispositivo lingüístico que debe cumplir con cierto rol expresivo es una idea imprecisa que necesita elaboración, ya que no está claro qué es lo que haría falta para que el predicado de verdad cumpla con dicho rol. Sé de dos maneras diferentes (aunque no excluyentes) de darle más claridad a esta cuestión. La primera de ellas es discutida por Field en [33] y por Beall en [17]. La idea es, básicamente, que tenemos que ser capaces de demostrar una serie de principios que involucran cuantificadores restringidos. La segunda está basada en una propuesta de Picollo & Schindler en [66]. La idea aquí es más precisa: hay que ser capaz de eliminar e introducir los cuantificadores restringidos de una forma adecuada.

En esta sección sólo voy a echar un vistazo a la segunda propuesta (la primera propuesta será analizada en los capítulos 2 y 3). Argumentaré que, contrariamente a lo que sugieren los autores, esta propuesta puede ser utilizada para argumentar a favor de (ciertas) teorías no clásicas de la verdad en las que el predicado veritativo es transparente. La principal diferencia es la siguiente: aunque un predicado de verdad totalmente transparente no es, como ellos afirman, necesario (ni suficiente) para expresar acuerdo y desacuerdo, sí es necesario para expresar, además de eso, desacuerdo *total* y acuerdo *parcial*.

1.4.1. Cumplir con su función generalizadora

La idea principal de Picollo y Schindler es que el predicado veritativo no es más que un dispositivo expresivo y que todo lo que debemos requerir de dicho predicado es que cumpla con su función generalizadora. Más precisamente:

Definición (*Cumplir con su función generalizadora*, véase [66]) Sea $\Gamma \subset \mathcal{L}^+$ una teoría de la verdad y sea $\vdash$ su relación de consecuencia. Diré que el predicado veritativo $Tr(x)$ *cumple con su función generalizadora* en Γ si y sólo si las siguientes dos condiciones se cumplen para cualesquiera fórmulas $\phi(x)$, $\psi \in \mathcal{L}^+$:

1. $\Gamma, \forall x(\phi(x) \rightarrow Tr(x)), \phi\langle\psi\rangle \vdash \psi$ $\quad TE$

2. $\Gamma, \neg\psi, \phi\langle\psi\rangle \vdash \exists x(\phi(x) \wedge \neg Tr(x))$ $\quad TI$ [36]

La primera condición equivale, aproximadamente, a la idea de que el emisor está de acuerdo con lo afirmado. La segunda condición corresponde, también aproximadamente, a la idea de que el emisor está en desacuerdo con lo afirmado. Lo que Picollo y Schindler muestran es que algunas teorías no clásicas ingenuas de la verdad no cumplen con estas condiciones, mientras que algunas teorías clásicas no ingenuas de la verdad sí las cumplen. En particular, si vale la lógica clásica, sólo se necesita el principio Tr-*out* para obtener TE y TI, donde Tr-*out* es $Tr\langle\phi\rangle \rightarrow \phi$. Esto parece ser una muy buena noticia para el lógico clásico, ya que algunas teorías clásicas de la verdad son consistentes con Tr-*out*.

Aunque la definición ofrecida más arriba parece plausible, sugeriré dos enmiendas. En primer lugar, las dos condiciones sólo deben tomarse como condiciones necesarias (no suficientes) para que el predicado de verdad cumpla con su función generalizadora. No es difícil pensar en un predicado de verdad que satisfaga estas dos condiciones y que, a pesar de ello, no cumpla con su función generalizadora en un sentido intuitivo. Por ejemplo, si Γ es una teoría en la que el principio 'si todos son ψs, entonces todo los ϕs son ψs' no se sostiene, la situación parece ser esa. En particular, si suponemos que ψ es $Tr(x)$ y que ϕ es $Sent_\Gamma(x)$ (el conjunto de las oraciones del lenguaje de la teoría Γ), el principio en cuestión se convierte en 'Si todo es verdadero, entonces todas las oraciones del lenguaje de Γ son verdaderas'. Esta afirmación debería ser verdadera, si queremos que el predicado veritativo cumpla con su función generalizadora. Pero la verdad de esta oración no está garantizada por las dos condiciones anteriores. Este es sólo un ejemplo, por supuesto. Hay muchos otros principios que involucran cuantificadores restringidos (y que contienen el predicado de verdad) que podrían fallar a pesar de que el predicado de verdad cumpla con los dos requisitos propuestos.

La segunda enmienda es, creo, más importante. Aunque cualquier predicado de verdad que satisfaga la definición anterior nos permite extraer las conclusiones correctas en contextos en que estamos totalmente de acuerdo con lo afirmado y en contextos en los que estamos parcialmente en desacuerdo con lo afirmado, no llega a decirnos cómo razonar en contextos en los que estamos parcialmente de acuerdo con lo afirmado ni en contextos donde estamos totalmente en desacuerdo con lo afirmado.

Para solucionar esto, propongo reforzar el criterio de la siguiente forma:

[36] He modificado esta segunda condición para hacerla más clara.

Definición Sea $\Gamma \subset \mathcal{L}^+$ una teoría de la verdad y sea $\vdash$ su relación de consecuencia. Diré que el predicado veritativo $Tr(x)$ *cumple con su función generalizadora* en Γ *sólo si*, además de TE y TI, las siguientes dos condiciones se cumplen para cualesquiera fórmulas $\phi(x)$, $\psi \in \mathcal{L}^+$:

3. $\Gamma, \forall x(\phi(x) \to \neg Tr(x)), \phi\langle\psi\rangle \vdash \neg\psi$ $\qquad \neg TE$

4. $\Gamma, \phi\langle\psi\rangle, \psi \vdash \exists x(\phi(x) \wedge Tr(x))$ $\qquad \neg TI$

La tercera condición se corresponde, aproximadamente, con la idea de que el emisor desacuerda *totalmente* con lo afirmado. La cuarta condición se corresponde, también aproximadamente, con la idea de que el emisor acuerda *parcialmente* con lo afirmado. Nótese también que, debido a nuestra primera enmienda, en lugar de 'si y sólo si' ahora sólo tenemos un 'sólo si'.

Es interesante notar que algunas teorías no clásicas de la verdad están a la altura del desafío:

Proposición 1.4.1 *Sea* Γ *una teoría y sea* $\vdash$ *su relación de consecuencia. If* Γ *satisface el esquema T,* modus ponens*,* modus tollens*,* $I\wedge$*,* $E\forall$ *y* $I\exists$*, se sigue que* Γ *satisface nuestras cuatro condiciones.*

Prueba La prueba es sencilla y por eso la omito. ∎

¿Qué ocurre con las teorías clásicas? Así como el principio Tr-*out* parece necesario para que las primeras dos condiciones se cumplan, está lejos de ser evidente cómo las teorías que no satisfacen Tr-*in* (donde, obviamente, Tr-*in* es $\phi \to Tr\langle\phi\rangle$) pueden cumplir con la tercera y la cuarta condición. En otras palabras, se necesitan ambas direcciones del esquema T para que la verdad cumpla con su función generalizadora.

1.4.2. ¿Réplicas?

El lógico clásico podría responder de al menos dos maneras (aunque quizás haya más). La primera es que Tr-*in* no es realmente necesario. Todo lo que necesitamos es el hecho de que Tr y $\neg$ sean conmutables en el siguiente sentido:

$\neg Tr\langle\phi\rangle \to Tr\langle\neg\phi\rangle$[37]

[37] Aquí estoy descuidando un poco la notación. Los puristas notacionales dirán que es mejor escribir esta fórmula como $\neg Tr\langle\phi\rangle \to Tr\langle\underset{\cdot}{\neg}\phi\rangle$, donde $\underset{\cdot}{\neg}$ no es la negación usual sino una función que da como output el código de la fórmula $\neg\phi$ cuando se le da como input el código de ϕ.

El problema con esta respuesta es que, en la lógica clásica, Tr-*out* más el principio $\neg Tr\langle\phi\rangle \rightarrow Tr\langle\neg\phi\rangle$ implican conjuntamente Tr-*in*. Pues supongamos que Tr conmuta con $\neg$, es decir, supongamos que $\neg Tr\langle\phi\rangle \rightarrow Tr\langle\neg\phi\rangle$. Por Tr-*out* también tenemos $Tr\langle\neg\phi\rangle \rightarrow \neg\phi$. Por transitividad obtenemos $\neg Tr\langle\phi\rangle \rightarrow \neg\phi$. Contraponiendo, inferimos $\phi \rightarrow Tr\langle\phi\rangle$. De esto se desprende que la primera respuesta no parece funcionar.

La segunda respuesta es que TE y TI son suficientes para expresar un acuerdo parcial con lo afirmado y también para expresar un desacuerdo total con lo afirmado. En cierto sentido esto es así, ya que en lugar de utilizar $\neg Tr(x)$, siempre podemos utilizar un predicado de falsedad $Tr(\neg x)$, dado que la bivalencia de la lógica clásica nos asegura que algo es falso si y sólo si no es verdadero.

Pero esa respuesta, por desgracia, no puede ser completamente adecuada. Como hemos demostrado, si vale Tr-*out*, $Tr(x)$ y $\neg$ no pueden conmutar. Pues si lo hacen, Tr-*in* podría obtenerse, y las paradojas reaparecerían. Así, dado Tr-*out*, la no-verdad y la falsedad no pueden ser equivalentes. Por lo tanto, hay un sentido en el que Tr-*out* no puede ser suficiente para expresar un acuerdo parcial y un desacuerdo total.

Ahora bien, esto también podría ser un problema para (algunas) teorías no clásicas de la verdad, en particular aquellas que se comprometen con la existencia de categorías semánticas distintas de lo verdadero y lo falso. En algunas de estas teorías, la equivalencia entre $\neg Tr\langle\phi\rangle$ y $Tr\langle\neg\phi\rangle$ es demostrable, por lo que sería inexacto decir que la falta de verdad y la falsedad coinciden. Creo que este es un problema real y voy a volver a él en el capítulo 4. Allí argumentaré que esta dificultad nos da una razón de peso para preferir presentaciones bivalentes de ciertas teorías no clásicas de la verdad. Ahora, sin embargo, pospondré esta cuestión y analizaré un segundo argumento en contra los enfoques clásicos a las paradojas autorreferenciales.

1.5. Muchas paradojas. ¿Una solución?

La tarea de clasificar paradojas es notoriamente problemática. La primera dificultad es que no hay demasiado consenso en lo que respecta a la cuestión de en qué consiste ser una paradoja[38]. Sin tener demasiadas evidencias al respecto, me inclinaría a decir que la mayor parte de los filósofos estarían (al menos parcialmente) de acuerdo con la siguiente definición de Sainsbury (véase [94], p.1):

[38] Véase primer capítulo de [99] para un menú de posibles -pero, en última instancia, defectuosos- intentos de definición.

> This is what I understand by a paradox: an apparently unacceptable conclusion derived by apparently acceptable reasoning from apparently acceptable premises.

Sainsbury luego añade que (p.1) "Appearances have to deceive, since the acceptable cannot lead by acceptable steps to the unacceptable. So, generally, we have a choice: either the conclusion is not really unacceptable, or else the starting point, or the reasoning, has some non-obvious flaw.".

Todo esto es bastante vago, por supuesto. A veces no hay ninguna manera rigurosa de determinar si algún principio de razonamiento es 'aparentemente aceptable' o 'aparentemente inaceptable'. De hecho, es muy común en la práctica filosófica encontrarse situaciones en las que un principio aparentemente aceptable para uno es aparentemente inaceptable para otro, o viceversa.

No es mi objetivo aquí proporcionar una caracterización rigurosa de lo que una paradoja es. Para mis propósitos la caracterización aproximada que se ofreció más arriba será suficiente. Por desgracia, incluso si dejamos de lado la cuestión de lo que cuenta como una paradoja, aún hay una serie de problemas a la hora de clasificar los razonamientos que, de acuerdo con nuestra caracterización vaga, cuentan como paradójicos. Hay tantas cosas diferentes que los filósofos denominan 'paradoja' que es difícil imaginar cómo cualquier cualquier clasificación podría llegar a satisfacer todas las expectativas.

Por supuesto, podría argumentarse que el tener una clasificación no es tan importante. Pero hay fuertes razones para sostener que una clasificación es deseable. La principal es, tal vez, que sin una buena clasificación, no estaríamos en condiciones de decir si dos paradojas deben recibir el mismo tipo de solución. Esta última idea se captura a veces por medio del siguiente principio de solución uniforme (véase, por ejemplo, [70] y [68]):

- *Principio de solución uniforme (PUS)*: si dos paradojas pertenecen a la misma familia, entonces deben recibir el mismo tipo de solución.

En ocasiones, este principio se toma como base para elaborar un argumento en contra de los enfoques clásicos a las paradojas. En estos enfoques, diferentes paradojas suelen recibir diferentes (tipos de) soluciones, aún cuando presentan cierta similitud estructural. En los enfoques no clásicos a las paradojas, ocurre lo contrario. Por lo general, un gran número de paradojas diferentes reciben el mismo tipo de solución, siempre que mantengan cierta semejanza estructural.

Sin embargo, para que el PUS sea la base de un argumento de este tipo, es preciso decir algo más. Esto porque el principio es impreciso en un aspecto. No siempre es obvio cuando dos paradojas pertenecen a la misma familia[39]. Para ver cómo este problema se aplica en casos concretos, daré algunos ejemplos.

Si tomamos el tipo de predicado involucrado en la paradoja (es decir, si se trata de un predicado semántico, epistémico, conjuntista, etc.) como criterio para decidir si diferentes paradojas pertenecen a la misma familia, podemos decir que la paradoja del mentiroso y la paradoja de Curry pertenecen a la misma familia, ya que son ambas paradojas semánticas. Por otra parte, la paradoja del conocedor pertenece a una familia diferente, a la familia de las paradojas epistémicas, dado que el predicado que se utiliza es un predicado epistémico. La paradoja de Russell, a su vez, es una paradoja conjuntista, al igual que la paradoja de Burali-Forti. La paradoja de Montague, en cambio, es una paradoja modal (más específicamente, modal-alética), mientras que la paradoja de la validez es una paradoja lógica, como la paradoja de Hinnion-Libert. La lista podría continuar.

Nótese que este criterio basado en el tópico podría ser defendido por un lógico clásico[40]. Un lógico clásico normalmente se ocupa de la paradoja del mentiroso y de la paradoja de Curry manipulando las reglas vinculadas al predicado veritativo; hace frente a la paradoja del conocedor modificando los principios que gobiernan el predicado de conocimiento; evita la paradoja de Russell restringiendo el comportamiento de la relación de pertenencia, y así sucesivamente.

Sin embargo, esta forma de clasificar las paradojas es altamente inverosímil. En primer lugar, el criterio es demasiado débil en muchos aspectos. Mientras que exige, por ejemplo, que el mentiroso y Curry deben recibir el mismo tipo de solución, no nos obliga a tratar el Mentiroso, la paradoja Conocedor, la paradoja de Montague y la paradoja de Russell de la misma forma, a pesar de su patente similitud estructural. Tampoco nos obliga a tratar a la paradoja de Curry de la misma manera que la paradoja de la validez, de nuevo, a pesar de su similitud estructural.

Por otra parte, si se adopta este criterio, el principio de solución uniforme parece imposible de aplicar en ciertos casos. La paradoja de Sorites es un ejemplo de esto. Los predicados vagos usualmente pertenecen a diferentes áreas temáticas. El predicado *x es de color rojo* y el predicado *x es un adulto* no están relacionados temáticamente. Lo único que parecen tener en común

[39]Quizás hay otro aspecto en el que el PUS es impreciso: no está claro cuando dos soluciones cuentan como siendo del mismo tipo. Sin embargo, creo que esta segunda imprecisión no es demasiado preocupante.

[40]Hace ya un tiempo, Frank Ramsey parece haber adoptado un criterio como éste cuando propuso una división de las paradojas en un grupo A (de paradojas puramente lógicas) y un grupo B (de paradojas empíricas) en [78]. Véase [70] para una serie de críticas devastadoras al enfoque de Ramsey.

es que ambos son susceptibles a razonamientos soríticos.

Un segundo ejemplo, de mayor interés, proviene de las llamadas 'paradojas multimodales'. Las paradojas multimodales son paradojas que involucran dos o más predicados modales (véase, por ejemplo, [45], [38] y [61]). Supongamos que consideramos una paradoja que involucra tanto el concepto de conocimiento como el concepto de necesidad. ¿Cómo debemos clasificar tal paradoja utilizando el criterio temático? Tal vez podríamos decir que es a la vez una paradoja epistémica *y* una paradoja modal-alética. Pero si preguntamos qué principio debemos rechazar para evitar la paradoja, ¿cuál sería la respuesta? ¿Debemos rechazar uno de los principios vinculados a la noción de conocimiento o uno de los principios vinculados a la noción necesidad? No hay una respuesta clara a la vista.

Aunque estos hechos no son suficientes para proporcionar un argumento concluyente en contra de esta forma de clasificar las paradojas, creo que ponen al defensor de este criterio bajo cierta presión.

Un enfoque completamente diferente consiste en considerar no ya el tipo de predicado utilizado para generar la paradoja, sino la estructura de la misma. La idea es, a grandes rasgos, que dos paradojas deben recibir el mismo tipo de solución si son estructuralmente similares. La noción de similitud estructural puede ser precisada de varias formas distintas. Una que de inmediato viene a la mente se basa en la idea de circularidad o autorreferencia. Podemos exigir tentativamente que todas las paradojas autorreferenciales deben recibir el mismo tipo de solución. Esta idea parece estar bien a primera vista. Sin embargo, un análisis más sutil revela que hay una serie de complicaciones. Por ejemplo, algunos filósofos creen que el mentiroso y la paradoja de Sorites pertenecen a la misma familia y por lo tanto que deben tratarse de la misma forma, aún cuando esta última paradoja no involucra elementos autorreferenciales en absoluto.

En segundo lugar, hay quienes piensan que no todas las paradojas autorreferenciales son estructuralmente similares. Si bien es cierto que todas ellas utilizan alguna oración que expresa algo acerca de sí misma (o un conjunto de oraciones que expresan cosas sobre otras oraciones en el conjunto), esto no parece ser siempre suficiente para declararlas estructuralmente similares. Por ejemplo, la paradoja del mentiroso, la de Russell, la del Conocedor, etc. conducen todas ellas a una contradicción, esto es, a una afirmación de la forma ϕ *y no* ϕ. Pero todas estas paradojas tienen su "versión Curry". Es decir, así como existe una paradoja de Curry para la noción de verdad, también hay paradojas tipo-Curry para la noción de pertenencia, la noción de conocimiento, la de necesidad, etc. Estas paradojas tipo-Curry no sólo conducen a una contradicción, sino que conducen a la trivialidad. Por todo lo que hemos dicho hasta ahora, nada impide que consideremos esto como una diferencia estructural. Replicar que esto no es así sugiriendo que las paradojas del primer grupo también conducen a una trivialidad no es una opción, ya que equivaldría a una petición de principio en contra de aquellos que no creen que las contradicciones impliquen cualquier cosa.

En tercer lugar, hay una familia de paradojas para las que no está del todo claro si son autorreferenciales o no lo son. Estoy pensando en paradojas como la de Yablo (véase, por ejemplo, [109], [65], [9]). Esta paradoja consiste en una lista infinita de oraciones tales que cada una afirma que todas las que le siguen en la lista no son verdaderas. Ha habido un cierto debate en torno a la aparente falta de circularidad de esta paradoja. Algunos creen que es tan circular como la del mentiroso (por ejemplo, [69]), mientras que otros piensan que ella (o alguna versión modificada de ella) carece de cualquier tipo de circularidad (por ejemplo, [29]).

Una forma de elucidar la noción de similitud estructural diferente y más rigurosa fue ofrecida por Priest. Priest propuso su -ya célebre- esquema de clausura ('*inclousure schema*'). La idea es que todas las paradojas que puedan capturarse por medio de este esquema pertenecen a la misma familia y, por lo tanto, deben recibir el mismo tipo de solución. El esquema de clausura puede caracterizarse como sigue:

Definición (*El esquema de clausura*, véase [70] o [68]) Sean $\phi(x)$ y $\psi(x)$ propiedades y sea $f(x)$ una función. Cualquier Ω que satisfaga las siguientes condiciones es una *clausura*:

1. $\Omega = \{y : \phi(y)\}$ existe, y $\psi(\Omega)$
2. si x es un subconjunto de Ω tal que $\psi(x)$:
   a) $f(x) \notin x$
   b) $f(x) \in \Omega$

No es difícil ver que estas condiciones implican una contradicción si estipulamos que $x = \Omega$: $f(\Omega) \notin \Omega$ y $f(\Omega) \in \Omega$. Ofreceré un par de ejemplos para mostrar como el esquema de clausura funciona para paradojas específicas.

Ejemplo (*La paradoja del mentiroso*) La paradoja del mentiroso se ajusta al esquema de clausura. Para ver esto, sea $\phi(x)$ el predicado *x es verdadero* y $\psi(x)$ el predicado *x es definible*. Además, sea $\Omega = TR$, donde TR es el conjunto de las oraciones verdaderas, y por último, si a es cualquier conjunto definible, sea $f(a) = \alpha$, donde $\alpha = \langle \alpha \notin a \rangle$ (es decir, α dice que α no es miembro de a). Al hacer que a sea un subconjunto de TR, la función $f(a)$ nos permite construir una oración que dice de sí misma que no pertenece a

TR, es decir, una oración que dice de sí misma que no es verdadera. Podemos ver que la condición 2.(a) es satisfecha de la siguiente manera. Supongamos que el conjunto a es definible y que $a \subseteq TR$. Entonces si $f(a) \in a$, podemos inferir que $\langle \alpha \notin a \rangle \in a$. Dado que $a \subseteq TR$, tenemos $\langle \alpha \notin a \rangle \in TR$. Por el esquema T, $\alpha \notin a$, y luego $f(a) \notin a$. De modo que la condición 2.(a) se satisface. Para la condición 2.(b), nótese que una vez que tenemos $f(a) \notin a$, podemos obtener $\alpha \notin a$, lo cual, por el esquema T, nos da $\langle \alpha \notin a \rangle \in TR$. Luego, $f(a) \in TR$. Por lo tanto, la condición 3.(b) también se satisface. La condición 1. se cumple porque podemos asumir que el conjunto de todas las oraciones verdaderas existe y es definible. Se sigue que TR es una clausura.

Un razonamiento similar puede utilizarse para mostrar que otras paradojas semánticas (como las relacionadas con pares de mentirosos o las que involucran un predicado diádico de satisfacción) también encajan en el esquema de clausura. En cuanto a las paradojas no semánticas de estructura similar a la del mentiroso, el razonamiento para mostrar que se ajustan al esquema de clausura es análogo al que ofrecimos más arriba. Por ejemplo, es posible mostrar que la paradoja del conocedor y la paradoja de Montague encajan en el esquema. Lo mismo es cierto de la paradoja de Russell y otras paradojas conjuntistas, como la de Burali-Forti y la de Mirimanoff. Además, las paradojas de la definibilidad, como la de Berry, la de König, la de Richard, etc., también encajan en el esquema, aunque en algunos de estos casos es necesario elegir cuidadosamente la propiedad $\psi(x)$.

El esquema de clausura puede utilizarse para argumentar en contra de los enfoques clásicos a las paradojas. Es usual que el lógico clásico trate diferentes paradojas mediante el uso de diferentes herramientas. Por ejemplo, para hacer frente a las paradojas conjuntistas, lo que suele hacer es negar la existencia del conjunto que lleva a la paradoja, mientras que evita las paradojas de la verdad mediante la restricción de la esquema T. El problema con esta estrategia es que si estas paradojas pertenecen a la misma familia, entonces deben ser tratadas de la misma manera. Esto no es posible en un marco clásico. Como Priest ([68], p.33) señala:

> Hence, the PUS, in conjunction with the main result of this paper [i.e. that the paradoxes of self-reference have a common structure], is sufficient to sink virtually all orthodox solutions to the paradoxes

Hemos visto que muchas paradojas diferentes encajan en el esquema de clausura. De modo que una pregunta natural es si dicho esquema captura todos los casos esperados. La cuestión es controversial. Priest ha señalado en varias ocasiones que la paradoja de Curry no encaja en el esquema de clausura[41]. Recientemente, Beall ha argumentado que la paradoja de Curry, entendida como una oración κ de la forma $Tr\langle\kappa\rangle \to \bot$, encaja en el esquema. El razonamiento es el siguiente (véase [19]).

Sea $\phi(x)$ el predicado x *es verdadera*, $\psi(x)$ el predicado x *es definible*, y sea $f(x) = s$, donde s es una oración de la forma $< s \in \dot{x} \to \bot >$ ($\dot{x}$ es un nombre para x). Se sigue que Ω es $\{x : x \text{ es verdadera}\}$. Ahora consideremos algún x tal que $x \subseteq \Omega$, $\psi(x)$ y $f(x) = s$. Supongamos que $s \in x$. Luego, dado que $x \subseteq \Omega$, sabemos que s es verdadera. El esquema T nos da, entonces, $s \in \dot{x} \to \bot$, y por *modus ponens* podemos inferir $\bot$. Por ende, podemos descargar la suposición y obtener el condicional $s \in \dot{x} \to \bot$. Una vez más, es posible usar el esquema T para obtener la afirmación de que s es verdadera. Por la definición de Ω, $s \in \Omega$. (Esta es la condición 2.(b)). Pero, ya que $s \in \dot{x} \to \bot$, estamos en condiciones de inferir que $s \in \dot{x} \to \bot \in \Omega$. Por contraposición, $s \notin \dot{x}$. (Esta es la condición 2.(a)). Una contradicción emerge si estipulamos que $x = \Omega$, pues luego tenemos $s \in \Omega$ y $s \notin \Omega$.

¿Hay algún error en este argumento? Bueno, en realidad no. Lo que ocurre es que Beall utiliza una instancia de la paradoja de Curry en la cual el consecuente es la oración $\bot$. Esto es crucial para que la paradoja encaje en el esquema de clausura. En [28], varios defensores del esquema de clausura han replicado a la objeción de Beall apelando a eso. La paradoja de Curry es una oración κ cuya forma es $Tr\langle\kappa\rangle \to \phi$, donde ϕ es una oración cualquiera. Esta versión esquemática de la paradoja de Curry no encaja en el esquema de clausura, ya que el paso final del razonamiento previo no esta disponible. Si ϕ es, por ejemplo, una oración verdadera, no es posible aplicar contraposición.

Beall ha replicado, convincentemente en mi opinión, señalando que si son esquemas de oración, y no oraciones particulares, las que encajan (o no encajan) en el esquema de clausura, entonces tenemos problemas aún más graves. Pues si la versión esquemática de la paradoja de Curry no encaja en el esquema mientras que la oración del mentiroso sí lo hace, habrá versiones disyuntivas esquemáticas de la oración del mentiroso que, en este sentido, se comportan exactamente como la versión esquemática de la paradoja de Curry. Consideremos un mentiroso disyuntivo λ^D de la forma $\neg Tr\langle\lambda^D\rangle \vee \phi$, donde ϕ puede ser cualquier oración. Por supuesto, hay instancias de este esquema que encajan en el esquema de clausura, e.g. la instancia en la que ϕ es $\bot$. ¿Pero qué ocurre si ϕ es una oración verdadera? En ese caso, la

[41]Esto es cierto siempre que $\phi \to \psi$ no sea equivalente a $\neg\phi \vee \psi$. De lo contrario, la paradoja de Curry es sólo una versión disyuntiva de la paradoja del mentiroso, lo cual significaría que se ajusta al esquema de clausura igual que la paradoja del mentiroso. Priest también ha observado que hay otras paradojas que no encajan en el esquema, como la paradoja del examen sorpresa, pero no hay espacio para desarrollar esta cuestión aquí.

situación es idéntica a la que teníamos con la oración de Curry.

Parafraseando a Beall, parece que tenemos un dilema. Si el esquema de clausura debe aplicarse a oraciones particulares, entonces la oración de Curry con $\perp$ se ajusta al esquema. Si el esquema de clausura debe aplicarse a esquemas de oración, entonces existen versiones disyuntivas de la oración del mentiroso que no se ajustan al esquema. Ambas opciones distan de ser atractivas para aquellos que defienden el esquema de clausura *y al mismo tiempo* la tesis de que la paradoja del mentiroso y la paradoja de Curry son fenómenos distintos.

Finalizaré este capítulo con otro dilema. Si, sea cual fuere la razón, somos de la opinión de que el mentiroso y Curry son estructuralmente diferentes, entonces, en virtud del resultado al que aludimos previamente, deberemos rechazar el esquema de clausura como el método correcto se diferenciar paradojas estructuralmente distintas. Sin embargo, si carecemos de una opinión previa acerca de la cuestión de si el mentiroso y Curry pertenecen a la misma familia, entonces deberíamos tomar el resultado anterior como un argumento a favor de la tesis de que ambas paradojas deben recibir el mismo tipo de solución.

En cualquier caso, el punto central de esta sección no era ofrecer argumentos sutiles relacionados con la posible diferencia estructural entre el mentiroso y Curry sino ofrecer un argumento general en contra de los enfoques clásicos. Independientemente de los posibles problemas del esquema de clausura, la plausibilidad del PUS junto con la idea de que muchas de las paradojas que vimos son estructuralmente similares, nos dan un argumento de este tipo. El argumento, en mi opinión, no hace sólo eso sino que, al mismo tiempo, le da apoyo a los enfoques no clásicos. Mientras que en el enfoque clásico necesitamos desarrollar respuestas muy diferentes ante paradojas muy similares, los enfoques no clásicos son más perspicuos. Hacen frente a muchas paradojas usando el mismo tipo de solución.

Parte II

Enfoques operacionales

Capítulo 2

Teorías paracompletas

2.1. Las paradojas semánticas y la ley de tercero excluído

Existen varias razones para pensar que ciertas oraciones ϕ deben rechazarse sin que eso implique que debamos aceptar sus correspondientes negaciones. Esto es, algunas oraciones deben ser rechazadas junto con sus negaciones. A veces esta idea se captura sosteniendo que la ley de tercero excluido es inválida. En otros términos, se argumenta que la afirmación ϕ *o no* ϕ en ocasiones no se cumple. Aquí sólo estoy interesado en considerar aquellas razones vinculadas con la presencia de oraciones paradójicas que incluyen algún predicado semántico[1]. Es por la existencia de estas oraciones que solamente las lógicas no clásicas pueden contener un predicado veritativo ingenuo. Por supuesto, no cualquier lógica no clásica servirá. Como mencioné en la introducción, uno de los principios que juega un papel en la paradoja del mentiroso y en otras paradojas similares es la ley de tercero excluido. Por tanto, en este capítulo consideraré algunas lógicas que rechazan esta ley.

La principal motivación para rechazar esta ley viene del siguiente razonamiento, que tomo prestado de Field [33]. Dado el significado intuitivo del predicado veritativo, es plausible que para toda oración ϕ debamos rechazar la conjunción
ϕ *y* ϕ *no es verdadera*
y también la conjunción

[1]Otras razones para rechazar la ley de tercero excluido son las paradojas de la teoría de conjuntos -como la paradoja de Russell-, las paradojas de la vaguedad -como la paradoja de Sorites-, la evaluación semántica de oraciones acerca del futuro -a veces llamadas 'futuros contingentes'-, la evaluación semántica de oraciones que contienen nombres vacíos -como aquellas que ocurren en discursos ficcionales-, sólo por nombrar algunas.

no es el caso que ϕ y ϕ es verdadera.
La razón obvia es que en ambos casos los conyuntos parecen incompatibles entre sí en algún sentido. Uno dice que el otro no es el caso. Ahora, si hacemos que ϕ sea la oración del mentiroso λ, como instancias particulares de los principios de arriba, debemos rechazar también
λ y λ no es veradadera
y
no es el caso que λ y λ es verdadera.
Pero nótese que λ y λ *no es verdadera* son equivalentes, y lo mismo vale para *no es el caso que* λ y λ *es verdadera* (asumiendo que la negación satisface ciertas condición mínimas, como que ϕ se sigue de *no es el caso que no es el caso que* ϕ). En conscuencia, si debemos rechazar *λ y λ no es verdadera*, entonces debemos rechazar también
λ no es verdadera,
y si debemos rechazar *no es el caso que λ y λ es verdadera*, entonces debemos rechazar también
λ es verdadera.
Luego, está claro que debemos rechazar tanto λ *es verdadera* como λ *no es verdadera*, y si rechazamos ambas cosas, también debemos rechazar su disyunción
λ es verdadera o λ no es verdadera.
Por lo tanto, debemos rechazar al menos la instancia de la ley de tercero excluído para λ.

Este razonamiento parece ser sólido. En lo que respecta a las primeras dos conjunciones, ellas simplemente encapsulan formalmente el funcionamiento del predicado veritativo. Si una de las conjunciones fuera aceptada, el predicado veritativo no estaría funcionando apropiadamente (o al menos eso parece). El siguiente paso es darse cuenta de que en el caso de λ, las dos oraciones conjuntivas son equivalentes, por lo que podemos eliminar una de ellas, lo cual parece completamente razonable. Después de todo, es difícil encontrar apoyo -*excepto entre los defensores de las teorías no contractivas*- para la idea de que dos ocurrencias de λ deben evaluarse de manera diferente de una ocurrencia de λ. Y, por último, usamos el principio según el cual cada vez que rechazamos dos enunciados, debemos rechazar su disyunción también, un principio altamente plausible.

Así que, en resumen, tenemos un argumento muy fuerte a favor de la afirmación de que la ley de tercero excluido falla[2].

[2]Es preciso señalar que existe una versión de la paradoja del mentiroso que en lugar de utilizar la ley de tercero excluido utiliza la regla de *reductio* (según la cual podemos inferir la negación de ϕ siempre que el supuesto de que ϕ conduzca a una falsedad). Así que, en cierto modo, el rechazo de la ley de tercero excluido no es suficiente para evitar

2.2. Sistemas paracompletos: semántica y teoría de la prueba

2.2.1. Semántica

Hay muchas maneras diferentes de proporcionar una caracterización semántica del tipo de lógicas no clásicas que voy a considerar. Una vez más, será conveniente utilizar matrices. Este concepto no sólo es suficiente para dar una explicación semántica de la lógica clásica, también es adecuado para estudiar una serie de lógicas no clásicas compatibles con un predicado de verdad transparente. Empezaré echándole un vistazo al esquema trivaluado fuerte de Kleene K_3 .

Definición (*Una matriz para* K_3) La lógica K_3 puede caracterizarse por medio de la matriz $\mathcal{M} =< \mathcal{V}, \mathcal{D}, \mathcal{O} >$, donde:

- $\mathcal{V} = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$,
- $\mathcal{D} = \{1\}$, y
- $\mathcal{O}$ se define de la siguiente manera[3]:

	$\neg^{K_3}$
1	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1

$\vee^{K_3}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	1
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1	$\frac{1}{2}$	0

$\wedge^{K_3}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
0	0	0	0

	$\exists^{K_3}$
$\{1\}$	1
$\{\frac{1}{2}\}$	$\frac{1}{2}$
$\{0\}$	0
$\{1, \frac{1}{2}\}$	1
$\{\frac{1}{2}, 0\}$	$\frac{1}{2}$
$\{1, 0\}$	1
$\{1, \frac{1}{2}, 0\}$	1

Una característica atractiva de K_3 es que es compatible con las motivaciones filosóficas a favor de la paracompletitud introducidas en la última sección. Allí, ofrecí un argumento para mostrar que las oraciones paradójica

una inconsistencia. Sin embargo, es plausible pensar que si falla dicha ley, también fallará la regla de *reductio*, porque no hay razones para creer que si ϕ lleva a una falsedad, esto es suficiente para inferir la verdad de su negación, dado que ambas podrían no ser verdaderas.

[3]Definiré operaciones para la negación, la conjunción, la disyunción y el cuantificador existencial. Las demás operaciones lógicas (como el condicional material y el cuantificador universal) son definibles a partir de aquellas. Consideraciones similares se aplican a otras matrices que definiré más abajo

no son verdaderas ni falsas. Si el valor 1 se equipara con ser verdadero (o, si el lector tiene reparos con esto, con ser verdadero *de acuerdo a un modelo*) y el valor 0 con ser falso (o falso de acuerdo a un modelo), entonces el valor $\frac{1}{2}$ puede equipararse con no ser verdadero ni falso, o con ser indeterminado entre la verdad y la falsedad (de acuerdo a un modelo). Podemos utilizar este tercer valor para clasificar las oraciones problemáticas.

Al igual que antes, diré que la estructura $< d, v^{\mathcal{M}} >$ es una interpretación para $\mathcal{L}$ basada en una matriz $\mathcal{M}$. La interpretación de las constantes individuales se especifica como en la lógica clásica. La interpretación de los predicados es diferente. Para cada predicado n-ádico R de $\mathcal{L}$, $v^{\mathcal{M}}(R)$ es el par $< R^+, R^- >$, donde R^+ y R^- son subconjuntos de d^n. Intuitivamente, R^+ es la extensión de R y R^- es la antiextensión de R. A veces, usaré la notación $v^{\mathcal{M}}(R^+)$ y $v^{\mathcal{M}}(R^-)$ para representar la extensión y la antiextensión del predicado R bajo la función $v^{\mathcal{M}}$, respectivamente. Como en la lógica clásica, estipulamos que $v^{\mathcal{M}}(R^+) \cap v^{\mathcal{M}}(R^-) = \varnothing$ para todo predicado R. Esto quiere decir que las interpretaciones $v^{\mathcal{M}}$ son *exclusivas*. Pero, crucialmente, dado que necesitamos que nuestras teorías sean paracompletas, no requerimos que $v^{\mathcal{M}}(R^+) \cup v^{\mathcal{M}}(R^-) = d$ para todo predicado R, porque queremos que ciertos objetos no caigan bajo la extensión de R ni bajo su antiextensión (al menos para algunos predicados R). En otras palabras, las interpretaciones $v^{\mathcal{M}}$ *no son exhaustivas*.

Luego, si $< d, v >$ es una interpretación que satisface estas condiciones, diré que v^{K_3}, la interpretación v basada en la matriz $\mathcal{M}$ que caracteriza K_3, se define recursivamente de la siguiente forma:

- $v^{K_3}(Rc_1, ..., c_n) = 1$ si y sólo si $< v^{K_3}(c_1), ..., v^{K_3}(c_n) > \in v^{K_3}(R^+)$, y $v^{K_3}(Rc_1, ..., c_n) = 0$ si y sólo si $< v^{K_3}(c_1), ..., v^{K_3}(c_n) > \in v^{K_3}(R^-)$.
- $v^{K_3}(\neg\psi) = 1 - v^{K_3}(\psi)$,
- $v^{K_3}(\psi \vee \chi) = max\{v^{K_3}(\phi), v^{K_3}(\psi)\}$,
- $v^{K_3}(\psi \wedge \chi) = min\{v^{K_3}(\phi), v^{K_3}(\psi)\}$, y
- $v^{K_3}(\exists x\psi) = sup\{v'^{K_3}(\psi)$: v'^{K_3} es una x-variante de $v^{K_3}\}$.

Ahora estamos en condiciones de ofrecer una definición de validez para K_3.

Definición (K_3-*válido*) Diré que un argumento de Γ a Δ es K_3-*válido* ($\Gamma \vDash_{K_3} \Delta$) si y sólo si para toda interpretación v^{K_3}, si $v^{K_3}(\gamma) = 1$ para cada $\gamma \in \Gamma$, entonces $v^{K_3}(\delta) = 1$ para algún $\delta \in \Delta$.

En este punto debería mencionar un par de propiedades importantes de K_3.

Proposición 2.2.1 (Propiedades de K_3) *K_3 tiene las siguientes propiedades:*

- *K_3 es una lógica paracompleta, ya que $\nvDash_{K_3} \phi, \neg\phi$.*
- *De hecho, K_3 no tiene teoremas: para toda oración ϕ de $\mathcal{L}$, $\nvDash_{K_3} \phi$.*

Prueba Ambas propiedades pueden verificarse fácilmente considerando una intepretación v^{K_3} tal que para cada fórmula atómica ϕ^{At}, $v^{K_3}(\phi^{At}) = \frac{1}{2}$. ∎

Antes de pasar a considerar otras lógicas paracompletas, obsérvese que K_3 tiene otras caracterizaciones semánticas además de la basada en matrices. Una opción popular es presentar esta lógica por medio de una semántica parcial (esto es, por ejemplo, lo que Kripke hizo en [54]). En la semántica parcial, en lugar de tener un tercer valor de verdad disponible, sólo tenemos dos valores de verdad, pero definimos v^{K_3} como una función de interpretación *parcial*, en el sentido de que v^{K_3} no le asigna ningún valor a algunas fórmulas. Por supuesto, técnicamente hablando, el resultado es el mismo. Un argumento es válido de acuerdo a la semántica parcial si y sólo si es válido en la semántica basada en matrices. En cualquier caso, no voy a desarrollar el enfoque parcial aquí, ya que la mayoría de lo que digo a continuación se basa en la semántica de la matrices[4].

Para finalizar esta sección mencionaré un par de lógicas paracompletas distintas de K_3 que son relevantes en este contexto[5]. La primera es la lógica trivalente de Łukasiewicz Ł$_3$. Si echamos un vistazo de nuevo a K_3, la forma estándar de definir un condicional es utilizando la negación y la disyunción de la siguiente manera: $\phi \supset \psi =_{df} \neg\phi \vee \psi$. Con esto, la tabla de verdad del condicional es como sigue:

---

[4]Aún hay otras formas de proporcionar una caracterización semántica para K_3. Por ejemplo, es posible utilizar una semántica basada en la estrella de Routley o una semántica de bivaluaciones, aunque estas opciones están lejos de ser populares. Sólo menciono estas posibilidades porque en los próximos capítulos voy a explorar en detalle una semántica basada en la estrella Routley y (algo parecido a) la semántica de bivaluaciones para la lógica paraconsistente LP. De hecho, estas semánticas sí gozan de cierta popularidad en la comunidad paraconsistente.

[5]Por supuesto, no es mi intención ser exhaustivo. Hay muchas otras lógicas paracompletas compatibles con un predicado de verdad transparente, pero en su mayoría tienen poco o ningún interés filosófico.

$\supset^{K_3}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1	1	1

Una consecuencia poco atractiva es que las fórmulas condicionales de la forma $\phi \supset \phi$ ya no serán válidas. En Ł$_3$ se corrige esta situación mediante la adición de un conectivo condicional primitivo no definible en términos de negación y disyunción. Así, en lo que a la negación, la disyunción y el existencial se refiere, Ł$_3$ es idéntico a K_3. Pero además de estas expresiones lógicas añadimos un nuevo condicional de la siguiente manera:

$\supset^{L_3}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$
0	1	1	1

Esto resuelve el problema de la invalidez de las fórmulas de la forma $\phi \supset \phi$, pero a un precio muy alto: Ł$_3$ es inconsistente (de hecho, trivial) con un predicado de verdad transparente. Esta vez, la dificultad no es causada por la paradoja del mentiroso, sino por una versión de la paradoja de Curry[6]. Consideremos el siguiente par de oraciones:

κ_1 $Tr\langle\kappa_1\rangle \supset \bot$
κ_2 $Tr\langle\kappa_2\rangle \supset Tr\langle\kappa_1\rangle$

No es difícil ver que no hay una asignación estable de valores de verdad a κ_1 y κ_2. De hecho, el argumento se generaliza a Ł$_n$ para cualquier número finito n, en el sentido de que siempre es posible construir un conjunto de oraciones utilizando el predicado de verdad que causa la trivialidad del sistema si la verdad es transparente. En el apéndice al capítulo 4 mostraré que hay una manera de escapar de este problema utilizando una versión de la lógica de Łukasiewicz con un número infinito de valores. Pero por ahora vamos a dejar el tema de lado y vamos a considerar otra lógica paracompleta.

Una cosa es decir que λ y otras oraciones problemáticas son oraciones con significado que carecen de valor de verdad, y otra cosa muy diferente es decir que estas oraciones son simplemente sinsentidos o, equivalentemente, que no expresan una proposición. Esta interpretación da lugar a una lógica diferente, conocida como lógica de Kleene débil -llamémosla WK_3-, que debe

[6]La oración de Curry κ no es problemática, ya que obtiene el valor $\frac{1}{2}$ en cada valuación v^{L_3} de Ł$_3$.

caracterizarse por medio de una matriz diferente.

Definición (*Una matriz para* WK_3) La lógica WK_3 puede caracterizarse por medio de la matriz $\mathcal{M} =< \mathcal{V}, \mathcal{D}, \mathcal{O} >$, donde:

- $\mathcal{V} = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$,
- $\mathcal{D} = \{1\}$, y
- $\mathcal{O}$ se define de la siguiente manera:

	$\neg^{WK_3}$
1	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1

$\vee^{WK_3}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1	$\frac{1}{2}$	0

	$\exists^{WK_3}$
$\{1\}$	1
$\{\frac{1}{2}\}$	$\frac{1}{2}$
$\{0\}$	0
$\{1, \frac{1}{2}\}$	$\frac{1}{2}$
$\{\frac{1}{2}, 0\}$	$\frac{1}{2}$
$\{1, 0\}$	1
$\{1, \frac{1}{2}, 0\}$	$\frac{1}{2}$

Puesto que el modo en que entendemos $\frac{1}{2}$ es ahora diferente, tanto $\vee$ como $\exists$ no se comportan como antes. En K_3, la verdad de un disyunto es suficiente para hacer verdadera una disyunción, pero en WK_3 esto ya no es así. Cualquier fórmula que contenga una subfórmula que no logre expresar una proposición no expresa una proposición. En otras palabras, el valor medio $\frac{1}{2}$ es dominante sobre los otros valores, por lo que el sinsentido es contagioso.

Podemos definir v^{WK_3} recursivamente como antes[7] y podemos utilizar esta noción para definir validez en WK_3. Sin embargo, v^{WK_3} compartirá algunas de las propiedades de K_3 que mencionamos anteriormente: al igual que K_3, es una teoría paracompleta y carece de oraciones válidas.

Dejando a un lado estas propiedades formales, creo que hay consideraciones conceptuales independientes para rechazar la afirmación de que las oraciones paradójicas no expresan una proposición. No veo ninguna razón de peso para considerar a λ y otras oraciones como carentes de sentido. Por ejemplo, sería incorrecto decir que, al menos en cierto sentido, es un error categorías atribuir un valor de verdad a λ. Como Priest [72] señala:

> For example, in 'This sentence is False', the subject appears to be the right *kind* of thing for the predicate to be about.

[7]Por supuesto, algunas modificaciones son necesarias: $\vee$ ya no es el *máximo* de un conjunto de valores y $\exists$ ya no es el *supremo* de un conjunto de valores.

Por esta razón las lógicas que voy a considerar están, en su mayoría, basadas en K_3. Ahora bien, independientemente de la plausibilidad de WK_3, es sabido que este esquema de valuación es también compatible con un predicado de verdad transparente[8]. En la siguiente sección mostraré cómo agregar un predicado de verdad transparente a K_3, aunque una construcción similar puede ofrecerse para WK_3.

Un predicado de verdad transparente

Necesitamos demostrar que es posible añadir un predicado de verdad transparente a K_3. Es bien sabido cómo hacerlo. Sea $\mathcal{L}$ el lenguaje de la aritmética de Peano y sea $\mathcal{L}^+$ el lenguaje que resulta de añadir un predicado de verdad $Tr(x)$ a $\mathcal{L}$[9]. Para obtener un predicado de verdad transparente vamos a imponer la siguiente restricción:

- Para cada fórmula ϕ de $\mathcal{L}^+$ y cada v: $v(\phi) = v(Tr\langle\phi\rangle)$[10].

Aunque en el capítulo 1 identificamos la transparencia con una propiedad más fuerte, para los resultados que se ofrecen a continuación, sin embargo, esta formulación será suficiente.

Voy a llamar K_3^+ a la teoría resultante de añadir esta condición a K_3. Es posible proporcionar una semántica trivalente de punto fijo para caracterizar esta teoría. Será instructivo mostrar exactamente cómo esta construcción puede llevarse a cabo. Esto nos ayudará a entender cómo el predicado de verdad puede interpretarse adecuadamente en el marco de una lógica trivalente y, sobre todo, a entender de qué manera se evalúan las oraciones paradójicas.

Aquí ofrezco un esbozo de cómo funciona la construcción para K_3^+. En lo que sigue, consideraremos solamente interpretaciones v^δ para $\mathcal{L}^+$ en las que el vocabulario aritmético tiene su interpretación habitual y el dominio es exactamente ω. Diré que $\langle\phi\rangle$ denota el (código de Gödel de la) fórmula ϕ y diré que $v^\delta(Tr^+)$ y $v^\delta(Tr^-)$ son la extensión y la antiextensión del predicado $Tr(x)$ en v^δ, respectivamente.

Como es usual, defino un *operador de salto* $\mathcal{J} : \mathcal{P}\omega \rightarrow \mathcal{P}\omega$ sobre interpretaciones para $\mathcal{L}^+$. Este operador se define como sigue:

[8] Además, se puede decir que WK_3 es superior a K_3 en un aspecto. Si bien no es posible introducir un predicado que represente la noción de no ser verdadero ni falso si la lógica subyacente es K_3, esto es de hecho posible si la lógica subyacente es WK_3. De modo que, podría preferirse esta última lógica por razones vinculadas a sus recursos expresivos.

[9] Será más fácil utilizar la aritmética de Peano como nuestro sistema de nombres durante esta sección, aunque nada importante depende de esto.

[10] Para facilitar de la legibilidad, en esta sección voy a escribir v en lugar de v^{K_3}, pero el lector debe recordar que v es una interpretación basada en la matriz para K_3.

$\mathcal{J}(v^\delta(Tr^+)) = \{\langle\phi\rangle : v^\delta(\phi) = 1\}$.

$\mathcal{J}(v^\delta(Tr^-)) = \{\langle\phi\rangle : v^\delta(\phi) = 0\}$.

Así que cuando aplicamos $\mathcal{J}$ a un conjunto que es la extensión del predicado de verdad, nos da otro conjunto que es la nueva extensión del predicado de verdad, y lo mismo para la antiextensión[11].

Diré que el operador $\mathcal{J}$ es *monótono*[12] si y sólo si $v^\alpha(Tr^+) \subseteq v^\beta(Tr^+)$ implica $\mathcal{J}(v^\alpha(Tr^+)) \subseteq \mathcal{J}(v^\beta(Tr^+))$, y $v^\alpha(Tr^-) \subseteq v^\beta(Tr^-)$ implica $\mathcal{J}(v^\alpha(Tr^-)) \subseteq \mathcal{J}(v^\beta(Tr^-))$. Una consecuencia de la monotonía de $\mathcal{J}$ es la existencia de puntos fijos para $\mathcal{J}$, i.e., interpretaciones $v^\delta(Tr^+)$ y $v^\delta(Tr^-)$ tales que $\mathcal{J}(v^\delta(Tr^+)) = v^\delta(Tr^+)$ y $\mathcal{J}(v^\delta(Tr^-)) = v^\delta(Tr^-)$

Intuitivamente, la idea es que partimos de una interpretación v^0 que asigna una extensión consistente (que podría ser vacía) y una antiextensión consistente (que también podría ser vacía) al predicado de verdad. La construcción es tal que algunas fórmulas y sus negaciones no estarán ni en la extensión del predicado de verdad ni en su antiextensión. Aunque algunas fórmulas verdaderas (falsas) podrían no estar aún en la (anti)extensión del predicado de verdad en v^0, el operador de salto arregla eventualmente esta situación mediante la inclusión de más y más códigos de Gödel de fórmulas verdaderas (falsas) en la (anti)extensión del predicado de verdad de una manera monótona. Esto significa que los conjuntos
$v^0(Tr^+), \mathcal{J}(v^0(Tr^+)), \mathcal{J}(\mathcal{J}(v^0(Tr^+))), ...$
y
$v^0(Tr^-), \mathcal{J}(v^0(Tr^-)), \mathcal{J}(\mathcal{J}(v^0(Tr^-))), ...,$
forman dos secuencias crecientes[13].

Para mostrar de manera rigurosa como funciona la construcción, necesitamos primero el siguiente lema:

Lema 2.2.2 *Si $v^\alpha(Tr^+) \subseteq v^\beta(Tr^+)$, entonces para toda fórmula ϕ de $\mathcal{L}^+$, si $v^\alpha(\phi) = 1$, entonces $v^\beta(\phi) = 1$, y si $v^\alpha(Tr^-) \subseteq v^\beta(Tr^-)$, entonces para toda*

[11] Podemos lidiar con números naturales que no codifican fórmulas poniéndolos en la antiextensión del predicado de verdad.

[12] Esta propiedad no debe confundirse con la propiedad estructural de la relación de consecuencia de la que hablé en el capítulo 1.

[13] Más formalmente, obtenemos la secuencia creciente $v^0(Tr^+)$, $v^1(Tr^+)$, $v^2(Tr^+)$,...,$v^\omega(Tr^+)$, $v^{\omega+1}(Tr^+)$,.... de esta forma:

- para ordinales sucesores $\alpha + 1, v^{\alpha+1}(Tr^+) \equiv \mathcal{J}(v^\alpha(Tr^+)) \equiv \{\langle\phi\rangle : v^\alpha(\phi) = 1\}$, y
- para ordinales límite Λ, $v^\Lambda(Tr^+) \equiv \bigcup_{\beta<\Lambda} v^\beta(Tr^+)$.

Y algo similar vale para la antiextensión.

fórmula ϕ de $\mathcal{L}^+$, si $v^\alpha(\phi) = 0$, entonces $v^\beta(\phi) = 0$.

Prueba La afirmación puede probarse por inducción sobre la complejidad de ϕ, pero tenemos que considerar cada tipo de fórmula positiva *y cada tipo de fórmula negativa.* Dejo los detalles al lector. ∎

Como corolario podemos obtener lo siguiente:

Lema 2.2.3 *(*Monotonía de $\mathcal{J}$*) La secuencia posee la siguiente propiedad de monotonía: si $v^\alpha(Tr^+) \subseteq v^\beta(Tr^+)$, entonces $\mathcal{J}(v^\alpha(Tr^+)) \subseteq \mathcal{J}(v^\beta(Tr^+))$ y si $v^\alpha(Tr^-) \subseteq v^\beta(Tr^-)$, entonces $\mathcal{J}(v^\alpha(Tr^-)) \subseteq \mathcal{J}(v^\beta(Tr^-))$.*

Prueba Solamente pruebo una de las afirmaciones. Supongamos que $\langle\phi\rangle \in \mathcal{J}(v^\alpha(Tr^+))$. Esto quiere decir que $v^\alpha(\phi) = 1$. Por el lema 2.2.2, podemos inferir que $v^\beta(\phi) = 1$. Por lo tanto, $\langle\phi\rangle \in \mathcal{J}(v^\beta(Tr^+))$. ∎

Por las consideraciones de cardinalidad usuales, en algún punto la extensión y la antiextensión del predicado veritativo dejan de crecer. Así, llegamos a un punto fijo.

Teorema 2.2.4 (*Existencia de un punto fijo para* $\mathcal{J}$) *La construcción tiene la propiedad de punto fijo. Esto es, hay interpretaciones v^δ tales que:*

- *$\mathcal{J}(v^\delta(Tr^+)) = v^\delta(Tr^+)$, y*
- *$\mathcal{J}(v^\delta(Tr^-)) = v^\delta(Tr^-)$.*

Estas interpretaciones tratan a $Tr(x)$ de la forma deseada. Si v^δ es un punto fijo para $\mathcal{J}$, entonces para todas las oraciones ϕ de $\mathcal{L}^+$ se cumple que:

$v^\delta(\phi) = v^\delta(Tr\langle\phi\rangle)$.

Esto demuestra que es posible tener un predicado de verdad transparente en un marco paracompleto. Por otra parte, como he señalado antes, aunque me he centrado en una teoría de la verdad basada en el esquema fuerte de Kleene, la prueba de existencia de un punto fijo puede llevarse a cabo (con algunas modificaciones menores) para otras teorías de la verdad, como la teoría basada en el esquema de Kleene débil (y también en el esquema supervaluacionista, que no he considerado aquí).

Además, es un hecho conocido que la construcción no sólo muestra la existencia de *un único punto fijo*, sino de muchos. De hecho, se puede demostrar (aunque no voy a ofrecer la prueba aquí) que existe un punto fijo mínimo, es decir, una interpretación v (que es un punto fijo) tal que todas las demás interpretaciones v' (que sean puntos fijos) la extienden[14]. También se puede demostrar que hay muchos puntos fijos maximales, es decir, puntos fijos que asignan a cada oración no paradójica un valor diferente de $\frac{1}{2}$. Asimismo, existe una una serie de puntos fijos interesantes entre el mínimo y los maximales, pero no los voy a considerar aquí.

A pesar de que la semántica de punto fijo proporciona varias interpretaciones diferentes para el predicado de verdad, aquí voy a considerar solamente el punto fijo mínimo, el cual, puede decirse, parece proporcionar la interpretación mejor motivada para el predicado de verdad. Pues consideremos una oración τ (a veces conocida como "truth-teller") que dice de sí misma que es verdadera. Esta oración no conduce a una paradoja, pero, intuitivamente, no parece ser verdadera y tampoco falsa. De hecho, sólo formará parte de la extensión (antiextensión) del predicado de verdad si la obligamos a estar ahí al comienzo de la construcción. En otras palabras, cualquier asignación de un valor semántico a τ que no sea $\frac{1}{2}$ -el valor que esta oración recibe en el punto fijo mínimo- sería completamente arbitrario, ya que no hay razones para decir que es verdadera o que es falsa. Sin embargo, en todos los puntos fijos maximales esta oración recibe o bien el valor 1 o bien el valor 0, y esto parece un inconveniente serio.

2.2.2. Teoría de la prueba

En esta sección voy a establecer dos procedimientos de prueba para K_3^+. Dado que esta y otras lógicas que voy a considerar más tarde utilizan modelos trivaluados, la tarea de compararlas sintácticamente se vuelve más sencilla si las presentamos por medio de un cálculo de secuentes en el que los secuentes poseen tres lados en lugar de dos[15]. De hecho, los secuentes de tres lados también pueden ser utilizados para proporcionar procedimientos de prueba para otras lógicas de tres valores, como las que hemos considerado brevemente en la sección anterior (WK_3 y $Ł_3$). Sin embargo, los secuentes de tres lados son engañosos en un aspecto: ocultan cómo cada una de las lógicas que estamos considerando bloquean las paradojas. Por esta razón también proporcionaré un cálculo de secuentes tradicional (de dos lados) para K_3, en el que quedará explicitada la forma en que se resuelven las paradojas. Además, los cálculos

[14]Decimos que una interpretación v' *extiende* una interpretación v si para cada fórmula ϕ, $v'(\phi) \equiv 1$ cada vez que $v(\phi) \equiv 1$ y $v'(\phi) \equiv 0$ siempre que $v(\phi) \equiv 0$. Para obtener el punto fijo mínimo estipulamos que $v^0(Tr^+) \equiv v^0(Tr^-) \equiv \varnothing$.

[15]Hasta donde sé, el primero en ofrecer una formulación precisa de los secuentes con múltiples lados fue G. Rousseau en [93]. Una presentación más moderna y completa se puede encontrar en la obra del Baaz y otros (véase, por ejemplo [6]) y en el libro de Paoli [64].

de tres lados son desagradables en más de un aspecto: son más incómodos de utilizar, es más difícil de probar cosas acerca de ellos (ya que normalmente contienen más reglas), y una vez que el predicado de verdad se introduce, la regla de corte no puede ser eliminada .

Secuentes de tres lados

La idea de un cálculo de secuentes de dos lados es bastante familiar. Una expresión de la forma $\Gamma \Rightarrow \Delta$ significa que la colección de fórmulas Δ se desprende de la colección de fórmulas Γ. Si sólo hay dos valores de verdad, es sencillo proporcionar una lectura semántica para los secuentes. Decimos que $\Gamma \Rightarrow \Delta$ se da si alguna fórmula de Δ tiene valor 1 siempre que todas las fórmulas de Γ tengan valor 1. De manera equivalente, podemos decir que $\Gamma \Rightarrow \Delta$ se cumple si alguna fórmula de Γ tiene el valor 0 o alguna fórmula de Δ tiene el valor 1. Los secuentes tres lados son de la forma $\Gamma|\Sigma|\Delta$. La lectura semántica de esto es una generalización de la lectura semántica de los secuentes de dos lados (teniendo en cuenta que ahora hay un tercer valor semántico $\frac{1}{2}$). El secuente $\Gamma|\Sigma|\Delta$ expresa la idea de que alguna fórmula de Γ tiene el valor 0 o alguna fórmula de Σ tiene un valor $\frac{1}{2}$ o alguna fórmula de Δ tiene valor 1[16].

Definición (*El sistema $\mathcal{S}$*) Sean ϕ y ψ fórmulas, ϕ^{At} una fórmula atómica y $\Gamma, \Sigma, \Delta, \Gamma', \Sigma'$, y Δ' conjuntos[17] de fórmulas tales que $\Gamma \subseteq \Gamma'$, $\Sigma \subseteq \Sigma'$, y $\Delta \subseteq \Delta'$. Además, para las reglas de $\forall$, sea t cualquier término y sea a un término que no ocurre (explícita o implícitamente[18]) en el secuente que es la conclusión de la regla. El sistema de prueba $\mathcal{S}$ tiene los siguientes secuentes iniciales y reglas:

[16]En la literatura es común encontrar una lectura alternativa para los secuentes de tres lados en términos de conjunciones negativas. En esa lectura, $\Gamma|\Sigma|\Delta$ se cumple si no es el caso que: todos los miembros de Γ tienen valor 1 y todos los miembros de Σ tienen valor $\frac{1}{2}$ y todos los miembros de Δ tienen valor 0. Mientras que para los secuentes de dos lados estas dos lecturas son equivalentes, esto no es necesariamente así para los secuentes de tres lados. De hecho, es posible ofrecer dos procedimientos de prueba para K_3^+, uno basado en la lectura disyuntiva y el otro en la lectura conjuntiva negativa. Aunque ambos sistemas caracterizan el mismo conjunto de inferencias válidas, son muy diferentes en muchos aspectos. En cualquier caso, creo que la lectura disyuntiva es menos engorrosa, y por eso la uso en esta sección.

[17]Una alternativa sería agregar reglas de contracción al sistema (tres, una para cada lado) y presentar el sistema utilizando multiconjuntos. Sin embargo, he escogido usar conjuntos para simplificar las cosas, de modo que las reglas de contracción están implícitas.

[18]El problema con respecto a la interacción entre las reglas para el predicado veritativo y los cuantificadores aparece aquí también, aunque, curiosamente, de una forma ligeramente diferente. Si a puede ocurrir *implícitamente* en el secuente que es la conclusión de la regla, entonces podemos razonar de la siguiente forma:

$$\text{Ax}\ \frac{}{\phi^{At}|\phi^{At}|\phi^{At}}$$

$$\text{corte}\ \frac{\Gamma, \phi|\Sigma, \phi|\Delta \qquad \Gamma, \phi|\Sigma|\Delta, \phi \qquad \Gamma|\Sigma, \phi|\Delta, \phi}{\Gamma|\Sigma|\Delta}$$

$$\text{monotonía}\ \frac{\Gamma|\Sigma|\Delta}{\Gamma'|\Sigma'|\Delta'}$$

$$\text{L}\neg\ \frac{\Gamma|\Sigma|\Delta, \phi}{\Gamma, \neg\phi|\Sigma|\Delta}$$

$$\text{M}\neg\ \frac{\Gamma|\Sigma, \phi|\Delta}{\Gamma|\Sigma, \neg\phi|\Delta}$$

$$\text{R}\neg\ \frac{\Gamma, \phi|\Sigma|\Delta}{\Gamma|\Sigma|\Delta, \neg\phi}$$

$$\text{L}\vee\ \frac{\Gamma, \phi|\Sigma|\Delta \qquad \Gamma, \psi|\Sigma|\Delta}{\Gamma, \phi \vee \psi|\Sigma|\Delta}$$

$$\text{M}\vee\ \frac{\Gamma, \phi|\Sigma, \phi|\Delta \qquad \Gamma, \psi|\Sigma, \psi|\Delta \qquad \Gamma|\Sigma, \phi, \psi|\Delta}{\Gamma|\Sigma, \phi \vee \psi|\Delta}$$

$$\text{R}\vee\ \frac{\Gamma|\Sigma|\Delta, \phi, \psi}{\Gamma|\Sigma|\Delta, \phi \vee \psi}$$

$$\text{L}\exists\ \frac{\Gamma, \phi(a)|\Sigma|\Delta}{\Gamma, \exists x\phi(x)|\Sigma|\Delta}$$

$$\text{M}\exists\ \frac{\Gamma, \phi(a)|\Sigma, \phi(a)|\Delta \qquad \Gamma|\Sigma, \phi(t)|\Delta}{\Gamma|\Sigma, \exists x\phi(x)|\Delta}$$

$$\text{R}\exists\ \frac{\Gamma|\Sigma|\Delta, \phi(t)}{\Gamma|\Sigma|\Delta, \exists x\phi(x)}$$

$$\text{L}\exists\ \dfrac{\text{M}\exists\ \dfrac{\text{R}Tr\ \dfrac{Ra|Ra|Ra}{Ra|Ra|Tr\langle Ra\rangle} \qquad \text{R}Tr\ \dfrac{Rb|Rb|Rb}{Rb|Rb|Tr\langle Rb\rangle}}{Rb|\exists xR(x)|Tr\langle Ra\rangle, Tr\langle Rb\rangle}}{\exists xR(x)|\exists xR(x)|Tr\langle Ra\rangle, Tr\langle Rb\rangle}$$

El último secuente, sin embargo, no debería tener una prueba, ya que consiste básicamente en la afirmación de que o bien $Tr\langle Ra\rangle$ o bien $Tr\langle Rb\rangle$ se sigue de $\exists xR(x)$. Esto último se entenderá más claramente cuando veamos la definición de validez para este sistema.

Para obtener el sistema $\mathcal{S}^+$, añadimos las siguientes reglas para la verdad:

$$\text{L}Tr\,\frac{\Gamma,\phi|\Sigma|\Delta}{\Gamma, Tr\langle\phi\rangle|\Sigma|\Delta}$$

$$\text{M}Tr\,\frac{\Gamma|\Sigma,\phi|\Delta}{\Gamma|\Sigma, Tr\langle\phi\rangle|\Delta}$$

$$\text{R}Tr\,\frac{\Gamma|\Sigma|\Delta,\phi}{\Gamma|\Sigma|\Delta, Tr\langle\phi\rangle}$$

Debo hacer algunas observaciones sobre el sistema de prueba que he ofrecido. En primer lugar, en un cálculo de secuentes de dos lados, la regla de corte puede ser entendida como expresando una condición de exclusividad sobre las fórmulas del lenguaje. La regla expresa, *grosso modo*, que ninguna fórmula puede ser verdadera y falsa a la vez. En un cálculo de secuentes de tres lados, como el que nos ocupa, la regla de corte también expresa una condición de exclusividad. Pero ya que ahora hay tres valores de verdad, lo que nos dice es que ninguna fórmula puede recibir más de uno de los tres valores de verdad, es decir, no hay una fórmula que pueda recibir el valor 1 y el valor $\frac{1}{2}$, o el valor $\frac{1}{2}$ y el valor 0, o el valor 1 y el valor 0. En general, esta idea se captura por medio de tres reglas distintas. Estas reglas tienen la forma:

$$corte_1\,\frac{\Gamma,\phi|\Sigma|\Delta \qquad \Gamma|\Sigma,\phi|\Delta}{\Gamma|\Sigma|\Delta}$$
$$corte_2\,\frac{\Gamma|\Sigma,\phi|\Delta \qquad \Gamma|\Sigma|\Delta,\phi}{\Gamma|\Sigma|\Delta}$$
$$corte_3\,\frac{\Gamma,\phi|\Sigma|\Delta \qquad \Gamma|\Sigma|\Delta,\phi}{\Gamma|\Sigma|\Delta}$$

Sin embargo, la regla de corte que he ofrecido es más simple y es equivalente a estas tres reglas (véase [87] para una prueba de que se puede derivar de las tres reglas; que las tres reglas son derivables de ella es fácil de ver).

Un hecho interesante sobre $\mathcal{S}^+$ es que su regla de corte no es eliminable[19]. Esto puede ser sorprendente, pero es como debe ser. El secuente $\varnothing|\lambda|\varnothing$ es demostrable mediante la regla de corte, pero no sin ella (véase nuevamente [87], Fact 4.2). Dado que las reglas de contracción se encuentran implícitas y que todas las reglas de la negación están disponibles en $\mathcal{S}^+$, el lector podría preguntarse cómo la paradoja del mentiroso es bloqueada en este sistema. Con secuentes de dos lados, la ausencia de una de estas reglas no nos permite

[19]Corte sí es eliminable en el procedimiento de la prueba basado en la lectura conjuntiva negativa.

inferir el secuente vacío a partir $\Rightarrow \lambda$ y $\lambda \Rightarrow$. En $\mathcal{S}^+$, la paradoja del mentiroso se evita debido a que el secuente $\lambda|\varnothing|\lambda$ no es demostrable. Si lo fuera, una aplicación de la regla de corte sería suficiente para obtener el secuente vacío, ya que tanto $\lambda|\lambda|\varnothing$ como $\varnothing|\lambda|\lambda$ tienen prueba.

En segundo lugar, el axioma de reflexividad se formula sólo para fórmulas atómicas, pero más adelante vamos a utilizar el hecho de que puede aplicarse también a cualquier fórmula. Esto no es problemático. Una inducción sobre la complejidad de las fórmulas muestra que si el axioma de reflexividad vale para fórmulas atómicas, vale también para cualquier fórmula.

En tercer lugar, hay una diferencia poco interesante entre $\mathcal{S}^+$ y otras presentaciones de cálculos de secuentes de tres lados disponibles en la bibliografía. A veces monotonía no se toma como una regla estructural oficial del sistema (se la suele tomar como una regla implícita). Sin embargo, por razones que se aclararán más adelante, la he añadido explícitamente al sistema $\mathcal{S}^+$.

En cuarto lugar, asumiré que Γ, Σ, Δ y demás, son conjuntos *finitos* de fórmulas. Así que cada secuente de la forma $\Gamma|\Sigma|\Delta$ puede representarse como $\gamma_1, ..., \gamma_n|\sigma_1, ..., \sigma_m|\delta_1, ..., \delta_j$.

En quinto lugar, las reglas con más de una premisa tienen versiones con contexto no compartido, al contrario de lo que ocurría en el capítulo 1 con CL. Sin embargo, dado que el sistema cuenta con contracción y monotonía, estas versiones son equivalentes a las versiones con contexto compartido. Además, el uso de las versiones con contexto no compartido haría que la presentación del sistema fuera más engorrosa de lo que ya es.

En sexto lugar, he omitido las reglas para la conjunción con el fin de simplificar la presentación. Por supuesto, la conjunción puede definirse en términos de la disyunción y la negación. Las otras conectivas y cuantificadores son definibles también.

Ahora consideremos la noción de validez sintáctica. El sistema es compatible con varias definiciones de validez. Ya que mi objetivo es ofrecer un procedimiento de prueba para K_3^+, es necesaria la siguiente definición:

Definición (*Definición sintáctica de validez para* K_3^+) Diré que un argumento de Γ a Δ es *sintácticamente válido en* K_3^+ (en notación, $\Gamma \vdash_{K_3^+} \Delta$) si el secuente $\Gamma|\Gamma|\Delta$ tiene prueba en $\mathcal{S}^+$.

Más adelante veremos que una característica atractiva -quizás la única- de la presentación de tres lados es que para obtener un procedimiento de prueba para otras lógicas es suficiente modificar mínimamente la definición de validez, por lo que las reglas operacionales y estructurales pueden permanecer sin cambios.

Secuentes de dos lados

Ya hemos visto cómo obtener un cálculo de secuentes de tres lados para K_3. Mencioné que una propiedad de este cálculo es que la regla de corte no es eliminable. Muchos lógicos prefieren cálculos en los que esta regla es eliminable. Hay una serie de razones para esto (aunque entrar en los detalles aquí llevaría demasiado espacio), así que en esta sección vamos a ofrecer un cálculo de dos secuente más tradicional para K_3, en el cual corte puede eliminarse. Resulta que tener la conjunción y el cuantificador universal como expresiones lógicas primitivas hace que la formulación del cálculo se simplifique.

Definición (*El sistema LK_3*) Sean Γ y Δ cualesquiera multiconjuntos (finitos) de fórmulas, sean ϕ y ψ fórmulas cualesquiera, sea χ cualquier literal (i.e. cualquier fórmula atómica o cualquier negación de una fórmula atómica), y sea ϕ^{At} cualquier fórmula atómica. Además, para las reglas de los cuantificadores, sea t cualquier término y sea a un término que no ocurre (explícita o implícitamente) en el secuente que es la conclusión de la regla. El sistema LK_3 está dado por las siguientes reglas:

- Secuentes iniciales:

$$\frac{}{\chi \Rightarrow \chi}$$

- Reglas estructurales

$$\text{corte}\ \frac{\Gamma \Rightarrow \phi, \Delta \qquad \Gamma, \phi \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta}$$

$$\text{L}W\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \phi \Rightarrow \Delta} \qquad \text{R}W\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \phi, \Delta}$$

$$\text{L}C\ \frac{\Gamma, \phi, \phi \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \phi \Rightarrow \Delta} \qquad \text{R}C\ \frac{\Gamma \Rightarrow \phi, \phi, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \phi, \Delta}$$

- Reglas operacionales

$$\text{L}\neg^{At}\ \frac{\Gamma \Rightarrow \phi^{At}, \Delta}{\Gamma, \neg\phi^{At} \Rightarrow \Delta}$$

$$\text{L}\neg\neg\,\frac{\Gamma, \phi \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \neg\neg\phi \Rightarrow \Delta} \qquad \text{R}\neg\neg\,\frac{\Gamma \Rightarrow \phi, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \neg\neg\phi, \Delta}$$

$$\text{L}\wedge\,\frac{\Gamma, \phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \phi \wedge \psi \Rightarrow \Delta} \qquad \text{R}\wedge\,\frac{\Gamma \Rightarrow \phi, \Delta \qquad \Gamma \Rightarrow \psi, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \phi \wedge \psi, \Delta}$$

$$\text{L}\neg\wedge\,\frac{\Gamma, \neg\phi \vee \neg\psi \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \neg(\phi \wedge \psi) \Rightarrow \Delta} \qquad \text{R}\neg\wedge\,\frac{\Gamma \Rightarrow \neg\phi \vee \neg\psi, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \neg(\phi \wedge \psi), \Delta}$$

$$\text{L}\vee\,\frac{\Gamma, \phi \Rightarrow \Delta \qquad \Gamma, \psi \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \phi \vee \psi \Rightarrow \Delta} \qquad \text{R}\vee\,\frac{\Gamma \Rightarrow \phi, \psi, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \phi \vee \psi, \Delta}$$

$$\text{L}\neg\vee\,\frac{\Gamma, \neg\phi \wedge \neg\psi \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \neg(\phi \vee \psi) \Rightarrow \Delta} \qquad \text{R}\neg\vee\,\frac{\Gamma \Rightarrow \neg\phi \wedge \neg\psi, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \neg(\phi \vee \psi), \Delta}$$

$$\text{L}\forall\,\frac{\Gamma, \phi(t) \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \forall x\phi \Rightarrow \Delta} \qquad \text{R}\forall\,\frac{\Gamma \Rightarrow \phi(a), \Delta}{\Gamma \Rightarrow \forall x\phi, \Delta}$$

$$\text{L}\neg\forall\,\frac{\Gamma, \exists x\neg\phi \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \neg\forall x\phi, \Rightarrow \Delta} \qquad \text{R}\neg\forall\,\frac{\Gamma, \Rightarrow \exists x\neg\phi, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \neg\forall x\phi, \Delta}$$

$$\text{L}\exists\,\frac{\Gamma, \phi(a) \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \exists x\phi, \Rightarrow \Delta} \qquad \text{R}\exists\,\frac{\Gamma \Rightarrow \phi(t), \Delta}{\Gamma \Rightarrow \exists x\phi, \Delta}$$

$$\text{L}\neg\exists\,\frac{\Gamma, \forall x\neg\phi \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \neg\exists x\phi, \Rightarrow \Delta} \qquad \text{R}\neg\exists\,\frac{\Gamma \Rightarrow \forall x\neg\phi, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \neg\exists x\phi, \Delta}$$

Para obtener el sistema LK_3^+, añadimos las siguientes reglas para el predicado veritativo:

$$\text{L}Tr\,\frac{\Gamma, \phi \Rightarrow \Delta}{\Gamma, Tr\langle\phi\rangle \Rightarrow \Delta} \qquad \text{R}Tr\,\frac{\Gamma \Rightarrow \phi, \Delta}{\Gamma \Rightarrow Tr\langle\phi\rangle, \Delta}$$

$$\text{L}\neg Tr\,\frac{\Gamma, Tr\langle\neg\phi\rangle \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \neg Tr\langle\phi\rangle \Rightarrow \Delta} \qquad \text{R}\neg Tr\,\frac{\Gamma \Rightarrow Tr\langle\neg\phi\rangle, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \neg Tr\langle\phi\rangle, \Delta}$$

Al igual que antes, debo hacer algunas observaciones sobre el sistema. En primer lugar, obsérvese que no existe una regla de introducción a la derecha para la negación. Esto es lo que hace que el sistema sea paracompleto, ya que desde el secuente $\phi \Rightarrow \phi$ no podemos obtener $\Rightarrow \phi, \neg\phi$ y *a fortiori*, no podemos obtener $\Rightarrow \phi \vee \neg\phi$.

En segundo lugar, y como consecuencia de lo anterior, necesitamos reglas para conjunciones negadas, para disyunciones negadas, para negaciones negadas, para cuantificaciones negadas y, también, para atribuciones de verdad negadas. Por ende, necesitamos cuatro reglas para el predicado veritativo. El predicado veritativo, en este sentido, no es diferente de las expresiones lógicas. Dado el comportamiento no estándar de la negación, no sólo necesitamos saber cuándo introducir $Tr(x)$ sino también cuando introducir $\neg Tr(x)$.

En tercer lugar, las reglas L$\wedge$ y R$\vee$ son diferentes de las que escogí para CL en el primer capítulo. Pero, dada la presencia de contracción y monotonía, ambas formulaciones son equivalentes. La razón para el uso de diferentes versiones de dichas reglas es que ahora podremos probar algunos resultados de invertibilidad (ver más abajo) que serán de utilidad.

Nuestro principal objetivo es proporcionar un resultado de completitud para LK_3^+ con respecto a $\vDash_{K_3^+}$. Primero necesitamos algunas definiciones y lemas.

Definición (*Complejidad (lógica) de una fórmula*) La *complejidad (lógica)* de una fórmula ϕ (en símbolos, ϕ^C) se define inductivamente de la siguiente forma:

- $\phi^C = 0$ si ϕ es atómica.
- $\phi^C = \psi^C + 1$ si ϕ es de la forma $\neg\psi$ o de la forma $\exists x\psi$.
- $\phi^C = max\{\psi^C, \beta^C\} + 1$ si ϕ es de la forma $\psi \wedge \beta$ o de la forma $\psi \vee \beta$.

Lema 2.2.5 *(Reflexividad generalizada) El secuente $\Gamma, \phi \Rightarrow \phi, \Delta$ tiene prueba en LK_3^+ para cualquier fórmula ϕ y cualesquiera multiconjuntos Γ y Δ.*

Prueba La prueba es por una inducción (muy sencilla) sobre la complejidad de ϕ. Debido a la forma en que la negación está caracterizada en esta lógica, debemos considerar cada tipo de fórmula positiva y cada tipo de fórmula negada. ∎

Es fundamental darse cuenta de que la reflexividad generalizada no se sostiene si los secuentes iniciales sólo contienen fórmulas atómicas. Por cierto, sería igual de efectivo, aunque menos elegante, *estipular* que la reflexividad se cumple para todas las fórmulas.

La siguiente definición resultará útil en lo que sigue.

Definición (*La altura de una derivación*) La *altura* de una derivación es el mayor número de aplicaciones sucesivas de reglas en ella.

Sólo para evitar confusiones, permítaseme observar que de esta definición surge que un secuente inicial es una derivación con altura 0.

Una propiedad interesante de algunos cálculos de secuentes es que las reglas operacionales son invertibles y preservadoras de altura. Diré que una regla es *invertible* si la existencia de una prueba de la conclusión de la regla implica que existe una prueba de la premisa de la regla (o de las premisas de la regla, en caso de que haya más de una). Y decimos que una regla es *invertible y preservadora de altura* si es invertible y suponiendo que la altura de la prueba del la conclusión es n, entonces la altura de la prueba de la premisa no es mayor a n.

Por ejemplo, L$\wedge$ es invertible siempre que la siguiente afirmación condicional se cumpla: *si hay una prueba del secuente* $\Gamma, \phi \wedge \psi \Rightarrow \Delta$*, entonces hay una prueba del secuente* $\Gamma, \phi, \psi \Rightarrow \Delta$. Y L$\wedge$ es invertible y preservadora de altura siempre que la siguiente afirmación condicional se cumpla: *si hay una prueba del secuente* $\Gamma, \phi \wedge \psi \Rightarrow \Delta$ *de altura* n*, entonces hay una prueba del secuente* $\Gamma, \phi, \psi \Rightarrow \Delta$ *cuya altura no es mayor a* n. Es interesante observar que no todas las reglas de LK_3^+ son invertibles. En particular, no es difícil ver que L$\neg^{At}$ no es invertible (hay una prueba de $\neg Tr\langle\lambda\rangle \Rightarrow$, pero no hay una prueba de $\Rightarrow Tr\langle\lambda\rangle$).

Para el siguiente teorema, necesitamos introducir la noción de fórmula principal en un secuente. Cada regla tiene una (y sólo una) fórmula principal, y decimos que una fórmula ϕ es *principal* si y sólo si fue la fórmula introducida por esa regla. Luego, podemos probar el siguiente hecho:

Lema 2.2.6 *Todas las reglas operaciones de* LK_3^+ *son invertibles y preservadoras de altura, excepto* $L\neg^{At}$.

Prueba Esto puede probarse por inducción sobre la altura de las derivaciones. Aquí, para ilustrar de qué modo esto se lleva a cabo, sólo consideraré el caso de R$\neg\wedge$. Lo que necesitamos probar es la afirmación de que si hay una prueba de $\Gamma \Rightarrow \neg(\phi \wedge \psi), \Delta$ de altura n, entonces hay una prueba de $\Gamma \Rightarrow \neg\phi \vee \neg\psi, \Delta$ cuya altura no es mayor que n. Si la altura de la derivación es 0, se sigue que $\Gamma \Rightarrow \neg(\phi \wedge \psi), \Delta$ es un secuente inicial, y dado que $\neg(\phi \wedge \psi)$ no es un literal, debe haber un literal $\chi \in \Gamma \cap \Delta$. Pero esto quiere decir que $\Gamma \Rightarrow \neg\phi \vee \neg\psi, \Delta$ se sigue de $\chi \Rightarrow \chi$ por la regla de monotonía. Si la altura no es 0, debemos suponer que existe una prueba de $\Gamma \Rightarrow \neg(\phi \wedge \psi), \Delta$ cuya altura es n. Aquí tenemos dos casos. O bien $\neg(\phi \wedge \psi)$ es principal en el último paso de la derivación o no lo es. Si lo es, entonces viene de una derivación de $\Gamma \Rightarrow \neg\phi \vee \neg\psi, \Delta$ cuya altura es menor que n, ya que ninguna otra regla nos permite obtener una fórmula con esa forma, de modo que la afirmación se sigue. Si no lo es, entonces viene de una o dos premisas de la forma $\Gamma' \Rightarrow \neg(\phi \wedge \psi), \Delta'$ y $\Gamma'' \Rightarrow \neg(\phi \wedge \psi), \Delta''$ por alguna regla $\mathcal{R}$ en derivaciones de altura menor que n. En ese caso, por la hipótesis inductiva, podemos inferir que existen pruebas de $\Gamma' \Rightarrow \neg\phi \vee \neg\psi, \Delta'$ y $\Gamma'' \Rightarrow \neg\phi \vee \neg\psi, \Delta''$ cuya altura es menor que n. Aplicando la regla $\mathcal{R}$ a uno o ambos de estos secuentes, obtenemos una prueba de $\Gamma \Rightarrow \neg\phi \vee \neg\psi, \Delta$ de altura a lo sumo n.

Los demás casos son muy similares[20]. ∎

[20]Para las reglas de los cuantificadores, se necesita un poco más de trabajo, ya que

Algo interesante es que podemos mostrar que la regla L$\neg$ vale en LK_3^+, a pesar de no ser una regla básica del sistema.

$$\text{L}\neg\,\frac{\Gamma \Rightarrow \phi, \Delta}{\Gamma, \neg\phi \Rightarrow \Delta}$$

En otras palabras, la presencia de L$\neg^{At}$, la cual se aplica sólo a literales, es suficiente, junto con las otras reglas, para garantizar que L$\neg$ es admisible.

Lema 2.2.7 *La regla L$\neg$ es admisible en LK_3^+.*

Prueba La prueba es por inducción sobre la complejidad de la fórmula ϕ. Hay muchos casos para considerar, pero aquí solamente analizaré uno. Si ϕ es de la forma $\neg(\psi \vee \beta)$, entonces hay una prueba de $\Gamma \Rightarrow \neg(\psi \vee \beta), \Delta$. Dado que R$\neg\vee$ es invertible, hay una prueba de $\Gamma \Rightarrow \neg\psi \wedge \neg\beta, \Delta$. Y dado que R$\wedge$ es invertible, $\Gamma \Rightarrow \neg\psi, \Delta$ y $\Gamma \Rightarrow \neg\beta, \Delta$ también tienen prueba. Por la hipótesis inductiva (aplicada dos veces) y la invertibilidad de L$\neg\neg$, hay pruebas de $\Gamma, \psi \Rightarrow \Delta$ y $\Gamma, \beta \Rightarrow \Delta$. Finalmente, obtenemos una prueba de $\Gamma, \psi \vee \beta \Rightarrow \Delta$ por L$\vee$ y por L$\neg\neg$, una prueba de $\Gamma, \neg\neg(\psi \vee \beta) \Rightarrow \Delta$. ∎

Ya que la presentación del sistema LK_3^+ tiene LW, RW, LC, RC como reglas primitivas, no es necesario demostrar que son admisibles. Además, dado que Γ y Δ son multiconjuntos, tampoco tenemos que el demostrar la admisibilidad de otras reglas estructurales como permutación y asociatividad, que dependen de la clase de cosas que Γ y Δ son.

Ahora pasemos a considerar las propiedades de corrección y completitud.

Teorema 2.2.8 *(Corección) Si existe una prueba del secuente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ en LK_3^+, entonces $\Gamma \vDash_{K_3^+} \Delta$.*

Prueba El lector puede verificar que todos los secuentes iniciales de LK_3^+ son K_3^+-válidos y que todas las reglas de LK_3^+ preservan la validez tal como fue definida para K_3^+. ∎

El hecho de que la regla R$\neg$ no forme parte de LK_3^+ es crucial aquí. Porque si lo fuera, LK_3^+ sería un sistema incorrecto. Hay interpretaciones $v^{K_3^+}$ y fórmulas ϕ tal que tanto $v^{K_3^+}(\phi) = \frac{1}{2}$ como $v^{K_3^+}(\neg\phi) = \frac{1}{2}$. Por lo tanto, $\nvDash_{K_3^+} \phi \vee \neg\phi$. Pero si R$\neg$ está disponible, entonces el secuente $\Rightarrow \phi \vee \neg\phi$ es demostrable en LK_3^+.

debemos probar primero que las variables ligadas pueden ser renombradas y que podemos sustituir términos sin alterar la validez de los argumentos. Las pruebas de estos hechos son sencillas pero tediosas. Los detalles pueden encontrarse en [60].

Como de costumbre, probar la completitud es una tarea un poco más difícil. La prueba puede llevarse a cabo por el método de los árboles de reducción. La idea es que para cualquier secuente dado podemos construir un árbol en etapas mediante la aplicación de las reglas operacionales "a la inversa", esto es, del secuente que es la conclusión de la regla, ramificándose hacia arriba si es necesario, al secuentes (o los secuentes) que es (son) la(s) premisa(s) de la regla. El árbol será o bien una prueba del secuente dado o se utilizará para definir un contramodelo del secuente.

Teorema 2.2.9 *(Completitud) Si* $\Gamma \models_{K_3^+} \Delta$*, entonces hay una prueba del secuente* $\Gamma \Rightarrow \Delta$ *en* LK_3^+*.*

Esquema de prueba Es suficiente demostrar que para cada secuente $\Gamma \Rightarrow \Delta$, o bien hay una prueba de este secuente en LK_3^+ o bien $\Gamma \not\models_{K_3^+} \Delta$. La prueba consta de dos partes. En la primera tenemos que mostrar que para cada secuente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ es posible construir un árbol de tal manera que, en caso de que sea finito, da una prueba del secuente. En la segunda parte tenemos que demostrar que si el árbol resultante para $\Gamma \Rightarrow \Delta$ no es finito, entonces es posible definir un modelo para K_3^+ tal que $\Gamma \not\models_{K_3^+} \Delta$. Dado que la prueba es larga y que estos métodos son familiares, omitiré los detalles. ∎

De hecho, algo más fuerte puede probarse: que si $\Gamma \models_{K_3^+} \Delta$, entonces hay una prueba del secuente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ en LK_3^+ en la que no se utiliza la regla de corte. Un corolario atractivo es el siguiente:

Corolario 2.2.10 *(Corte es eliminable) La regla de corte es admisible en el sistema* LK_3^+*.*

Esto se sigue del hecho de que no es necesario utilizar la regla de corte en la prueba de completitud. En otras palabras, se demostró que para cada secuente $\Gamma \Rightarrow \Delta$, o bien hay una prueba de este secuente en la que no se apela a la regla de corte o bien es posible construir una interpretación de K_3^+ que sirve como contramodelo a este secuente.

Sin embargo, el hecho de que corte sea una regla eliminable no trae, como sí lo hace en muchos sistemas, la propiedad de la subfórmula (*the subformula property*). Esto es debido a que las reglas para el predicado veritativo pueden reducir la complejidad de las fórmulas involucradas, en el sentido de que podría haber una fórmula en el secuente inferior que no sea una subfórmula de ninguna fórmula del secuente superior.

¿Qué hay de la noción de verdad? Voy a terminar esta sección haciendo notar que el predicado de verdad se comporta como es esperable en estas teorías. No sólo es el predicado de verdad transparente, sino que también respeta las cláusulas composicionales de Tarski:

Proposición 2.2.11 (Transparencia) *Para cualquier fórmula ϕ, $Tr\langle\phi\rangle$ es intersustituible por ϕ. Más formalmente, sea $\Gamma \Rightarrow \Delta$ un secuente que tiene una prueba en LK_3^+. Luego, $\Gamma^* \Rightarrow \Delta^*$ también tiene una prueba, donde Γ^* (Δ^*) es el resultado de reemplazar al menos una ocurrencia de ϕ ($Tr\langle\phi\rangle$) por $Tr\langle\phi\rangle$ (ϕ) en Γ (Δ).*

Proposición 2.2.12 (Composicionalidad) *El predicado veritativo es composicional en LK_3^+. Esto es, los siguientes secuentes tienen una prueba en LK_3^+:*

- $Tr\langle\neg\phi\rangle \Leftrightarrow \neg Tr\langle\phi\rangle$.
- $Tr\langle\phi \wedge \psi\rangle \Leftrightarrow Tr\langle\phi\rangle \wedge Tr\langle\psi\rangle$.
- $Tr\langle\phi \vee \psi\rangle \Leftrightarrow Tr\langle\phi\rangle \vee Tr\langle\psi\rangle$.
- $Tr\langle\forall x\phi\rangle \Leftrightarrow \forall x Tr\langle\phi\rangle$.
- $Tr\langle\exists x\phi\rangle \Leftrightarrow \exists x Tr\langle\phi\rangle$.

¿Es todo esto suficiente? El problema es, como veremos en breve, que no hay un condicional razonable en esta teoría (y en teorías similares). Así que, encaremos este problema ahora.

2.3. Un nuevo condicional: Field y la semántica de revisión

El principal defensor de la teoría paracompleta de la verdad que voy a presentar en esta sección es Hartry Field. En los últimos años Field ha desarrollado un enfoque que -según dice- resuelve con éxito no sólo todas las paradojas la verdad, sino también la paradoja de Sorites y las paradojas de la teoría ingenua de propiedades[21]. La idea fundamental detrás de este enfoque es la misma que en el enfoque de Kripke: el principio responsable de la producción de paradojas es la ley de tercero excluído.

La teoría de Field puede ser entendida como una extensión de la teoría desarrollada por Kripke. Tal vez los dos principales problemas de la teoría de Kripke son:

[21] Por *teoría ingenua de propiedades* entiendo, básicamente, una teoría que es como la teoría de conjuntos ingenua excepto que el axioma de extensionalidad no vale aunque el axioma de comprensión irrestricto sí lo hace. Field quiere mantener ZF (o ZFC) intacta (no hay que meterse con la matemática!), pero todavía existe el riesgo de encontrarse con una paradoja análoga a la de Russell para propiedades, en lugar de conjuntos. Una discusión de este asunto puede encontrarse en [37].

1. la falta de un condicional adecuado, y

2. la falta de recursos expresivos para caracterizar semánticamente las oraciones que no son verdaderas ni falsas.

Lo que causa el primer problema es el hecho de que la teoría utiliza el esquema de valuación fuerte de Kleene, en el que no hay oraciones válidas. Esto es particularmente preocupante para una teoría de la verdad, porque la ausencia de oraciones válidas implica que ningún condicional de la forma *si ϕ, entonces ϕ* será válido, y una consecuencia de esto es que el esquema T no se cumple. Es decir, aunque el predicado de verdad es transparente en el sentido de que ϕ y *ϕ es verdadera* son intersustituibles, la teoría no podrá declarar como válida la equivalencia entre estas dos oraciones. Un claro ejemplo de esto es la oración del mentiroso λ. El valor semántico de λ es $\frac{1}{2}$, por lo que el valor semántico de la equivalencia λ *si y sólo si* $Tr\langle\lambda\rangle$ será también $\frac{1}{2}$.

Téngase en cuenta que, en este contexto, la falla del principio de tercero excluido y la falla del principio *si ϕ, entonces ϕ* son, básicamente, el mismo fenómeno. Podemos definir todos los condicionales de la forma *si ϕ, entonces ψ* como *no ϕ o ψ*, por lo que la falla de *ϕ o no ϕ* implica la falla de *si ϕ, entonces ϕ*. O, para poner las cosas de otra manera, podemos decir que en esta teoría la oración de Curry no es más que una versión disyuntiva de la oración del mentiroso. No hay, pues, ningún conectivo condicional apropiado en la teoría de la verdad de Kripke.

En cuanto al segundo problema, esto es, la falta de recursos expresivos para caracterizar las oraciones que no son verdaderas ni falsas, la cuestión es que la teoría de Kripke está expresada en un lenguaje que no puede especificar adecuadamente el estatus semántico de algunas oraciones expresables en ese mismo lenguaje. Un ejemplo notable de esto es de nuevo la oración λ. No es posible expresar con verdad en el lenguaje que la oración λ no es verdadera ni falsa. El modo más obvio de expresar esta idea es por medio de la fórmula $\neg Tr\langle\lambda\rangle \wedge \neg Tr\langle\neg\lambda\rangle$, pero esta oración recibe el valor $\frac{1}{2}$ en la teoría de Kripke, por lo que no es ni verdadera ni falsa también. Por otra parte, no hay nada en el lenguaje de la teoría capaz de cumplir el papel de un "operador clasificador de oraciones".

No es posible resolver esta dificultad fácilmente. Si decidimos añadir un operador de este tipo como expresión primitiva, debemos asegurarnos de que dicho operador no genere nuevas paradojas. Si un operador tal es consistentemente definible dependerá del tipo de esquema de valuación empleado. La teoría de la verdad de Kripke puede formularse utilizando diferentes esquemas de valuación. Si se utiliza el esquema de Kleene débil, de hecho es posible introducir un operador en el lenguaje[22]. Sin embargo, hemos visto que hay buenas razones para preferir otros esquemas de valuación, como el esquema fuerte de Kleene. Por desgracia, resulta que no hay una forma sencilla de añadir un operador de este tipo sobre este esquema sin generar una inconsistencia. Pues supongamos que caracterizamos un operador $\mathcal{U}$ estipulando que para cada valuación v se cumple lo siguiente:

$$v(\mathcal{U}\phi) = \begin{cases} 1 & \text{si } v(\phi) = \frac{1}{2} \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Una vez que este operador está disponible en el lenguaje es posible decir de la oración del mentiroso que no es ni verdadera ni falsa: $\mathcal{U}\lambda$. Sin embargo, el costo es alto. Pues sea δ la oración $\mathcal{U}Tr\langle\delta\rangle \vee \neg Tr\langle\delta\rangle$. Es fácil ver que no hay ninguna asignación de valores de verdad consistente que le dé un valor a δ si $v(\mathcal{U}Tr\langle\delta\rangle \vee \neg Tr\langle\delta\rangle) = max\{v(\mathcal{U}Tr\langle\delta\rangle), v(\neg Tr\langle\delta\rangle)\}$, que es como está definida $\vee$ en el esquema fuerte de Kleene.

La idea de Field es introducir un operador de determinación al lenguaje. Este operador se puede definir de una manera más o menos natural a partir del condicional de su teoría y es posible demostrar que no produce ninguna inconsistencia nueva. Por otra parte, una vez que tengamos el operador de determinación disponible, podremos clasificar la oración del mentiroso y otras oraciones similares como indeterminadas dentro del lenguaje.

2.3.1. Cómo combinar secuencias de revisión con puntos fijos

Al igual que antes, sea $\mathcal{L}$ sea un lenguaje capaz de codificar su propia sintaxis, y ahora sea $\mathcal{L}^+$ el resultado de añadir predicado de verdad $Tr(x)$ *y un nuevo operador* $\rightarrow$ a $\mathcal{L}$. La ingeniosa estrategia de Field para interpretar todas las oraciones de $\mathcal{L}^+$ consiste en combinar la construcción de puntos fijos de Kripke con secuencias de revisión, una técnica utilizada por aquellos que suscriben a la Teoría de revisión de la verdad (véase, por ejemplo, [43])[23]. Hay dos diferencias fundamentales, sin embargo, entre este último enfoque y la propuesta de Field. En primer lugar, en lugar de utilizar secuencias de revisión para proporcionar una interpretación para el predicado de verdad,

[22] Véase el capítulo 2 de [43] para los detalles

[23] Field ha presentado otras dos formas de desarrollar su teoría. En una de ellas utiliza una semántica de vecindades (*neighborhood semantics*) y en la otra utiliza una semántica algebraica (ambas pueden consultarse en [37]). Para nuestros propósitos actuales podemos ignorarlas.

Field las utiliza para construir un condicional razonable (por lo que el predicado de verdad sigue interpretándose usando la semántica de punto fijo). En segundo lugar, en vez de utilizar un esquema bivalente, las secuencias de revisión para el condicional se basan en una semántica de tres valores $\{1, \frac{1}{2}, 0\}$[24].

Más específicamente, la idea es construir dos secuencias, una secuencia de interpretaciones para el condicional, y otra secuencia de interpretaciones (que, de hecho, serán puntos fijos) para el resto de las expresiones del lenguaje. La primera secuencia se inicia con una interpretación que asigna a todas las fórmulas de la forma $\phi \to \psi$ el valor $\frac{1}{2}$. La segunda secuencia se inicia desde el punto fijo mínimo de Kripke. Para obtener los restantes miembros de la secuencia de interpretaciones para el condicional, aplicamos una regla de revisión que asigna el valor 1 a un condicional $\phi \to \psi$ si a partir de algún punto de la secuencia, el valor de ϕ es menor o igual que el valor de ψ. Por otro lado, para obtener cada miembro de la secuencia de puntos fijos aplicamos la cláusulas semánticas para K_3 junto con el hecho de que $\mathrm{Tr}(x)$ es un predicado transparente. El valor final de una fórmula ϕ (que denotamos $|\phi|$) viene dado por la secuencia de puntos fijos. Para obtener el valor final de ϕ tenemos que determinar en qué valor se estabiliza ϕ en la secuencia (si es que se estabiliza en alguno).

Usaré la letra P para las interpretaciones que son puntos fijos y S para representar las interpretaciones para el nuevo condicional. La idea es que P^α y S^α (para cada ordinal α) son funciones que asignan un valor semántico en $\{1, \frac{1}{2}, 0\}$ a las fórmulas del lenguaje $\mathcal{L}^+$[25]. Una manera clara de comprender la interacción entre las dos secuencias está dada por la imagen de abajo, debida a Yablo [110].

[24]En realidad, el enfoque de Field también puede estar basado en una semántica infinitamente valuada.

[25]Como en el capítulo 1, simplificaré las cosas omitiendo la función que asigna valores a las variables del lenguaje. Así, en realidad, son P y S *junto con una función de asignación de valores a las variables* las que interpretan todas las fórmulas del lenguaje.

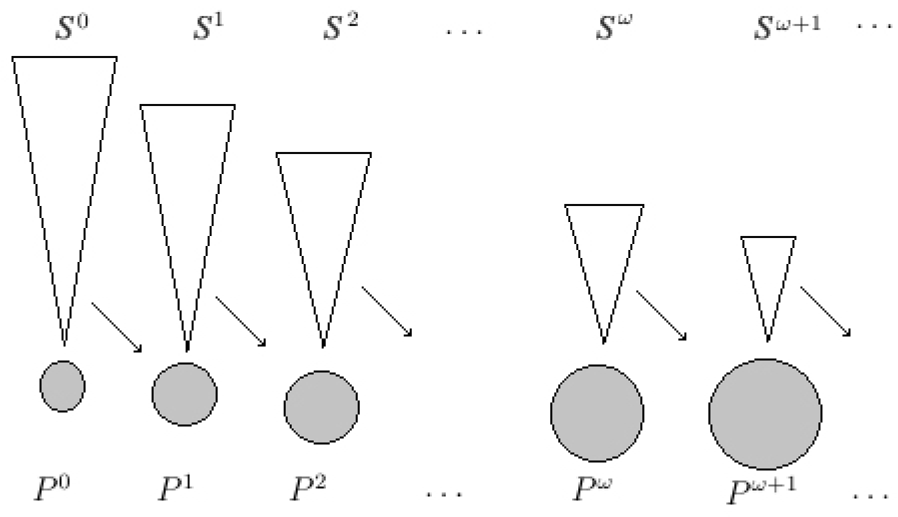

Figura 2.1: La doble secuencia

Estipulamos que en S^0 el valor de $\phi \to \psi$ es $\frac{1}{2}$ para cualquier ϕ y cualquier ψ de $\mathcal{L}^+$. También se estipulamos que P^0 es el punto fijo mínimo de Kripke[26]. Esta combinación de secuencias de revisión y puntos fijos involucra tres procedimientos diferentes. El primero nos permite ir desde cada S^α a cada P^α. El segundo nos permite construir cada S^α a partir de P^βs anteriores en la secuencia (en este caso es relevante el tipo de ordinal que sea α, ya que tendremos diferentes instrucciones para los ordinales sucesores y para los ordinales límite). Y el tercero es el que nos permite establecer el valor final de una fórmula observando el modo en que se comporta a través de estas secuencias.

Voy a comenzar explicando cómo funciona el primer procedimiento. Como he señalado, las interpretaciones S^α asignan algún valor en $\{1, \frac{1}{2}, 0\}$ a las fórmulas de la forma $\phi \to \psi$, y en particular S^0 es una interpretación que asigna el valor $\frac{1}{2}$ a todas estas fórmulas. Obtenemos P^0 a partir de S^0(y, en general, se obtiene P^α a partir de S^α) aplicando las cláusulas Kleene-Kripke. Diré que una interpretación v es *Kleene fuerte-Kripke* (interpretación KK, para abreviar) si v es una interpretación K_3 y además satisface la siguiente condición para toda fórmula ϕ:

$$v(\phi) = v(Tr\langle\phi\rangle).$$

[26]Desde un punto de vista técnico, no hay nada que nos impida elegir un punto fijo distinto del mínimo para iniciar la secuencia. Sin embargo, es difícil encontrar razones conceptuales para hacerlo.

De esta forma, dada una interpretación S^α -la cual proporciona el valor de todas las fórmulas de la forma $\phi \to \psi$-, podemos calcular el valor del resto de las fórmulas utilizando las condiciones de verdad dadas por el esquema fuerte de Kleene junto con la condición para el predicado veritativo $Tr(x)$. La interpretación resultante P^α será una interpretación KK.

En cuanto a la construcción de S^α a partir de P^βs previos (donde $\beta < \alpha$), usamos la siguiente definición.

Definición (*Interpretaciones S^α para los condicionales*)

Si α es un ordinal sucesor β+1, entonces:

$$S^{\beta+1}(\phi \to \psi) = \begin{cases} 1 & \text{si } P^\beta(\phi) \leq P^\beta(\psi) \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

If α es un ordinal límite λ[27], entonces:

$$S^\lambda(\phi \to \psi) = \begin{cases} 1 & \text{si } (\exists\gamma < \lambda)(\forall\beta \in [\gamma, \lambda))(P^\beta(\phi) \leq P^\beta(\psi)) \\ 0 & \text{si } (\exists\gamma < \lambda)(\forall\beta \in [\gamma, \lambda))(P^\beta(\phi) > P^\beta(\psi)) \\ \frac{1}{2} & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Informalmente hablando, cuando una condición se evalúa en un ordinal sucesor β+1, sólo tenemos en cuenta los valores del antecedente y el consecuente en el ordinal β inmediatamente anterior a β+1. Y cuando un condicional se evalúa en un ordinal límite λ, es necesario tener en cuenta los valores del antecedente y el consecuente en un conjunto infinito de los ordinales anteriores $\beta < \lambda$. Más específicamente, si para todo ordinal β mayor o igual que algún ordinal γ se cumple que el valor de ϕ en β es menor o igual que el valor de ψ en β, entonces el condicional será verdadero en el ordinal límite. Por otro lado, si para todo ordinal β mayor o igual que algún ordinal γ se cumple que el valor de ϕ en β es mayor que el valor de ψ en β, entonces el condicional será falso en el ordinal límite. En cualquier otro caso, el condicional no será verdadero ni falso en el ordinal límite.

Todavía no he explicado cómo esta construcción asigna un "valor final" a las oraciones de $\mathcal{L}^+$. Un hecho importante que se volverá claro unas líneas más abajo es no podemos utilizar un argumento de punto fijo para la construcción. La secuencia de puntos fijos generados por la secuencia de interpretaciones bajo consideración no es monótona. Como veremos, algunas

[27]Espero que el contexto sea suficientemente claro para distinguir el ordinal límite λ de la oración del mentiroso λ.

oraciones condicionales entran y salen de la extensión (y la antiextensión) del predicado de verdad. Como consecuencia de ello, en lugar de utilizar la noción de un punto fijo para definir el valor final de las oraciones, Field utiliza una noción proveniente de la teoría de la revisión, la de la estabilidad de una fórmula a través de una secuencia de revisión. Intuitivamente, si el valor de una fórmula ϕ en los puntos fijos P^{α} es eventualmente siempre 1 (0), es decir, si se estabiliza en 1 (0), el valor final de ϕ es 1 (0). Sin embargo, si se estabiliza en $\frac{1}{2}$ o fluctúa entre diferentes valores, entonces su valor final es $\frac{1}{2}$. Así que, diremos oficialmente que el *valor final de una fórmula* ϕ, que denotaremos $|\phi|$ se define como sigue (donde *lim* es el límite de una función):

Definición (*El valor final de una fórmula*)

$$|\phi| = \begin{cases} lim_{P^{\alpha}} & \text{si el límite existe} \\ \frac{1}{2} & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Habiendo definido en qué consiste el valor final de una fórmula, ahora podemos decir en qué consiste la validez de un argumento (o una fórmula). Diré que una inferencia de Γ a ϕ es *válida* ($\Gamma \vDash \phi$) si y sólo si preserva el valor final 1 y que una fórmula ϕ es *válida* ($\vDash \phi$) si tiene valor final 1[28].

Será útil analizar algunos ejemplos.

Ejemplo (*Una oración condicional verdadera*)

Consideremos la oración $2 = 2 \to (2 = 2 \to 2 = 2)$[29]. Obviamente, el valor de esta oración en S^0 es $\frac{1}{2}$, ya que es de la forma $\phi \to \psi$. Dado que 1 es un ordinal sucesor, y que la fórmula es un condicional, para determinar su valor en S^1, tenemos que saber cuáles son los valores del antecedente y el consecuente en P^0. Puesto que P^0 es el punto fijo mínimo de Kripke, sabemos que $P^0(2 = 2) = 1$ y $P^0(2 = 2 \to 2 = 2) = \frac{1}{2}$, pues P^0 no asigna nuevos valores a los condicionales. Luego, $P^0(2 = 2) > P^0(2 = 2 \to 2 = 2)$, lo cual significa que $S^1(2 = 2 \to (2 = 2 \to 2 = 2)) = 0$. Pero dado que $P^0(2 = 2) = 1 \leq P^0(2 = 2)$, sí tenemos $S^1(2 = 2 \to 2 = 2) = 1$. Por tanto, $P^1(2 = 2) \leq P^1(2 = 2 \to 2 = 2)$, y por la regla de revisión para ordinales sucesores, esto implica $S^2(2 = 2 \to (2 = 2 \to 2 = 2)) = 1$. También queda claro que para cada ordinal $\alpha > 1$, $P^{\alpha}(2 = 2 \to (2 = 2 \to 2 = 2)) = 1$. En consecuencia, su valor final será 1.

[28] Aquí sólo consideraré argumentos con una única conclusión, para que mi presentación sea fiel a la de Field.

[29] Asumiré temporariamente que $\mathcal{L}^+$ contiene expresiones aritméticas, tales como numerales que denotan números y un predicado de identidad.

Ejemplo (*La paradoja del mentiroso y la paradoja de Curry*) Veamos qué ocurre con las paradojas semánticas usuales. La oración del mentiroso λ no presenta problemas. Adquiere el valor $\frac{1}{2}$ en el punto fijo mínimo P^0 y mantiene su valor a lo largo de la secuencia de interpretaciones, de modo que su valor final será $\frac{1}{2}$ (más formalmente, $|\lambda| = \frac{1}{2}$)[30]. La oración de Curry recibe un tratamiento diferente. Una vez más, sea κ la oración $Tr\langle\kappa\rangle \to \perp$. Dado que κ es una oración condicional, $S^0(\kappa) = \frac{1}{2}$. Y dado que P^0 es un punto fijo, tenemos $P^0(\kappa) = P^0(Tr\langle\kappa\rangle) = \frac{1}{2}$. Además, sabemos que $P^0(\perp) = 0$, de modo que $P^0(Tr\langle\kappa\rangle) > P^0(\perp)$. Por la cláusula para ordinales sucesores, esto quiere decir que $S^1(Tr\langle\kappa\rangle \to \perp) = 0$. Por tanto, dado que P^1 es un punto fijo, sabemos que $P^1(\kappa) = P^1(Tr\langle\kappa\rangle) = P^1(\perp) = 0$. En consecuencia, $S^2(Tr\langle\kappa\rangle \to \perp) = 1$. La secuencia continúa de la siguiente forma: $S^3(Tr\langle\kappa\rangle \to \perp) = 0$, $S^4(Tr\langle\kappa\rangle \to \perp) = 1$, $S^5(Tr\langle\kappa\rangle \to \perp) = 0$, y así sucesivamente. Cuando llegamos al primer ordinal no finito, tenemos $S^\omega(Tr\langle\kappa\rangle \to \perp) = \frac{1}{2}$, $S^{\omega+1}(Tr\langle\kappa\rangle \to \perp) = 0$, $S^{\omega+2}(Tr\langle\kappa\rangle \to \perp) = 1$, y así sucesivamente. La fórmula κ es inestable a través de la secuencia de ordinales sucesores y adquiere el valor $\frac{1}{2}$ en ordinales límite, por lo que $|\kappa| = \frac{1}{2}$.

Además de lidiar adecuadamente con las paradojas tradicionales, la construcción de Field tiene algunas propiedades interesantes que vale la pena notar. Tal vez la más importante está encapsulada en lo que él llama 'teorema fundamental', según el cual hay ordinales en los que cada fórmula del lenguaje adquiere su valor final. De hecho, el teorema fundamental establece algo aún más fuerte (todos los teoremas de abajo se pueden encontrar en [37]):

Teorema 2.3.1 (El teorema fundamental) *Para cada ordinal α, hay ordinales $\beta > \alpha$ tales que para cada fórmula ϕ de $\mathcal{L}^+$, se cumple que:*

$$P^\beta(\phi) = |\phi|.$$

Prueba Véase [37], pp.257-58 para una prueba del teorema. ∎

El teorema fundamental es extremadamente útil para determinar la validez (e invalidez) de algunas inferencias y fórmulas. Por ejemplo, usando el teorema fundamental podemos dar argumentos muy simples que muestran que la regla de *modus ponens* y la metarregla de razonamiento por casos son formas válidas de razonamiento.

[30]El caso de la oración del honesto es similar es similar, ya que la secuencia de P^αs comienza con el punto fijo mínimo de Kripke.

Ejemplo (*Modus ponens is válido*) Supongamos que $|\phi| = |\phi \to \psi| = 1$. Por el teorema fundamental, debe existir un ordinal β tal que para cada ordinal $\alpha > \beta$, se cumple que $P^\alpha(\phi) = 1$, y debe existir un ordinal γ tal que para cada ordinal $\alpha > \gamma$, se cumple que $P^\alpha(\phi \to \psi) = 1$. Supongamos (sin pérdida de generalidad) que $\beta > \gamma$. Podemos inferir que $P^\beta(\phi \to \psi) = P^{\beta+1}(\phi \to \psi) = 1$. Esto quiere decir que $S^{\beta+1}(\phi \to \psi) = 1$. Pero esto sólo puede ocurrir si $P^\beta(\phi) \leq P^\beta(\psi)$. Y dado que $P^\beta(\phi) = 1$, también se da que $P^\beta(\psi) = 1$. Asimismo, para cada $\alpha \geq \beta$, $P^\alpha(\psi) = 1$, de modo que podemos concluir que $|\psi| = 1$. Por lo tanto, *modus ponens* preserva verdad.

Ejemplo (*Razonamiento por casos es válido*) Nótese que una disyunción $\phi \vee \psi$ podría tener valor final 1 simplemente porque en cada ordinal uno de sus disyuntos tiene valor 1 (mientras que el otro disjunto podría tener un valor diferente). Es decir, no es inmediato que a partir de $|\phi \vee \psi| = 1$, sea posible inferir $|\phi| = 1$ o $|\psi| = 1$. Así que, si $|\phi| \neq 1$ y $|\psi| \neq 1$, entonces no sólo estaríamos en condiciones de demostrar $\phi \vDash \bot$ y $\psi \vDash \bot$, sino también $\vDash \phi \vee \psi$ y $\nvDash \bot$, lo que nos proporcionaría un contraejemplo a la metarregla de razonamiento por casos. Sin embargo, dado $|\phi \vee \psi| = 1$, por el teorema fundamental sabemos que existe un ordinal α tal que $P^\alpha(\phi \vee \psi) = 1$. Ya que P^α es una interpretación KK, $P^\alpha(\phi) = 1$ o $P^\alpha(\psi) = 1$. Y de nuevo por el teorema fundamental, podemos inferir que $|\phi| = 1$ o $|\psi| = 1$. Por lo tanto, razonamiento por casos vale.

Un par de las virtudes de esta teoría que he anticipado y que ahora estamos en condiciones de presentar son las siguientes:

Teorema 2.3.2 (Intersustitutividad de equivalentes) *Si ϕ_1 y ϕ_2 son fórmulas de $\mathcal{L}^+$ (con las mismas variables libres), $\phi(\phi_1)$ es una fórmula que tiene a ϕ_1 como subfórmula, $\psi(\phi_2)$ es la fórmula que resulta de reemplazar una o más ocurrencias de ϕ_1 en ψ por ϕ_2, y $|\phi_1 \leftrightarrow \phi_2| = 1$, entonces $|\psi(\phi_1) \leftrightarrow \psi(\phi_2)| = 1$.*

Prueba La prueba es por inducción sobre la complejidad de las fórmulas. Los detalles pueden encontrarse en [37]. ∎

De esto se sigue que el predicado veritativo es transparente. Es más, usando este hecho podemos probar que:

Teorema 2.3.3 (El esquema T) *Para cada fórmula ϕ de $\mathcal{L}^+$, se cumple que:*

$$|Tr\langle\phi\rangle \leftrightarrow \phi| = 1.$$

Prueba Simplemente necesitamos cerciorarnos de que para cada fórmula ϕ de $\mathcal{L}^+$, se cumple que $|\phi \rightarrow \phi| = 1$. Dado que el predicado veritativo es transparente, el teorema vale. ■

En este punto es importante preguntarse qué parte de la composicionalidad del condicional material se ha perdido. Sorprendentemente, no mucho, como la siguiente proposición muestra:

Proposición 2.3.4 (*Semicomposicionalidad de* $\rightarrow$) *Para cualesquiera fórmulas ϕ y ψ en $\mathcal{L}^+$:*

- *Si $|\phi| = 0$ o $|\psi| = 1$, entonces $|\phi \rightarrow \psi| = 1$.*
- *Si $|\phi| = 1$ y $|\psi| = 0$, entonces $|\phi \rightarrow \psi| = 0$.*
- *Si $|\phi| = 1$ y $|\psi| = \frac{1}{2}$ o $|\phi| = \frac{1}{2}$ y $|\psi| = 0$, entonces $|\phi \rightarrow \psi| = \frac{1}{2}$ o $|\phi \rightarrow \psi| = 0$.*
- *Si $|\phi| = |\psi| = \frac{1}{2}$, entonces $|\phi \rightarrow \psi| = 1$ o $|\phi \rightarrow \psi| = \frac{1}{2}$.*

Prueba Los primeros dos hechos son inmediatos. Para el cuarto, supongamos que $|\phi| = |\psi| = \frac{1}{2}$. Por el teorema fundamental, existen ordinales α arbitrariamente grandes tales que $P^\alpha(\phi) = P^\alpha(\psi)$. Como consecuencia, existen ordinales $\alpha+1$ arbitrariamente grandes tales que $P^{\alpha+1}(\phi \rightarrow \psi) = 1$, de modo que $|\phi \rightarrow \psi| \neq 0$. La prueba del tercer hecho es similar a esta última. ■

Otra virtud importante del enfoque de Field es que dada una interpretación aceptable para el lenguaje base $\mathcal{L}$, es posible construir una interpretación ampliada para el lenguaje extendido $\mathcal{L}^+$ que asigna el mismo valor semántico que la primera interpretación a todas las fórmulas de $\mathcal{L}$. Esto significa que la teoría extendida con $Tr(x)$ y $\rightarrow$ es conservativa sobre la teoría de base. En otras palabras, en contextos no paradójicos, podemos seguir utilizando inferencias clásicamente válidas, por lo que la lógica clásica es recapturada en cierto modo. Un poco más formalmente:

Teorema 2.3.5 (Recaptura clásica) *Sean ϕ y ψ fórmulas de $\mathcal{L}^+$ tales que $|\phi \vee \neg\phi| = |\psi \vee \neg\psi| = 1$. Luego, $|(\phi \supset \psi) \leftrightarrow (\phi \rightarrow \psi)| = 1$.*

Prueba Véase [37]. ■

Este importante resultado implica que $\rightarrow$ coincide con el condicional material $\supset$ cuando nos limitamos a razonamientos que únicamente involucran fórmulas que satisfacen la ley de tercero excluido. Esto debería ser suficiente para disipar cualquier sospecha de que renunciar a esta ley es incompatible con la práctica matemática o con la práctica científica en general. Mientras no haya paradojas, podemos aplicar con seguridad la lógica clásica en este enfoque.

Por otra parte, aún cuando razonamos en contextos posiblemente paradójicos, el condicional caracterizado por Field es relativamente fuerte. Sólo para dar una idea de qué tan fuerte es, ofreceré una lista incompleta de *leyes* satisfechas por el condicional (los nombres que escogí son más o menos arbitrarios):

$\vDash \phi \rightarrow \phi$	*identidad*
$\vDash \phi \wedge \psi \rightarrow \psi$	$\wedge$-*elim*
$\vDash \phi \rightarrow \phi \vee \psi$	$\vee$-*intro*
$\vDash \phi \leftrightarrow \neg\neg\phi$	*doble negación*
$\vDash (\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\phi)$	*contraposición*
$\vDash \phi_1 \wedge (\phi_2 \vee \psi) \leftrightarrow (\phi_1 \wedge \phi_2) \vee (\phi_1 \wedge \psi)$	*distributividad*
$\vDash \neg(\phi \wedge \psi) \leftrightarrow \neg\phi \vee \neg\psi$	*De Morgan*$_1$
$\vDash \neg(\phi \vee \psi) \leftrightarrow \neg\phi \wedge \neg\psi$	*De Morgan*$_2$
$\vDash \forall x\phi \rightarrow \phi(x/t)$	$\forall$-*elim*
$\vDash \phi(x/t) \rightarrow \exists x\phi$	$\exists$-*intro*
$\vDash \forall x\phi \leftrightarrow \neg\exists x\neg\phi$	*interdefinibilidad*$_1$-$\forall - \exists$
$\vDash \exists x\phi \leftrightarrow \neg\forall x\neg\phi$	*interdefinibilidad*$_2$-$\forall - \exists$
$\vDash \forall x(\phi \vee \psi(x)) \leftrightarrow \phi \vee \forall x\psi(x)$ (cuando x no está libre en ϕ)	$\forall$ *sobre* $\vee$

Además, el condicional también satisface las siguientes *reglas*:

$\phi \rightarrow \psi, \phi \vDash \psi$	*modus ponens*
$\phi_1 \rightarrow \phi_2, \phi_2 \rightarrow \psi \vDash \phi_1 \rightarrow \psi$	*transitividad débil*
$\phi_1 \rightarrow \phi_2, \phi_1 \rightarrow \psi \vDash \phi_1 \rightarrow \phi_2 \wedge \psi$	$\wedge$-*intro*
$\phi_1 \rightarrow \psi, \phi_2 \rightarrow \psi \vDash \phi_1 \vee \phi_2 \rightarrow \psi$	$\vee$-*elim*
$\neg(\phi \supset \psi) \vDash \neg(\phi \rightarrow \psi)$	*regla de herradura negada*
$\phi \supset \psi \vDash \phi \rightarrow \psi$	*regla de herradura afirmada*
$\phi \wedge \neg\phi \vDash \psi$	*explosión*
$\forall x(\phi \rightarrow \psi) \vDash \forall x\phi \rightarrow \forall x\psi$	$\forall$ *sobre* $\rightarrow$
$\forall x(\phi \rightarrow \psi) \vDash \exists x\phi \rightarrow \exists x\psi$	$\forall - \exists$ *sobre* $\rightarrow$
$\forall x(\phi \rightarrow \psi(x)) \vDash \phi \rightarrow \forall x\psi(x)$ (cuando x no está libre en ϕ)	
$\forall x(\phi(x) \rightarrow \psi) \vDash \exists x\phi(x) \rightarrow \psi$ (cuando x no está libre en ψ)	

He dejado de lado otros principios, en especial los relacionados con los cuantificadores, ya que tendremos la oportunidad de analizar el tema de la cuantificación restringida más tarde.

En suma, parece que la teoría de Field es un gran avance en lo que respecta al proyecto de dar una teoría de la verdad que contenga un condicional fuerte y que no sea susceptible a la paradoja de Curry.

2.3.2. ¿Es $\rightarrow$ un condicional plausible?

Sabemos que dado un predicado veritativo transparente, cualquier condicional que satisfaga *modus ponens* no obedecerá otros principios clásicamente válidos, como prueba condicional, contracción, *pseudo modus ponens*, entre otras cosas. Así, dado que la teoría de Field es consistente, sabemos que hay oraciones ϕ y ψ tal que:

$\phi \nvDash \psi$, pero $\nvDash \phi \rightarrow \psi$	*prueba condicional*
$\phi \rightarrow (\phi \rightarrow \psi) \nvDash \phi \rightarrow \psi$	*contracción*
$\nvDash \phi \wedge (\phi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi$	*pseudo modus ponens*

Este es un costo necesario para evitar paradojas relacionadas con la de Curry. Sin embargo, hay otros principios clásicamente válidos que fallan para el condicional de Field y que no están inmediatamente relacionados con la generación de paradojas. Por ejemplo, los siguientes principios no se cumplen para $\rightarrow$:

$\phi_1 \rightarrow (\phi_2 \rightarrow \psi) \nvDash (\phi_1 \wedge \phi_2) \rightarrow \psi$	*importación*
$(\phi_1 \wedge \phi_2) \rightarrow \psi \nvDash \phi_1 \rightarrow (\phi_2 \rightarrow \psi)$	*exportación*
$\phi_1 \rightarrow (\phi_2 \rightarrow \psi) \nvDash \phi_2 \rightarrow (\phi_1 \rightarrow \psi)$	*permutación*
$\nvDash (\phi \supset \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow \psi)$	*ley de herradura afirmada*
$\nvDash (\phi \wedge \neg\phi) \rightarrow \psi$	*ley de explosión*

Aunque en algunos casos es evidente que estos principios *junto con otros principios plausibles* conducen a una inconsistencia[31]. No es del todo claro que esto sea así para todos ellos. De modo que parece difícil mantener la idea de que renunciar a estos principios es un precio necesario a pagar para evitar inconsistencias.

[31] Un ejemplo claro de esto es *importación*. Si ϕ y $\phi \wedge \phi$ son equivalentes para cada fórmula ϕ, entonces *contracción* se convierte en un caso especial de *importación*. Por lo tanto, siempre que esta equivalencia se cumpla, *importación* junto con *modus ponens* conducen a la trivialidad.

Field ha replicado a esta objeción señalando, primero, que estos principios se cumplen siempre que las fórmulas involucradas satisfagan la ley de tercero excluido. Por ejemplo, aunque *herradura afirmada* falle
$\not\models (\phi \supset \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow \psi)$
sí tenemos
$\phi \vee \neg\phi, \psi \vee \neg\psi \models (\phi \supset \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow \psi)$
En segundo lugar, para algunos de los principios mencionados más arriba, aunque son inválidos en forma de ley (i.e. con el condicional), son válidos en forma de regla (i.e. con $\models$). Por ejemplo, aunque la ley de explosión falle
$\not\models (\phi \wedge \neg\phi) \rightarrow \psi$
la *regla de explosión* vale
$\phi \wedge \neg\phi \models \psi$.

De hecho, discutiendo la falla del principio de inducción matemática, Field [37], p.270 sugiere que

> in practice it is the rule forms of induction (...) which we employ, so there is little impact of the failure of the conditional form(...)

No obstante, no está claro en qué casos es importante obtener el principio en cuestión en forma condicional y no sólo en forma de regla. Por caso, parece no negociable tener no sólo las reglas para $Tr(x)$
$Tr\langle\phi\rangle \models \phi$, and $\phi \models Tr\langle\phi\rangle$.
sino también todos los bicondicionales de la forma
$\models Tr\langle\phi\rangle \leftrightarrow \phi$.

En términos más generales, lo que se necesita aquí es un criterio para separar los casos en que probar la forma condicional es indispensable (esto incluye los bicondicionales del esquema T) de los casos en los que tener el principio en forma de regla es suficiente (esto incluiría el principio de inducción matemática, según Field). Hasta donde sé, Field no ha proporcionado tal criterio.

El condicional de Field también ha sido acusado de ser demasiado fuerte. Esto no debería generar ninguna sorpresa, ya que todas las paradojas del condicional material son válidas de acuerdo a su teoría. Pero, más específicamente, Priest [71] ha señalado que dicho condicional valida un principio particularmente desagradable que es clásicamente válido (y que llamaré 'principio del interruptor de luz'):
$(\phi \wedge \psi) \rightarrow \chi \models ((\phi \wedge \neg\psi) \rightarrow \chi) \vee ((\neg\phi \wedge \psi) \rightarrow \chi)$.
Para entender cuán inverosímil es este principio, imaginemos un mecanismo que enciende una luz sólo cuando dos interruptores (los llamaré A y B) apuntan hacia arriba. Es decir, es suficiente que uno de ellos apunte hacia abajo para que la luz esté apagada. Sea ϕ una oración que expresa que el

interruptor A apunta hacia arriba, ψ una oración que expresa que el interruptor B apunta hacia arriba y χ una oración que expresa que la luz está encendida. Esto parece dar un contraejemplo claro al principio, el cual, como hemos observado, es válido en la teoría de Field.

2.3.3. Los problemas de Yablo

El problema considerado en la sección anterior se relaciona con la potencia del condicional de Field. Un tipo diferente de problema tiene que ver con la forma en que la teoría de Field asigna valores semánticos a ciertas oraciones problemáticas. Siguiendo Stephen Yablo [110], voy a mencionar tres cuestiones.

La primera es el la cuestión de la *arbitrariedad*. Consideremos una oración τ_1 que afirma que $(\phi \to \phi) \to Tr\langle\tau_1\rangle$. No es difícil ver que $|\tau_1| = 1$, lo que parece extraño, ya que τ_1 podría haber recibido algún otro valor semántico. En este sentido, la oración es similar en espíritu a la oración del honesto. Por otra parte, el problema no es sólo que la teoría declara verdadera una oración que podría haber sido falsa, sino que declara falsas a oraciones similares que podrían haber sido verdaderas. Pues consideremos ahora una oración τ_2 que afirma que $2 = 2 \to Tr\langle\tau_2\rangle$. Es fácil ver que $|\tau_2| = 0$, lo cual parece muy difícil de explicar, dada su similitud con τ_1. Así que, resumiendo, podemos construir tres oraciones del honesto diferentes, la oración del honesto usual τ, que puede tomar cualquier valor, la oración τ_1, que será verdadera, y la oración τ_2, que será falsa.

La segunda cuestión es la de la *infundación*. Ciertas oraciones infundadas serán declaradas verdaderas en la teoría de Field. Pensemos en una secuencia de oraciones condicionales, llamémoslas $\rho_1, \rho_2, \rho_3, ...$ tal que para cada n, ρ_n es la oración $Tr\langle\rho_n\rangle \to Tr\langle\rho_{n+1}\rangle$. En S^0 cada condicional ρ_n es, por supuesto, $\frac{1}{2}$, pero ya en S^1 cada condicional ρ_n adquiere el valor 1, lo cual no se altera en las etapas posteriores. Esto parece bastante difícil de explicar, ya que no hay nada que fundamente la verdad de estos condicionales.

La tercera cuestión tiene que ver con la estrechez del condicional. El condicional no es suficientemente estricto, en el sentido de que, a pesar de que valida todas las instancias del esquema T, también valida algunos bicondicionales que tal vez no deberían ser aceptados como verdaderos. Por ejemplo, aunque parece sensato que $|Tr\langle\lambda\rangle \leftrightarrow \lambda| = 1$ y que $|Tr\langle\tau\rangle \leftrightarrow \tau| = 1$, la teoría también afirma que $|\neg\lambda \leftrightarrow \lambda| = 1$, $|\lambda \leftrightarrow \tau| = 1$, $|\neg\tau \leftrightarrow \tau| = 1$ y $|\neg\lambda \leftrightarrow \tau| = 1$.

En [110], Yablo ofrece su propia teoría de la verdad. En ella, el condicional ya no se define por medio de secuencias de revisión. De hecho, la teoría de Yablo utiliza una semántica de mundos posibles en la que para evaluar un condicional, es necesario tener en cuenta los valores del antecedente y del consecuente en todos los *puntos fijos* que extienden una cierta interpretación (es decir, los puntos fijos hacen las veces de mundos posibles). Aquí no voy a entrar en los detalles de esta propuesta.

Como señala Field (en [35]), el enfoque de Yablo tiene un par de inconvenientes serios. El enfoque no puede evaluar correctamente ciertos condicionales anidados (como consecuencia, existen oraciones equivalentes que no pueden sustituirse entre sí) y no hay una manera obvia de definir un operador de determinación utilizando su condicional (como si la hay en la teoría de Field; algo que desarrollaré más abajo). Esto no quiere decir que el método propuesto por Yablo no sea útil. De hecho, en virtud de la crítica de Yablo, Field ha ofrecido una versión revisada de su propia teoría utilizando algunas de las ideas de Yablo (véase otra vez [35] y [37] para los detalles)[32]. En ella algunos de los problemas planteados por Yablo encuentran una solución[33].

Definición (*Interpretaciones S^α para condicionales, versión revisada*)

Si α es un ordinal sucesor $\beta+1$, entonces:

$$S^{\beta+1}(\phi \rightarrow \psi) = \begin{cases} 1 & \text{si } (\forall P^\beta)(\text{si } P^\beta \text{ es un punto fijo sobre } S^\beta, \text{ entonces } P^\beta(\phi) \leq P^\beta(\psi)) \\ 0 & \text{si } P^{\beta_0}(\phi) > P^{\beta_0}(\psi) \\ \frac{1}{2} & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Si α es un ordinal límite λ, entonces:

$$S^{\lambda}(\phi \rightarrow \psi) = \begin{cases} 1 & \text{si } (\exists\gamma < \lambda)(\forall\beta \in [\gamma,\lambda))(\forall P^\beta)(\text{si } P^\beta \text{ es un punto fijo sobre } S^\beta, \text{ entonces } P^\beta(\phi) \leq P^\beta(\psi)) \\ 0 & \text{si } (\exists\gamma < \lambda)(\forall\beta \in [\gamma,\lambda))(P^{\beta_0}(\phi) > P^{\beta_0}(\psi)) \\ \frac{1}{2} & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

En la definición de arriba P^{β_0} es el punto fijo mínimo sobre P^β. La noción debe ser entendida de la siguiente forma: para cada ordinal α tenemos una secuencia de interpretaciones P^α como sigue $P^{\alpha_1}, P^{\alpha_2}, P^{\alpha_3}, ...P^{\alpha_\omega}, P^{\alpha_{\omega+1}}$,... y así sucesivamente.

Informalmente hablando, la idea es que cuando un condicional se evalúa desde un ordinal sucesor $\beta+1$, tenemos que considerar los valores del antecedente y del consecuente en *todos los puntos fijos se extienden al ordinal β inmediatamente anterior a $\beta+1$*. Y cuando un condicional se evalúa desde un ordinal límite λ, es necesario tener en cuenta los valores del antecedente y del consecuente en *todos los puntos fijos que extienden a cada miembro de un conjunto infinito de ordinales previos $\beta < \lambda$*.

La mayor parte de los resultados que se aplican a la versión anterior de la teoría de Field valen para la versión revisada también. En particular, es

[32]Una aplicación de este método para definir no ya un condicional, sino un operador semejante al operador de determinación, puede encontrarse en [91].

[33]Más precisamente, Field considera que aunque Yablo está en lo correcto con respecto al problema de la estrechez, no tiene razón sobre las otras dos cuestiones (el lector puede encontrar los argumentos de Field en [35]).

posible probar el teorema fundamental, así que sabemos que existen ciertos ordinales donde cada oración toma su valor final. Pero, lo más importante en lo que concierne a los problemas señalados antes es que la cuestión de la estrechez ya no afecta a la teoría. Consideremos el bicondicional $\tau \leftrightarrow \neg\tau$. El punto fijo mínimo sobre la primera interpretación para los condicionales S^0 es P^{0_0} (de acuerdo con nuestra notación anterior). En P^{0_0} es evidente que el valor de τ y de $\neg\tau$ es $\frac{1}{2}$. Pero hay puntos fijos distintos del mínimo P^{0_α} (donde $\alpha \neq 0$) sobre P^{0_0} en los que el valor de τ es 1 y el valor de $\neg\tau$ es 0. Y esto significa que en S^1 el valor de $\tau \leftrightarrow \neg\tau$ será $\frac{1}{2}$. De hecho, lo mismo sucede en cada ordinal α, por lo que el valor de $\tau \leftrightarrow \neg\tau$ será $\frac{1}{2}$ en cada S^α. Por lo tanto, $|\tau \leftrightarrow \neg\tau| = \frac{1}{2}$[34].

2.4. Revancha: no ser verdadero

Una parte sustantiva de la propuesta de Field que todavía no hemos discutido es su supuesta capacidad para resolver un tipo particular de paradojas: las paradojas de revancha o venganza. Éstas, por lo general, aparecen cuando introducimos en el lenguaje objeto algunas de las nociones metateóricas que son necesarias para hacer frente a las paradojas usuales. Una paradoja de revancha ocurre, por ejemplo, cuando las lógicas multivaluadas que se emplean para resolver la paradoja del mentiroso intentan expresar la idea de 'tener un valor no designado' o, equivalentemente, la idea de 'no ser verdadero'. Sería deseable expresar esta idea, pero, por desgracia, esto no puede hacerse sin que se generen nuevas paradojas. Más precisamente, supongamos que hay un predicado $Des(x)$ tal que devuelve el valor 1 cuando se aplica a (al nombre de) una oración con un valor designado, y devuelve el valor 0 en caso contrario:

$$v(Des\langle\phi\rangle) = \begin{cases} 1 & \text{si } v(\phi) = 1 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Por supuesto, si existiese un predicado así en el lenguaje, habría una oración, llamémosla η, que dice que η no tiene el valor designado. Esto es, η es la oración $\neg Des\langle\eta\rangle$. Si $Des(x)$ es de hecho un predicado que expresa la propiedad de tener el valor designado, se cumplen los siguientes dos principios:

$Des\langle\phi\rangle \vDash \phi$, y
$\phi, \neg Des\langle\phi\rangle \vDash \bot$.

[34]Por supuesto, el bicondicional $\lambda \leftrightarrow \neg\lambda$ todavía recibe el valor 1, pero esto parece apropiado, ya que se podría argumentar que λ es, en cierto modo, simplemente $\neg\lambda$.

Sin embargo, es fácil demostrar que estos dos principios conducen a una inconsistencia. Por el primero, $Des\langle\eta\rangle \vdash \eta$. Pero dado que η es $\neg Des\langle\eta\rangle$, también tenemos $\neg Des\langle\eta\rangle \vdash \eta$. Ya que razonamiento por casos vale, y que la ley de tercero excluido se aplica a $Des(x)$ (el valor de una oración es un valor designado o no lo es, no hay una tercera posibilidad), podemos inferir que η y $\neg Des\langle\eta\rangle$. Nuestro segundo principio para $Des(x)$ nos permite obtener, entonces, $\perp$.

Por lo tanto, no podemos tener el predicado 'tiene un valor designado' en el lenguaje. Sin embargo, es importante aquí hacer una distinción entre dos proyectos muy diferentes (tomo prestada esta idea de [110]). Uno de los proyectos consiste en constuir un lenguaje semánticamente cerrado. De acuerdo con este proyecto, el lenguaje en el que se expresa nuestra teoría de la verdad debe tener suficientes recursos para expresar cada concepto semántico inteligible. Como hemos visto, el concepto de 'tener un valor designado' no es expresable en la teoría de Field, por lo que este proyecto no puede ser satisfecho[35].

El otro proyecto consiste en caracterizar adecuadamente todas las oraciones semánticamente defectuosas del lenguaje dentro del lenguaje. Esto es lo que Beall [17] llama el 'proyecto de caracterización exhaustiva'. En sus palabras, este proyecto consiste en:

> explain[ing] how, if at all, we can truly characterize- specify the 'semantic status' of- all sentences of our language (in our language).

Supongo que esto es lo que Field tiene en mente (aunque él podría pensar que, dado que 'tener un valor designado' y otros conceptos similares no son conceptos semánticos auténticos, cumplir con el proyecto de caracterización exhaustiva es suficiente para obtener un lenguaje semánticamente cerrado). Con este proyecto en mente podemos introducir un operador D que significa 'ser determinadamente verdadero'[36]. Intuitivamente, este operador se aplica

[35] Por supuesto, se podría argumentar que 'tener un valor designado' no es un concepto semántico genuino, ya que es un producto de nuestro aparato formal. Después de todo, es plausible decir que no existe en el lenguaje ordinario una expresión correspondiente al concepto de 'tener un valor designado de acuerdo con nuestra teoría de la verdad'. Por lo tanto, no deberíamos evaluar nuestra teoría de la verdad negativamente si no logra captar este concepto. Este problema es difícil y no tengo la intención de abordarlo seriamente aquí, pero diré algo más en la parte final de esta sección.

[36] ¿Por qué un operador y no un predicado? Realmente no importa. Dado que el predicado de verdad es transparente, podemos usarlo para emular cada predicado si tenemos el operador correspondiente. Por ejemplo, el predicado de determinación puede representarse como $DTr(x)$.

a las oraciones que son claramente verdaderas. A diferencia de $Des(x)$, D no cumple con la ley de tercero excluido, debido a que ciertas oraciones no serán ni determinadamente verdaderas ni determinadamente falsas.

Por razones que se aclararán más adelante, antes de explicar cómo se comporta el operador D, es conveniente generalizar la teoría presentada en la sección anterior a una con un conjunto infinito de valores $\mathcal{V}$, con un orden parcial $\preccurlyeq$. Este espacio de valores será un retículo distributivo con las operaciones habituales correspondientes a conjunción (cota máxima inferior), disyunción (cota mínima superior), y la negación (una operación que invierte el orden)[37]. No es difícil extender estas ideas a los cuantificadores[38].

Field define el operador de determinación del siguiente modo:

Definición (*El operador de determinación D*)
$D\phi =_{df} \phi \wedge \neg(\phi \rightarrow \neg\phi)$[39]

Este operador puede utilizarse, por ejemplo, para decir que la oración $2 = 2$ es determinadamente verdadera y que $2 \neq 2$ es determinadamente falsa. Pero lo más interesante es que podemos decir que la oración del mentiroso y que la oración de Curry no son determinadamente verdaderas ni determinadamente falsas. De hecho, podemos definir otro operador $\mathcal{U}$ (a partir de D) que puede servir para categorizar semánticamente las oraciones del lenguaje:

Definición (*El operador de patologicidad* $\mathcal{U}$)
$\mathcal{U}\phi =_{df} \neg D\phi \wedge \neg D\neg\phi$.

Este operador se puede interpretar como 'patológico', 'semánticamente defectuoso' o algo por el estilo, y puede aplicarse a oraciones como el honesto, el mentiroso, Curry, etc.

Ahora bien, es importante asegurarse de que el operador de determinación se comporte de la manera correcta. Pero, ¿qué es lo que esperamos de un operador de determinación? La siguiente definición da una respuesta.

Definición (*Un operador de determinación razonable D*) Siguiendo a [37], diré que debemos esperar lo siguiente de un operador de determinación razonable:

1. Si $v(\phi) = 1$, entonces $v(D\phi) = 1$.

[37] Véase [37] para más detalles.

[38] Se requiere también que 1 no sea la cota mínima superior de dos valores cualesquiera estrictamente más pequeños y que exista un elemento $\frac{1}{2}$ que sea un punto fijo de la operación correspondiente a la negación.

[39] Como señala Field, esta no es la única manera de definir D, pero servirá para nuestros propósitos.

2. Si $v(\phi) \preccurlyeq v(\neg\phi)$, entonces $v(D\phi) = 0$.

3. Si $0 \prec v(\phi) \prec 1$, entonces $v(D\phi) \preccurlyeq v(\phi)$[40].

4. Si $v(\phi) \preccurlyeq v(\psi)$, entonces $v(D\phi) \preccurlyeq v(D\psi)$.

Estas condiciones se corresponden con principios plausibles que involucran a D. La condición 1 se corresponde con la inferencia $\phi \vDash D\phi$, la condición 2 con la inferencia $\phi \to \neg\phi \vDash \neg D\phi$, la condición 3 con la ley $\vDash D\phi \to \phi$, y la condición 4 con la inferencia $\phi \to \psi \vDash \ D\phi \to D\psi$. ¿Cómo es posible que el operador D no produzca paradojas? La clave está en la falla de idempotencia, esto es, a veces $D\phi$ y $DD\phi$ tienen distintos valores semánticos. Veamos por qué.

Ejemplo (*Falla de idempotencia I*) Sea D un operador de determinación razonable y sea η_1 una oración que dice de sí misma que no es determinadamente verdadera, es decir, η_1 es $\neg DTr\langle\eta_1\rangle$ (dado que D es un operador, la presencia del predicado de verdad es necesaria para formular oraciones autorreferenciales). Se puede demostrar que:
$|\eta_1| \neq 0$,
$|D\eta_1| \prec |\eta_1|$, y
$0 = |DD\eta_1| \prec |D\eta_1|$.

Como el ejemplo anterior sugiere, la oración η_1 no genera ninguna paradoja, porque el valor de $D\eta_1$ es menor que el valor de η_1, y el valor de $DD\eta_1$ es simplemente 0. El proceso funciona de forma análoga con oraciones autorreferenciales donde D se repite más veces. No se trata sólo de que D no es idempotente con DD. En general, para cualquier número finito n, podría ocurrir que el valor de $D_{n+1}\phi$ sea menor que el valor de $D_n\phi$ (donde D_n representa n iteraciones del operador D), como señala el siguiente teorema:

Teorema 2.4.1 (Teorema de la jerarquía, caso finito) *Para cualquier n, $|D_{n+1}\eta_n| = 0$, pero $|D_n\eta_n| \neq 0$. De modo que hay un operador D_{n+1} más fuerte que D_n.*

Prueba Véase [37], p.237. ∎

[40] En [37], p. 235-36, Field coquetea con:
Si $0 \prec v(\phi) \prec 1$, entonces $v(D\phi) \prec v(\phi)$,
La diferencia no será importante en lo que sigue, pero más tarde, en el apéndice al capítulo 4, volveré brevemente sobre esto.

Es interesante notar que estos hechos también valen para ordinales transfinitos. Para cualquier ordinal sucesor α, podría ocurrir que $\alpha+1$ aplicaciones de D a una fórmula no sea idempotente con α aplicaciones de D a esa fórmula. Y para cualquier ordinal límite λ, podría ocurrir que λ aplicaciones de D a una fórmula no sea idempotente con α aplicaciones de D a esa fórmula para cualquier $\alpha < \lambda$. El siguiente ejemplo es útil para entender estas últimas observaciones más claramente.

Ejemplo (*Falla de idempotencia II*) Así como hay una oración η idéntica a $\neg DTr\langle\eta_1\rangle$, también hay una oración η_2 idéntica a $\neg DDTr\langle\eta_2\rangle$, una oración η_3 idéntica a $\neg DDDTr\langle\eta_3\rangle$, y, en general, una oración η_n idéntica a $\neg D_n Tr\langle\eta_n\rangle$. Más aún, no hay restricciones sobre la cantidad de veces que podemos iterar D. Ya que tenemos un predicado veritativo transparente disponible, podemos usar los cuantificadores para definir para cada ordinal α, un operador D_α, que representa α aplicaciones del operador D. Esto quiere decir que para cada ordinal α hay una oración η_α idéntica a $\neg D_\alpha Tr\langle\eta_\alpha\rangle$. Pero, una vez más, es posibles probar que:
$|\eta_\alpha| \neq 0$, y
$0 = |D\eta_{\alpha+1}| \prec |\eta_\alpha|$.

Este segundo ejemplo nos conduce a una generalización del teorema previo:

Teorema 2.4.2 (Teorema de la jerarquía, caso general) *Para cualquier α y cualquier β tales que $\alpha < \beta$:*

- *Para todo ϕ, $|D_\beta\phi| \preccurlyeq |D_\alpha\phi|$,*
- *Para algún ϕ, $|D_\beta\phi| \prec |D_\alpha\phi|$.*

En resumen, la forma de evitar las paradojas de revancha en este enfoque es haciendo que el operador D sea no idempotente. Para cada ordinal α (hasta cierto ordinal muy grande; la notación, tarde o temprano, se agota) podemos construir un operador D_α, donde D_α es la $\alpha^{\text{ésima}}$ aplicación del operador D. Como resultado, para cada mentiroso η_α de la forma $\neg D_\alpha Tr\langle\eta_\alpha\rangle$, la ley $D_\alpha\eta_\alpha \vee \neg D_\alpha\eta_\alpha$ falla. Es decir, el mentiroso η_α no es ni determinadamente verdadero ni determinadamente falso. Por otra parte, esto significa que podemos clasificar cada una de estas oraciones del mentiroso utilizando nuestro operador de patologicidad. Para cada mentiroso η_α, podemos probar que $\neg D_\alpha\eta_\alpha \wedge \neg D_\alpha\neg\eta_\alpha$. Así que, en cierto modo, el enfoque de Field cumple con el proyecto de caracterización exhaustiva.

Naturalmente, alguien podría quejarse argumentando que no hay (ni puede haber) una noción de determinación general expresable en el lenguaje. Es decir, podemos afirmar, en cierto sentido, que todos los mentirosos η_α son semánticamente defectuosos o patológicos (por ejemplo, algunos no son determinadamente verdaderos, otros no son determinadamente determinadamente verdaderos, otros no son determinadamente determinadamente determinadamente verdaderos, y así sucesivamente). Pero, ¿qué tienen todas estas oraciones en común? Como Beall [17] señala, lo que todas ellas tienen en común es que no son determinadamente verdaderas *en algún sentido u otro*. Si tal noción estuviese disponible, sería posible construir una nueva paradoja de revancha, y la teoría sería inconsistente. Por supuesto, Field cree que esta noción (la de 'no ser determinadamente verdadero en un sentido u otro') es incoherente y, de hecho, ofrece un argumento técnico muy sofisticado con el fin de mostrar que no puede haber una noción general de determinación que satisfaga la ley de tercero excluido. Aún así, parece difícil negar que esta sea una de esas situaciones, muy usuales, donde hay un equilibrio entre la expresividad y la consistencia (o no-trivialidad). En consecuencia, en lo que se refiere al segundo proyecto, es decir, el proyecto de obtener un lenguaje semánticamente cerrado, la teoría de Field es tan problemática como otros enfoques más conocidos.

En la siguiente sección, voy a analizar lo que los teóricos paracompletos tienen para decir acerca de una forma particularmente preocupante de revancha que afecta a sus teorías: la paradoja de la validez.

2.5. La paradoja de la validez en el enfoque paracompleto

2.5.1. Rechazar una de las reglas para la noción de validez

Hemos visto en el capítulo 1 que la paradoja La validez es una cuestión acuciante para las teorías paracompletas y paraconsistentes de la verdad. He mencionado que los defensores de estos enfoques tienen dos maneras de lidiar con esta paradoja. La primera consiste en rechazar alguna de las reglas para $Val(x, y)$, esto es, rechazar RVal o rechazar LVal. La segunda consiste en rechazar la idea de que la validez es una cuestión determinada, afirmando, por ejemplo, que ciertos argumentos no son válidos ni inválidos. En [33], Field intenta hacer frente a esta cuestión tomando el primer camino:

> I am skeptical that there is anything new to be learned from the v-Curry. More fully: the notion of validity can be understood in distinct ways; on some ways of understanding it, the only morals

> of the v-Curry are ones we should have learned long ago from Gödel, whereas on other ways of understanding it, any way of handling the paradoxes of truth and satisfaction handles the v-Curry automatically.

Según Field, aquellos que defienden un concepto ingenuo de validez afirman que LVal y RVal obtienen apoyo de lo que a veces se conoce como el 'esquema de la validez' (o 'esquema V', para abreviar). Es decir, la afirmación de que:

$$\phi \Rightarrow \psi \textit{ si y sólo si} \Rightarrow Val(\langle\phi\rangle, \langle\psi\rangle).$$

La analogía con el esquema T debería ser evidente. El esquema V es la afirmación de que un argumento es válido de acuerdo con una teoría si y sólo si la teoría prueba el enunciado que afirma que ese argumento es válido.

Ahora bien, como Field correctamente observa, el esquema V no es suficiente para justificar la verdad de LVal y RVal. Aunque la dirección de izquierda a derecha del esquema V es de hecho RVal, la dirección de derecha a izquierda es más débil que LVal, por lo que sería incorrecto decir que el esquema V implica LVal. Por supuesto, Field reconoce que puede haber razones independientes para aceptar LVal. Después de todo, LVal no es otra cosa que una versión de *modus ponens* para el predicado de validez (en lugar del condicional). Por lo tanto, es aconsejable dejar de lado el esquema V considerar LVal y RVal por sus propios méritos.

En lo que respecta a RVal, la idea de Beall y Murzi (en [20]) es que $Val(x, y)$ es simplemente una forma de expresar en el lenguaje objeto la noción correspondiente a la relación de consecuencia $\Rightarrow$. En otras palabras, cada vez que afirmamos $\phi \Rightarrow \psi$, estamos en condiciones de afirmar $Val(\langle\phi\rangle, \langle\psi\rangle)$ y viceversa. Así, RVal debe entenderse como
Si $Val(\langle\phi\rangle, \langle\psi\rangle)$, *entonces* $Val(\langle\top\rangle, \langle Val(\langle\phi\rangle, \langle\psi\rangle)\rangle)$[41].
¿Es esto plausible? Bueno, se podría sugerir que no lo es, porque podría haber enunciados *verdaderos* de la forma $Val(\langle\phi\rangle, \langle\psi\rangle)$ que no son *válidos*. Así, mientras que $\phi \Rightarrow \psi$ implica la afirmación de que $Val(\langle\phi\rangle, \langle\psi\rangle)$ es verdadera, puede que no implique también su validez. Por lo tanto, tal vez la formulación de RVal que ofrecí más arriba sea demasiado fuerte.

Field también menciona que si $Val(x, y)$ es simplemente una forma de expresar la noción correspondiente a $\Rightarrow$ en el lenguaje objeto (como Beall y Murzi sugieren), si bien la versión fuerte de RVal vale, ahora hay un argumento directo en contra de LVal. Pues nótese que la primera parte de la

[41]Esto es semejante al principio modal $S4$. Ya que $Val(x, y)$ es un predicado diádico, tenemos que utilizar $\top$ para iterar de esta manera.

derivación de la paradoja de la validez sólo utiliza LVal (junto con LC) y conduce a $\pi \Rightarrow \perp$. Pero, si $Val(x, y)$ es simplemente forma de expresar $\Rightarrow$ en el lenguaje objeto, esto no es otra cosa que π. Por lo tanto, sabemos que $\pi \Rightarrow \perp$ es verdadera y que π es verdadera. Y esto parece altamente implausible, ya que estamos afirmando que π es verdadera y que implica $\perp$. Por lo tanto, aquellos que no tengan ninguna inclinación a rechazar LC quizá deberían rechazar LVal (téngase en cuenta, entonces, que este argumento contra LVal no afecta a algunas de las teorías subestructurales que vamos a considerar más adelante).

Aunque Field proporciona un análisis bastante riguroso de cómo la manera en que entendemos la noción de validez incide sobre la corrección de las reglas LVal y RVal, aquí será suficiente comprender su argumento general en términos del siguiente dilema. O bien $Val(x, y)$ es simplemente una forma de representar $\Rightarrow$ en el lenguaje objeto, o bien $Val(x, y)$ es más débil que $\Rightarrow$ en el sentido de que $\Rightarrow$ pretende codificar el modo en que informalmente razonamos y $Val(x, y)$ es un intento por capturar esto parcialmente usando nuestro lenguaje objeto.

En el primer cuerno del dilema, RVal es aceptable, LVal falla. La razón es simple. $Val(x, y)$ no es otra cosa que el predicado de prueba que se corresponde con $\Rightarrow$. Si la teoría detrás de $\Rightarrow$ es lo suficientemente expresiva (y podemos suponer que lo es), las condiciones derivabilidad estándar se cumplen, y por eso tenemos RVal. Además, a causa de segundo teorema de incompletitud de Gödel, sabemos que si la teoría es consistente, no puede probar $Val(\langle\top\rangle, \langle\phi\rangle), \top \Rightarrow \phi$[42], el cual es derivable de LVal. Por lo tanto, la hipótesis de que $Val(x, y)$ es sólo una forma de expresar $\Rightarrow$ en el lenguaje objeto parece conducir, a través de segundo teorema de incompletitud de Gödel, a la conclusión de que RVal vale y que LVal falla..

En contra de este argumento se podría sugerir que es perfectamente legítimo definir un predicado de validez que, si bien es simplemente una forma de expresar $\Rightarrow$ en el lenguaje objeto, es más fuerte que el predicado de prueba. Las teorías expresivamente ricas, como la aritmética de Peano, no pueden capturar sus propios predicados de prueba[43], por lo que es natural pensar que las lógicas no clásicas podrían ser capaces de representar su propia noción (ingenua) de validez, a pesar del segundo teorema de Gödel.

De hecho, en este sentido, no veo una diferencia sustancial con la noción ingenua de verdad. Sería inexacto decir que no puede haber un predicado de verdad ingenuo en virtud del segundo teorema de Gödel. ¿Es eso verdad en

[42]Podemos definir un predicado monádico de validez $V(x)$, a partir de $Val(x, y)$ tal que $Val(x) \equiv_{df} Val(\langle\top\rangle, x)$. Así L$Val$ se transforma en $Val(\langle\phi\rangle) \Rightarrow \phi$. Por el teorema de Löb, $Val(x)$ no puede satisfacer ese principio junto con RVal.

[43]Véase [98], p. 179 para una prueba rápida de este hecho.

el caso del predicado de validez? Lo que oscurece las cosas en este caso es que a partir de la suposición de que $Val(x, y)$ es simplemente una forma de expresar $\Rightarrow$ en el lenguaje objeto, se infiere que $Val(x, y)$ *es* el predicado de prueba para $\Rightarrow$ (¿qué otra cosa podría ser? - cabe preguntarse). Pero no hay necesidad de identificar $Val(x, y)$ con el predicado habitual de prueba, ya que, como se señaló anteriormente, el predicado habitual de prueba no puede capturar $\Rightarrow$. Y asumiendo cierta lógica no clásica adecuada, no hay, *prima facie*, razones para pensar que no puede haber tal predicado.

En el segundo cuerno del dilema, en el que se supone que $\Rightarrow$ se basa en una relación de consecuencia esencialmente más rica que la capturada por $Val(x, y)$, sucede lo contrario. Es natural pensar que RVal debe fallar (porque, como hemos dicho, $\Rightarrow$ es más fuerte que $Val(x, y)$) y que LVal vale. De hecho, ahora incluso es posible probar (suponiendo que vale la regla de corte) la corrección de $\Rightarrow$, es decir
si $\Rightarrow Val(\langle\phi\rangle, \langle\psi\rangle)$, *entonces* $\phi \Rightarrow \psi$.
Frente a esto, se podría argumentar que este caso, donde *se asume que* $\Rightarrow$ es significativamente más fuerte de $Val(x, y)$, no es el tipo de caso que nos interesa cuando hablamos de un predicado de validez ingenuo. Después de todo, el proyecto original era obtener una teoría semánticamente cerrada.

2.5.2. Validez con vacíos

En lo que queda de esta sección, voy a considerar otra forma que el teórico paracompleto tiene de hacer frente a la paradoja de la validez. Que yo sepa, el único que ha hecho el esfuerzo de desarrollar formalmente una noción de validez que incluya vacíos (i.e. argumentos que no son válidos ni inválidos) y que evite la paradoja de la validez es Toby Meadows en [59]. Voy a analizar su construcción con cierto detalle, ya que creo que este tipo de enfoque está muy inexplorado en la bibliografía sobre el tema.

Su idea es, principalmente, adaptar la construcción de punto fijo de Kripke para la verdad al predicado de validez. Al igual que con la construcción original, será útil suponer que estamos trabajando con cualquier extensión del lenguaje de la aritmética que puede contener vocabulario contingente más algún predicado diádico $Val(x, y)$. Llamemos a este lenguaje $\mathcal{L}_{Val}$. La idea es, a grandes rasgos, la siguiente. Comenzamos con un modelo parcial en el que el vocabulario aritmético se interpreta de la forma estándar y el vocabulario no aritmético, con excepción de $Val(x, y)$, también se interpreta de manera estándar (esto implica, entre otras cosas, el principio de bivalencia para el correspondiente fragmento del lenguaje: toda oración del fragmento libre de $Val(x, y)$ es verdadera o falsa). Como es de esperar, en la primera etapa de la construcción, se le asigna una extensión y una antiextensión al predicado

$Val(x,y)$. La antiextensión está vacía, pero, crucialmente, la extensión contiene todas las instancias de LVal (esta es una diferencia importante con la construcción para el predicado veritativo). Obtenemos las otras etapas de la construcción mediante la aplicación de una operación de salto a la interpretación de $Val(x,y)$. Intuitivamente, podemos determinar la extensión y la antiextensión de $Val(x,y)$ en cada etapa al considerar que los argumentos que son válidos e inválido en la(s) etapa(s) anterior(es). El proceso continúa hasta que se alcanza un punto fijo. Como puede verse, la construcción es similar a la ofrecida para el predicado de verdad.

Más formalmente, primero necesitamos una colección de modelos, llamémosla Mod. Cada modelo M en Mod posee un dominio que está separado en dos porciones, la porción numérica, que incluye los números naturales, y la porción concreta, que incluye al menos un objeto concreto (necesitamos que la porción concreta del dominio no sea vacía por razones técnicas). La interpretación del vocabulario aritmético es la estándar y permanece fija a través de los modelos, mientras que la interpretación del vocabulario no aritmético se toma de la parte concreta del dominio y varía a través de los modelos[44].

Sea $v(Val^+)$ la extensión del predicado de validez y sea $v(Val^-)$ su antiextensión. Además, sea M cualquier modelo perteneciente a Mod, sea A cualquier predicado (aritmético o no) excepto por $Val(x,y)$, y sean a, b cualesquiera nombres (pueden nombrar números u objetos concretos). Una valuación v sobre un modelo M es una función que va de $Form_{\mathcal{L}_{Val}}$ al conjunto de valores $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$ y está definida de la siguiente manera:
$v_M(Aa) = 1(0)$ *si y sólo si* $a^M \in A^M (a^M \notin A^M)$[45],
$v_M(Val(a,b)) = 1(0)$ *si y sólo si* $a^M = \langle \phi \rangle, b^M = \langle \psi \rangle$, y $< \phi, \psi > \in v_M(Val^+)$ $(a^M = \langle \phi \rangle, b^M = \langle \psi \rangle$, y $< \phi, \psi > \in v_M(Val^-))$,
$v_M(\neg\phi), v_M(\phi \wedge \psi), v_M(\forall x \phi)$, etc. se definen utilizando el esquema fuerte de Kleene del modo usual.

La parte crucial de la construcción es la definición del operador salto. Dicha definición presenta complicaciones. Las formas más habituales de definir este operador resultan inadecuadas, ya que hacen que la construcción sea no monótona. Meadows define el operador de salto $\mathcal{J} : \mathcal{P}(Sent_{\mathcal{L}_{Val}})^2 \longrightarrow$

[44]Meadows menciona que una ligera incomodidad es que las funciones aritméticas sobre el dominio de los números ya no toman objetos arbitrarios del dominio total como argumentos, y por ende ya no están adecuadamente definidas. Esta dificultad puede ser fácilmente solucionada, por ejemplo, utilizando predicados aritméticos en lugar de funciones. Véase [59] para los detalles.

[45]Haré un par de observaciones clarificatorias. Si a es aritmética, a^M pertenece a la parte aritmética del dominio, y si a no es aritmética, a^M pertenece a la parte concreta del dominio. En consecuencia, las oraciones de la forma Aa, donde A es aritmética (concreta) mientras que a es concreta (aritmética), no serán verdaderas (1) ni falsas (0). Además, la definición puede generalizarse fácilmente a predicados n-ádicos.

$\mathcal{P}(Sent_{\mathcal{L}_{Val}})^2$ como sigue:

$\mathcal{J}(v_M(Val)) =< \{< \phi, \psi >$: *(para cada* $M \in Mod$)(*si* $v_M(\phi) \in \{1, \frac{1}{2}\}$, *entonces* $v_M(\psi) = 1)\}, \{< \phi, \psi >$: (*existe un* $M \in Mod)(v_M(\phi) = 1$ *y* $v_M(\psi) = 0)\} >$.

La primera parte de la definición nos dice cuando algo entra en la extensión del predicado de validez y la segunda parte nos dice cuando algo entra en su antiextenstion. Básicamente, el par $< \phi, \psi >$ -que representa el argumento con la premisa ϕ y la conclusión ψ- será un miembro de la extensión del predicado de validez si no hay un modelo en el que la premisa ϕ es 1 o $\frac{1}{2}$, y la conclusión ψ es $\frac{1}{2}$ o 0[46]. La segunda parte de la definición es más fácil de motivar. En ella se afirma que el par $< \phi, \psi >$ será un miembro de la antiextensión del predicado de validez si hay un modelo en el que la premisa ϕ es verdadera y la conclusión ψ es falsa.

Luego, podemos definir dos secuencias monótonas de interpretaciones para el predicado de validez:
$v_M^0(Val^+), v_M^1(Val^+), v_M^2(Val^+), ..., v_M^{\omega}(Val^+), v_M^{\omega+1}(Val^+), ...$
y
$v_M^0(Val^-), v_M^1(Val^-), v_M^2(Val^-), ..., v_M^{\omega}(Val^-), v_M^{\omega+1}(Val^-), ...$.
La primera nos da la extensión del predicado de validez en cada etapa de la construcción, y la segunda nos da su antiextensión. Más formalmente, dado un conjunto de modelos Mod, un modelo $M \in Mod$, obtenemos una secuencia creciente de extensiones para el predicado de validez de la siguiente forma:

- $v_M^0(Val^+) = \{< \phi \wedge Val(\langle\phi\rangle, \langle\psi\rangle), \psi >$: para ϕ y ψ en $\mathcal{L}_{Val}\} \cup \{< Val(\langle\phi\rangle, \langle\psi\rangle) \wedge \phi, \psi >$: para ϕ y ψ en $\mathcal{L}_{Val}\}$[47],
- Para ordinales sucesores $\alpha + 1, v_M^{\alpha+1}(Val^+) = \mathcal{J}(v^{\alpha}(Val^+)) = \{< \phi, \psi >$: (para cada $M \in Mod$)(si $v_M^{\alpha}(\phi) \in \{1, \frac{1}{2}\}$, entonces $v_M^{\alpha}(\psi) = 1)\}$, y
- Para ordinales límite Λ, $v^{\Lambda}(Val^+) = \bigcup_{\beta<\Lambda} v^{\beta}(Val^+)$.

Y obtenemos una secuencia creciente de antiextensiones para el predicado de validez como sigue:

[46] Como señalé, las formas más evidentes de definir la extensión del predicado de validez no funcionarán. Como afirma Meadows, esta parte de la definición se basa en una noción de consecuencia *tolerante-estricta*. Voy a tener la oportunidad de explicar este concepto en el capítulo 5.

[47] Como señala Meadows, necesitamos la unión de estos dos conjuntos, pues de otra forma no podríamos permutar las premisas de los argumentos.

- $v^0_M(Val^-) = \varnothing$,
- Para ordinales sucesores $\alpha+1, v^{\alpha+1}_M(Val^-) = \mathcal{J}(v^\alpha Val^-)) = \{< \phi, \psi >$: (existe un $M \in Mod)(v^\alpha_M(\phi) = 1$ y $v^\alpha_M(\psi) = 0)\}$, y
- Para ordinales límite Λ, $v^\Lambda(Val^-) = \bigcup_{\beta<\Lambda} v^\beta(Val^-)$.

Esta definición hace que la construcción sea monótona, en el sentido de que la extensión (antiextensión) de $Val(x, y)$ siempre crece a medida que avanzamos a través de la construcción. En otras palabras:

Lema 2.5.1 (Monotonía) *Supongamos que $v_M(Val^+)$ y $v_M(Val^-)$ son ambos consistentes*[48]*. Luego, la secuencia posee la siguiente propiedad de monotonía:*

- *Si $v^\alpha_M(Val^+) \subseteq v^\beta_M(Val^+)$, entonces $\mathcal{J}(v^\alpha_M(Val^+)) \subseteq \mathcal{J}(v^\beta_M(Val^+))$.*
- *Si $v^\alpha_M(Val^-) \subseteq v^\beta_M(Val^-)$, entonces $\mathcal{J}(v^\alpha_M(Val^-)) \subseteq \mathcal{J}(v^\beta_M(Val^-))$.*

Como es usual, esto implica que la construcción tiene la propiedad de punto fijo.

En este marco, es sencillo dar una definición de validez.

Definición (*Validity for $\mathcal{L}_{Val}$*) Sea Γ el conjunto $\{\gamma_1, ..., \gamma_n\}$. Un argumento de Γ a ϕ es *válido* ($\Gamma \vDash \phi$) si y sólo si $< \gamma_1 \wedge ... \wedge \gamma_n, \phi > \in v(Val^+)$. Además, una oración ϕ es *válida* ($\vDash \phi$) si y sólo si $< \top, \phi > \in v(Val^+)$.

Esta definición nos proporciona el resultado deseado: existe una teoría paracompleta capaz de contener un predicado ingenuo de validez (con vacíos).

Teorema 2.5.2 *Tanto $LVal$ como $RVal$ se cumplen:*

- *(LVal) $Val(\langle\phi\rangle, \langle\psi\rangle), \phi \vDash \psi$.*
- *(RVal) Si $\phi \vDash \psi$, entonces $\vDash Val(\langle\phi\rangle, \langle\psi\rangle)$*

Prueba Véase [59]. ∎

[48]Consistentes en el sentido de que no hay una oración ϕ tal que tanto ella como su negación pertenecen a uno de esos conjuntos.

Como el lector puede notar, con esta definición es posible que un par $< \phi, \psi >$ no caiga bajo la extensión ni la antiextensión del predicado de validez. Por ejemplo, consideremos una oración ϕ que obtiene el valor de $\frac{1}{2}$ en todo modelo. Luego, por la definición de $\mathcal{J}$, es claro que $< \phi, \phi >$ no estará en la extensión del predicado de validez ni en su antiextensión. Así, $Val(\langle\phi\rangle, \langle\phi\rangle)$ recibirá el valor $\frac{1}{2}$.

Si tuviéramos que añadir un predicado de verdad al lenguaje $\mathcal{L}_{Val}$, λ se comportaría así. Pero incluso si no hay un predicado de verdad, no es difícil ver que la oración π también se comporta así, ya que el par $< \pi, \pi >$ no formará parte de la extensión del predicado de validez ni de su antiextensión.

De hecho, es interesante ver exactamente cómo se evalúa la oración π en este enfoque. Sea v un punto fijo para el operador $\mathcal{J}$. Luego, por la definición de $v(Val^+)$, sabemos que $< \pi \wedge Val(\langle\pi\rangle, \langle\perp\rangle), \perp > \in v(Val^+)$.
Pero π es idéntica a la oración $Val(\langle\pi\rangle, \langle\perp\rangle)$, de modo que podemos inferir que
$< \pi \wedge \pi, \perp > \in v(Val^+)$.
Y de esto, presumiblemente podemos obtener
$< \pi, \perp > \in v(Val^+)$,
ya que, usualmente, π y $\pi \wedge \pi$ son equivalentes. Pero esto se cumple si y sólo si
$v_M(Val(\langle\pi\rangle, \langle\perp\rangle) = 1$
y esto es lo mismo que
$v_M(\pi) = 1$.
Desafortunadamente, estas dos cosas juntas implican
$v_M(\perp) = 1$.
Sin embargo, como observa Meadows, este argumento nunca llega tan lejos. El paso de $< \pi \wedge \pi, \perp > \in v(Val^+)$ a $< \pi, \perp > \in v(Val^+)$ no está disponible. Sabemos que $< \pi \wedge \pi, \perp > \in v(Val^+)$ porque sabemos que v es un punto fijo, sabemos que la construcción es monótona, y sabemos que $< \pi \wedge \pi, \perp > \in v^0(Val^+)$. Pero nótese que en v^0 la extensión de $Val(x, y)$ sólo contiene instancias de LVal. De modo que no hay nada que fuerce al par $< \pi, \perp >$ a estar allí, es decir, no hay nada que fuerce al par $< \pi, \perp >$ a estar en $v(Val^+)$. En pocas palabras, la construcción nos da una noción no contractiva de validez.

Por otra parte, la contracción no es la única propiedad estructural que no es satisfecha por la noción de validez. Tal vez la debilidad más perjudicial de la construcción es que tanto la reflexividad como la transitividad también fallan[49]. Es decir, hay fórmulas ϕ, ψ y χ tales que

[49]La monotonía falla también, pero eso se puede solucionar mediante la adición de todas las instancias que faltan al comienzo de la construcción.

- $< \phi, \phi > \notin v(Val^+)$.
- $< \phi, \psi > \in v(Val^+)$, $< \psi, \chi > \in v(Val^+)$, pero $< \phi, \chi > \notin v(Val^+)$.

Ya hemos visto un ejemplo de lo primero: $< \pi, \pi > \notin v(Val^+)$. Para lo segundo, obsérvese que $< \pi \wedge Val(\langle \pi \rangle, \langle \bot \rangle, \bot > \in v(Val^+)$, $< \bot, \phi > \in v(Val^+)$, pero $< \pi \wedge Val(\langle \pi \rangle, \langle \bot \rangle, \phi > \notin v(Val^+)$. Estas reglas sí se cumplen cuando nos restringimos al fragmento del lenguaje libre del predicado $Val(x, y)$, pero eso parece insuficiente en este contexto.

Otra debilidad de este enfoque es que el punto de partida $v^0(Val^+)$ es un tanto artificial. Obviamente, no podemos iniciar la construcción estipulando que $v^0_M(Val^+) = \varnothing$, pues L$Val$ no sería válido, pero solucionar esta dificultad mediante la adición de todas las instancias de LVal al comienzo de la construcción no parece la mejor alternativa[50].

Creo que hay una lección más o menos clara que podemos llevarnos de todo esto. Para obtener un predicado validez ingenuo (con vacíos o sin ellos) tenemos que modificar las propiedades estructurales que usualmente atribuimos a la noción de validez. ¡Las lógicas subestructurales hacer precisamente eso! Así que, aunque podría haber buenas razones para utilizar lógicas paracompletas (o paraconsistentes) con el fin de resolver las paradojas semánticas habituales, la paradoja de la validez nos obliga a considerar más de cerca los enfoques subestructurales.

2.6. Cuantificación restringida

Como señalé en el capítulo 1, una de las principales motivaciones detrás de algunas teorías no clásicas de la verdad es la idea de que el predicado veritativo no es más que un dispositivo lingüístico cuyo único propósito es el de permitir la expresión de ciertas generalizaciones. Las generalizaciones para las que hace falta el predicado de verdad tienen habitualmente la forma *Todos los ϕs son ψs*[51] y parece apropiado entenderlas como enunciados

[50] Otra dificultad que no voy a considerar aquí es que, dado que la construcción se realiza a través del esquema fuerte de Kleene, no está nada claro cómo combinar el predicado con validez un operador condicional adecuado.

[51] Naturalmente, estoy simplificando las cosas en gran medida aquí. El predicado veritativo también es necesario para expresar generalizaciones mucho más complejas que las que considero. Por otra parte, también se necesita el predicado de verdad para expresar, por ejemplo, generalizaciones restringidas existenciales, o universales negativas, como *Algunos ϕs son ψs* o *Ningún ϕ es ψ*. Como sugiere Field, tenemos diferentes opciones aquí. Para los existenciales, o bien usamos $\neg\forall x(\phi(x) \blacktriangleright \neg\psi(x))$ o bien usamos $\exists x(\phi(x) \wedge \psi(x))$. Para los del segundo tipo, o bien usamos $\forall x(\phi(x) \blacktriangleright \neg\psi(x))$ o $\neg\exists x(\phi(x) \wedge \psi(x))$. La notación se explica más abajo.

condicionales de algún tipo.

Ahora bien, si se utiliza el condicional de Field $\rightarrow$ para formalizar generalizaciones restringidas, todos los problemas que afectan al condicional repercutirán en el modo en que la teoría da cuenta de los razonamientos que involucran generalizaciones restringidas. Obsérvese cuán serio es este problema: si la única razón para introducir un predicado de verdad transparente en el lenguaje es permitir la expresión de ciertas afirmaciones generales, la teoría debe al menos captar la forma en que razonamos con estas afirmaciones. Si la teoría no logra hacer esto, entonces ¿qué sentido tiene introducir el predicado de verdad?

En consecuencia, aquí enumero algunas leyes que se espera que las cuantificaciones universales restringidas (*Todos los ϕs son ψs*) obedezcan (la lista es de [34]):

(I): (Para todo x:) Si todos los ϕs son ψs, y x es ϕ, entonces x es ψ[52]
(II): Si todos son ψs, entonces todos los ϕs son ψs
(III): Si todos los ϕs son ψs, y todos los ψs son χs, entonces todos los ϕs son χs
(III_{var}): Si todos los ϕs son ψs, y no todos los ϕs son χs, entonces no todos los ψs son χs
(IV): Si todos los ϕs son ψs, y todos los ϕs son χs, entonces todos los ϕs son tanto ψs como χs
(IV_{var}): Si todos los ϕs son ψs, y no todos los ϕs son tanto ψs como χs, entonces no todos los ϕs son χs
(V): Si no todos los ϕs son ψs, entonces hay algo que es ϕ y no es ψ
(VI): Si algo es tanto ϕ como ψ, entonces no todos los ϕs son ψs.[53]

La lista no pretende ser exhaustiva. Es interesante notar, de todos modos, que es sumamente difícil construir una teoría no clásica de la verdad que valide todos estos principios. Según Field [34]:

> The motivation for trying to keep the above laws (together with other natural laws of restricted quantification that will emerge)

[52] Por tanto, presumiblemente: (I-) Si todos los ϕs son ψs, y todos son ϕs, entonces todos son ψs.

[53] Field tentativamente suscribe a la idea de que los cuantificadores restringidos validan contraposición:
(C): Todos los ϕs son ψs si y sólo si todos los no-ψs son no-ϕs.

Pero, él mismo sugiere que aún si no vale contraposición, los siguientes principios son atractivos:
(Ic): Si todos los ϕs son ψs, y x no es ψ, entonces x no es ϕ
(IIc): Si nada es ϕ entonces todos los ϕs son ψs.

> isn't just that they "sound right". (...) The motivation, rather, is that it is important to be able to reason with restricted quantifiers, and without laws that at the very least approximate these, our ability to so reason would be crippled.

Lo primero que debemos observar es que los principios ofrecidos más arriba no pueden ser todos ellos válidos si utilizamos un solo condicional ($\rightarrow$ en el caso de la teoría de Field). La razón es simple. Echemos un vistazo por ejemplo a (I). A partir de este principio no es difícil obtener la ley de *pseudo modus ponens*. Pero si $\rightarrow$ satisface tanto la regla de *modus ponens* y la ley de *pseudo modus ponens*, la paradoja de Curry haría que la teoría sea trivial. Por esa razón, Field introduce un segundo condicional $\blacktriangleright$, que se utiliza para representar cuantificaciones universales restringidas. Así, mientras que los enunciados de la forma *Si ϕ, entonces ψ* deben representase como $\phi \rightarrow \psi$, los enunciados de la forma *Todos los ϕs son ψs* deben representarse como $\forall x(\phi \blacktriangleright \psi)$.

¿Cómo debemos formular, entonces, las leyes que involucran cuantificadores restringidos? Aquí es cuando la combinación de los dos condicionales se vuelve útil:

$(I- \blacktriangleright) : \forall x(\phi(x) \blacktriangleright \psi(x)) \wedge \phi(t) \rightarrow \psi(t)$
$(II- \blacktriangleright) : \forall x\psi(x) \rightarrow \forall x(\phi(x) \blacktriangleright \psi(x))$
$(III- \blacktriangleright) : \forall x(\phi(x) \blacktriangleright \psi(x)) \wedge \forall x(\psi(x) \blacktriangleright \chi(x)) \rightarrow \forall x(\phi(x) \blacktriangleright \chi(x))$
$(III- \blacktriangleright_{var}) : \forall x(\phi(x) \blacktriangleright \psi(x)) \wedge \neg\forall x(\phi(x) \blacktriangleright \chi(x)) \rightarrow \neg\forall x(\psi(x) \blacktriangleright \chi(x))$
$(IV- \blacktriangleright) : \forall x(\phi(x) \blacktriangleright \psi(x)) \wedge \forall x(\phi(x) \blacktriangleright \chi(x)) \rightarrow \forall x(\phi(x) \blacktriangleright (\psi(x) \wedge \chi(x)))$
$(IV- \blacktriangleright_{var}) : \forall x(\phi(x) \blacktriangleright \psi(x)) \wedge \neg\forall x(\phi(x) \blacktriangleright (\psi(x) \wedge \chi(x))) \rightarrow \neg\forall x(\phi(x) \blacktriangleright \chi(x))$
$(V- \blacktriangleright) : \neg\forall x(\phi(x) \blacktriangleright \psi(x)) \rightarrow \exists x(\phi(x) \wedge \neg\psi(x))$
$(VI- \blacktriangleright) : \exists x(\phi(x) \wedge \neg\psi(x)) \rightarrow \neg\forall x(\phi(x) \blacktriangleright \psi(x))$
$(C- \blacktriangleright) : \forall x(\phi(x) \blacktriangleright \psi(x)) \leftrightarrow \forall x(\neg\psi(x) \blacktriangleright \neg\phi(x))$.

Field ([34]) ofrece una construcción muy interesante y novedosa de punto fijo para la teoría con los dos condicionales. Ocuparía demasiado espacio presentarla aquí, pero como nota Field, esta teoría valida todos los principios listados arriba (e incluso más). Se alienta al lector interesado a consultar [34], donde se explica la construcción de punto fijo y se ofrece un número de diferentes ejemplos de cómo evaluar semánticamente oraciones y argumentos utilizando dicha construcción.

Aun así, todavía hay lugar para preguntarse si la teoría es tan buena como se promociona. Una cosa importante a observar es que $\rightarrow$ no puede satisfacer la ley de contraposición, por lo que la teoría presentada en la sección 2.3 para

$\to$ debe ser ligeramente modificada (debilitada, de hecho). La razón es que la ley de contraposición para $\to$ junto con algunos de los principios para $\blacktriangleright$, son suficientes para probar que vale la ley de tercero excluido, lo cual sería desastroso para este enfoque. El razonamiento es como sigue. Observemos primero que una instancia de $(II- \blacktriangleright)$ es $\neg\phi \to (\neg\psi \blacktriangleright \neg\phi)$, y que esto junto con $(C- \blacktriangleright)$ conduce a $\neg\phi \to (\phi \blacktriangleright \psi)$, lo cual, por $(I- \blacktriangleright)$, nos da $\phi \wedge \neg\phi \to \psi$. Usando contraposición para $\to$, es posible obtener $\neg\psi \to \neg(\phi \wedge \neg\phi)$. Si suponemos que ψ es lógicamente falsa, podemos inferir que $\neg(\phi \wedge \neg\phi)$, lo cual es equivalente a $\phi \vee \neg\phi$. Por consiguiente, a menos que rechacemos el principio de contraposición para $\to$, tenemos un problema. Pero, por supuesto, es discutible si echar por la borda la contraposición de $\to$ es el mejor camino a seguir. Tal vez sea mejor rechazar uno de los principios para $\blacktriangleright$. Este punto merece una mayor discusión de la que ha recibido en la bibliografía.

Otra preocupación natural es si esta es la teoría más fuerte de cuantificación restringida que podemos obtener. De hecho, el propio Field señala (véase [34]) que la teoría no puede validar algunas “leyes que suenan plausibles que involucran condicionales anidados”, tales como *Si x es ϕ, entonces si todos los ϕs son ψs, entonces x es ψ*. Lo que Field sugiere es que este enunciado suele leerse como *Si x es ϕ y todos los ϕs son ψs, entonces x es ψ*, pero aunque esto es de hecho equivalente al enunciado previo en un marco clásico, esto ya no es así en marcos no clásicos, como el de Field.

Voy a dejar el tema de la cuantificación restringida por ahora, ya que aún no hay consenso sobre la adecuación de este tipo de enfoques que involucran dos condicionales.

Capítulo 3

Teorías paraconsistentes

3.1. Las paradojas semánticas y la regla de explosión

La lógica clásica valida la dudosa afirmación de que las contradicciones implican cualquier cosa. Por lo general, esta es la manera informal de enunciar la regla *Ex contradictione Quodlibet*, a veces también llamada 'regla de explosión', que nos permite partir de la afirmación de que *ϕ y no ϕ se cumple* a cualquier afirmación que queramos.

Al igual que con la ley de tercero excluido, hay numerosas razones para sostener que esta regla debe rechazarse. Aquí sólo me ocuparé de las razones vinculadas a la existencia de oraciones paradójicas, en especial las que involucran algún predicado semántico[1]. Como mencioné en la introducción, uno de los principios que juegan un papel fundamental en la paradoja del mentiroso es la regla de explosión. Por lo tanto, en este capítulo voy a considerar algunas lógicas que evitan la trivialidad rechazando esta regla[2].

En la sección 2.1 presenté un argumento a favor de la afirmación de que la ley de tercero excluido debe ser rechazada. Allí, mencioné que deberíamos rechazar la afirmación *ϕ y ϕ no es verdadera* y también la afirmación *no es el caso que ϕ y ϕ es verdadera*, porque en cada caso las oraciones conjuntivas parecen tener un conflicto interno. Luego, sugerí que un caso particular de

[1]Otras motivaciones para rechazar la regla de explosión incluyen las paradojas de la teoría de conjuntos -como la paradoja de Russell-, las paradojas de la vaguedad -como la de Sorites-, la evaluación de enunciados sobre normas legales, entre otras

[2]Hay una clara dualidad entre la ley de tercero excluido y la regla de explosión que a veces se pasa por alto, quizá porque usualmente la primera se enuncia como una ley y la segunda como una regla. La dualidad se hace visible cuando la primera se formula en forma de regla: $\psi \Rightarrow \phi \vee \neg\phi$.

este principio general es aquél en que ϕ se sustituye por λ. De modo que, entre otras cosas, debemos rechazar la afirmación *λ y λ no es verdadera* y también la afirmación *no es el caso de que λ y λ es verdadera*. Sin embargo, un teórico paraconsistente no estaría dispuesto a rechazar estas dos últimas afirmaciones. La consideración de oraciones como λ apunta al hecho de que hay algo sospechoso acerca de rechazar todas los enunciados de la forma *ϕ y ϕ no es verdadera* o de la forma *no es el caso que ϕ y ϕ es verdadera*. Aunque, en general, estas afirmaciones parecen poco atractivas, λ es precisamente el tipo de oración para la que un diagnóstico diferente podría ser deseable. Más específicamente, ya que λ es el tipo de oración que puede tener la propiedad de ser verdadera junto con su negación, no parece absurdo aceptar *λ y λ no es verdadera* y/o *no es el caso que λ y λ es verdadera*. En consecuencia, el argumento que nos fuerza a rechazar la ley de tercero excluido para λ es bloqueado por el teórico paraconsistente.

Además, podemos proporcionar un argumento muy simple a favor de las teorías paraconsistentes también. El mejor argumento que conozco proviene de las paradojas semánticas (véase [72], capítulo 1). Por cómo se definió λ, sabemos que es equivalente (o incluso idéntica, dependiendo de cómo se logra la autorreferencia) a la oración *λ no es verdadera*. Por lo tanto, el siguiente bicondicional debe aceptarse:

λ si y sólo si λ no es verdadera.

Además, ya que queremos una teoría ingenua de la verdad, deberíamos aceptar el esquema T, lo que significa que también deberíamos aceptar el bicondicional

λ es verdadera si y sólo si λ.

Pero nótese que al juntar estos dos enunciados deberíamos aceptar (suponiendo la transitividad de 'si y sólo si')

λ es verdadera si y sólo si λ no es verdadera.

Por último, si suponemos que tanto la ley de tercero excluido como razonamiento por casos se cumplen, podemos inferir que debemos aceptar

λ es verdadera y λ no es verdadera,

lo cual es una contradicción. Por supuesto, si de una contradicción se sigue cualquier oración, esto significaría que λ es suficiente para obtener una teoría trivial. Pero no tenemos por qué pasar de la afirmación de que algunas contradicciones son verdaderas a la afirmación de que todo enunciado es verdadero. De hecho, el argumento anterior muestra que hay razones convincentes para aceptar *λ es verdadera y λ no es verdadera*, sin que haya razones para aceptar que todo enunciado es verdadero.

Una vez más, el razonamiento parece bastante difícil de disputar. En cuanto a las dos primeras equivalencias, ellas sólo dependen del significado de λ y de que $Tr(x)$ sea un predicado de verdad ingenuo. El siguiente paso

(dando por sentado la transitividad de 'si y sólo si') es pasar de la afirmación de que
λ es verdadera si y sólo si λ no es verdadera
a la afirmación de que
λ es verdadera y λ no es verdadera.
Este paso es claramente correcto en la lógica clásica y es intuitivamente convincente.

Sin embargo, no es un paso que un lógico paracompleto aceptaría. Para llegar desde la primera afirmación a la segunda, se necesita la ley de tercero excluido[3]. Así que, de la misma forma que un lógico paraconsistente puede bloquear el argumento de la sección 2.1, que establece que debemos rechazar la ley de tercero excluido, el lógico paracompleto puede bloquear el argumento ofrecido en esta sección, el cual establece que debemos rechazar la ley de explosión. Por lo tanto, a pesar de algunas declaraciones de superioridad que pueden encontrarse en la bibliografía (tanto a favor de la paracompletitud como a favor de la paraconsistencia), lo que parece imperar es la simetría.

3.2. Sistemas paraconsistentes: semántica y teoría de la prueba

3.2.1. Semántica

Como con las teorías paracompletas, hay muchas maneras diferentes de proporcionar una caracterización semántica para el tipo de lógicas voy a considerar. Para facilitar la comparación con las teorías paracompletas, el primer enfoque semántico que exploraré es el que se basa en matrices. Así que, al igual que antes, sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden y sea $\mathcal{M}$ una matriz para $\mathcal{L}$. Una vez más, decimos que la estructura $< d, v^{\mathcal{M}} >$ es una función de interpretación para $\mathcal{L}$ basada en la matriz $\mathcal{M}$.

Hasta este punto no hay ninguna diferencia con la semántica de matrices para las teorías paracompletas. La primera diferencia importante es que ahora asumimos, como en la lógica clásica, que $v^{\mathcal{M}}(R^+) \cup v^{\mathcal{M}}(R^-) = d$ para cada

[3]Hay otra manera de pasar de *λ es verdadera si y sólo si λ no es verdadera* a *λ es verdadera y λ no es verdadera*. En lugar de utilizar la ley de tercero excluido, podemos utilizar una versión (válida en la lógica intuicionista) de la regla de *reductio*, según la cual, cada vez que podemos inferir la negación de ϕ del supuesto de que ϕ, podemos inferir la negación de ϕ (libre de suposiciones). Sin embargo, como ya señalé, un lógico paracompleto acerca de las paradojas semánticas rechazará también esta versión de *reductio*. De hecho, bajo condiciones mínimas, la ley de tercero excluido y esta versión de *reductio* son equivalentes.

predicado R. Esto significa que las interpretaciones $v^{\mathcal{M}}$ son *exhaustiva*, en el sentido de que para cada objeto de d y para cualquier predicado R, se cumple que el objeto cae bajo la extensión de R o cae bajo su antiextensión. Por supuesto, ahora ya no exigimos que $v^{\mathcal{M}}(R^{+}) \cap v^{\mathcal{M}}(R^{-}) = \varnothing$ para cada R, porque queremos que ciertos objetos caigan tanto bajo la extensión de R como bajo su antiextensión (por lo menos para algunos predicados R y algunos objetos de d). En otras palabras, las interpretaciones $v^{\mathcal{M}}$ no son *exclusivas*.

Comenzaré analizando la matriz para la lógica LP, dual de K_3. Al igual que con K_3, una característica atractiva de LP es que encaja muy bien con la motivación conceptual detrás del enfoque paraconsistente presentada en la sección anterior. Las oraciones paradójicas aparentan ser a la vez verdaderas y falsas. Si el valor 1 se equipara con ser estrictamente verdadero (o estrictamente verdadero de acuerdo a un modelo) y el valor 0 se equipara con ser estrictamente falso (de acuerdo con un modelo), entonces podemos decir que el valor intermedio $\frac{1}{2}$ debe equipararse con ser *verdadero y falso* (de acuerdo a un modelo). Una vez más, el tercer valor puede ser utilizado para categorizar semánticamente las oraciones problemáticas.

Definición (*Una matriz para LP*) La lógica LP puede caracterizarse por medio de la matriz $\mathcal{M}$, la cual es idéntica a K_3 excepto porque

- $\mathcal{D} = \{1, \frac{1}{2}\}$

Una función de interpretación v^{LP} para $\mathcal{L}$ basada en la matriz $\mathcal{M}$ que caracteriza LP puede definirse recursivamente de la siguiente forma:

- $v^{LP}(Rc_1, ..., c_n) = 1$ si y sólo si $< v^{LP}(c_1), ..., v^{LP}(c_n) > \notin v^{LP}(R^{-})$, y $v^{LP}(Rc_1, ..., c_n) = 0$ si y sólo si $< v^{LP}(c_1), ..., v^{LP}(c_n) > \notin v^{LP}(R^{+})$.

- $v^{LP}(\neg\psi), v^{LP}(\psi \vee \chi), v^{LP}(\psi \wedge \chi)$ y $v^{LP}(\exists x\psi)$ se definen igual que en K_3.

Ahora estamos en condiciones de ofrecer una definición de validez para LP.

Definición (*LP-válido*) Diré que un argumento de Γ a Δ es *LP-válido* ($\Gamma \vDash_{LP} \Delta$) si y sólo si para toda interpretación v^{LP}, si $v^{LP}(\delta) = 0$ para todo $\delta \in \Delta$, entonces $v^{LP}(\gamma) = 0$ para algún $\gamma \in \Gamma$.

Equivalentemente, podemos decir que un argumento es LP-válido si y sólo si para toda interpretación v^{LP}, si $v^{LP}(\gamma) \in \{1, \frac{1}{2}\}$ para cada $\gamma \in \Gamma$, entonces $v^{LP}(\delta) \in \{1, \frac{1}{2}\}$ para algún $\delta \in \Delta$. Más intuitivamente, un argumento es

LP-válido si preserva falsedad (estricta) de conclusiones a premisas o, lo que es lo mismo, si preserva los valores distintos de 0 de premisas a conclusiones.

Antes de considerar otro tipo de caracterización semántica para LP, mencionaré algunas de sus propiedades.

Proposición 3.2.1 (Propiedades de LP) *LP tiene las siguientes propiedades:*

- *LP es una lógica paraconsistente, ya que $\phi, \neg\phi \nvDash_{LP} \psi$.*
- *LP tiene las mismas oraciones válidas que la lógica clásica (CL): para toda oración ϕ de $\mathcal{L}$, $\vDash_{LP} \phi$ si y sólo si $\vDash_{CL} \phi$.*

Prueba La primera propiedad se puede verificar fácilmente considerando una v^{LP} tal que $v^{LP}(\phi^{At}) = \frac{1}{2}$ y $v^{LP}(\psi) = 0$. Para la segunda condición, primero tenemos que comprobar que todas las interpretaciones clásicas también son interpretaciones de LP. Esto nos da la dirección de izquierda a derecha. Para la otra dirección, tenemos que comprobar que todas las interpretaciones de LP pueden transformarse en interpretaciones clásicas adecuadamente (véase [73], ej. 2, 4 y 5). ∎

Antes de mostrar cómo agregar un predicado de verdad a LP, voy a presentar algunas lógicas paraconsistentes distintas de LP que pueden ser relevantes para nuestros propósitos. La primera lógica de la que voy a hablar es RM_3. Una de las características más interesantes de LP es que falla la regla del silogismo disyuntivo: $\phi \vee \psi, \neg\phi \nvDash_{LP} \psi$. Si definimos el condicional usando la disyunción y la negación de la forma habitual (es decir, $\phi \supset \psi =_{df} \neg\phi \vee \psi$), la invalidez de esta regla trae consigo la invalidez del *modus ponens*: $\phi \supset \psi, \phi \nvDash_{LP} \psi$. En consecuencia, un problema serio con LP -que ya he mencionado- es que carece de un condicional razonable. La lógica RM_3 es idéntica a LP excepto por el hecho de que contiene un condicional que no es definible en términos de la negación y la disyunción:

$\supset^{RM_3}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	0	0
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0
0	1	1	1

Modus ponens es una regla válida en RM_3, pero ahora el problema es que la lógica es trivial si añadimos un predicado veritativo transparente. Para ver esto es suficiente considerar la oración de Curry κ. No hay una asignación consistente de valores semánticos para κ si el condicional se comporta como especificamos más arriba.

Volveré a la cuestión de cómo agregar un condicional plausible a LP en una sección posterior, pero ahora consideremos otra lógica paraconsistente que será relevante para nosotros.

A veces se dice que la oración del honesto τ es problemática para las teorías paraconsistentes. Hemos visto que hay un fuerte argumento a favor de la afirmación de que la oración del mentiroso es a la vez verdadera y falsa. Pero parece que no hay un argumento análogo disponible para la oración del honesto. De hecho, mientras que el diagnóstico según el cual el mentiroso es a la vez verdadero y falso suena razonable, parece mucho más natural decir que la oración del honesto no es verdadera ni falsa (como ocurre, en general, en los enfoques paracompletos). Estas consideraciones, por tanto, pueden usarse para argumentar a favor de un tratamiento paracompleto de oraciones como la del honesto, es decir, oraciones para las que la atribución de verdad o falsedad es arbitraria.

Por esta razón, podría ser valioso mirar más de cerca la lógica de implicación de primer grado ('first degree entailment') FDE. FDE puede caracterizarse por medio de una matriz de cuatro valores de la siguiente manera:

Definición (*Una matriz para* FDE) La lógica FDE puede caracterizarse por medio de la matriz $\mathcal{M} =< \mathcal{V}, \mathcal{D}, \mathcal{O} >$, donde:

- $\mathcal{V} = \{0, n, b, 1\}$,
- $\mathcal{D} = \{1, b\}$, and
- $\mathcal{O}$ se define de la siguiente forma:

	$\neg^{FDE}$
1	0
b	b
n	n
0	1

$\vee^{FDE}$	1	b	n	0
1	1	1	1	1
b	1	b	1	b
n	1	1	n	n
0	1	b	n	0

	$\exists^{FDE}$
$\{1\}$	1
$\{b\}$	b
$\{n\}$	n
$\{0\}$	0
$\{1, b\}$	1
$\{1, n\}$	1
$\{1, 0\}$	1
$\{b, n\}$	1
$\{b, 0\}$	b
$\{n, 0\}$	n
$\{1, b, n\}$	1
$\{1, b, 0\}$	1
$\{1, n, 0\}$	1
$\{b, n, 0\}$	1
$\{1, b, n, 0\}$	1

Podemos dar condiciones de verdad para FDE de la forma habitual y definir v^{FDE} recursivamente. La noción de validez para FDE se define de la manera obvia. Un argumento es FDE-válido si preserva los valores designados 1 y b. FDE es una lógica tanto paraconsistente ($\phi, \neg\phi \nvDash_{FDE} \psi$) como paracompleta ($\nvDash_{FDE} \phi, \neg\phi$). Algunas oraciones son verdaderas y falsas, y por lo tanto reciben el valor b; y algunas oraciones no son verdaderas ni falsas, y por lo tanto reciben el valor n. En particular, tenemos diferentes diagnósticos disponibles para la oración del mentiroso y la del honesto. Puesto que hay dos maneras de evaluar semánticamente las oraciones problemáticas, es posible sostener que $v^{FDE}(\lambda) = b$ y $v^{FDE}(\tau) = n$, el mentiroso es a la vez verdadero y falso, mientras que el honesto no es verdadero ni falso.

FDE es una sublógica de LP y de K_3, en el sentido de que cada argumento válido en FDE es válido en LP y en K_3. Sin embargo, a pesar de que podría pensarse que FDE es la lógica más fuerte que, a la vez, es una sublógica de LP y de K_3, esto no es exacto. Consideremos la inferencia

$\phi \wedge \neg\phi \vDash \psi \vee \neg\psi$.

Esta inferencia es válida en K_3 y en LP, sin embargo, es inválida en FDE, porque hay una interpretación v^{FDE} tal que $v^{FDE}(\phi \wedge \neg\phi) = b$ y $v^{FDE}(\psi \vee \neg\psi) = n$.

De hecho, la sublógica más fuerte de LP y K_3 es la lógica a veces conocida como S_3 (la S viene de lógica de Kleene fuerte 'simétrica'). Un argumento es S_3-válido si y sólo si es a la vez K_3-válido y LP-válido. Esta es la lógica subyacente de la teoría de la verdad PKF ('partial Kripke-Feferman') presentada en [53] y [47]. La lógica es 'simétrica' en el sentido de que los argumentos válidos en S_3 preservan la verdad de las premisas a la conclusión pero también preservan la falsedad de la conclusión a las premisas, una propiedad *prima facie* muy atractiva.

Las relaciones entre las lógicas de las que he hablado se pueden resumir de la siguiente manera:

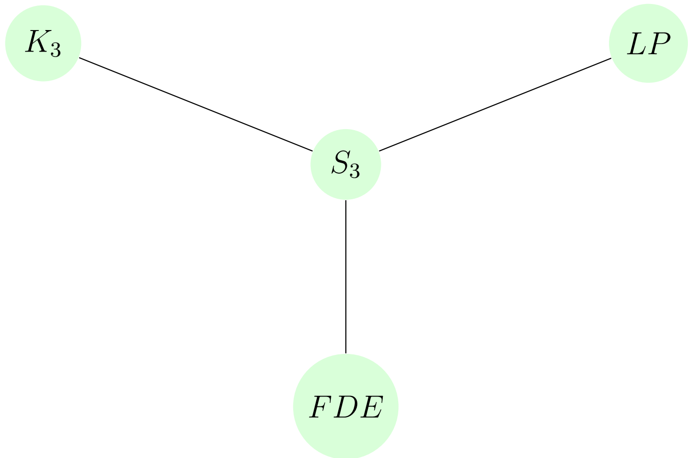

Figura 3.1: La familia FDE.

Debe quedar claro que el hecho de que FDE y S_3 sean sublógicas de LP y de K_3 es suficiente para concluir que son compatibles con un predicado de verdad transparente.

Un predicado de verdad transparente

Al igual que con K_3, tenemos que demostrar que es posible añadir un predicado de verdad transparente a LP. Una vez más, diré que $\mathcal{L}^+$ es el lenguaje que resulta de añadir un cierto predicado monádico $Tr(x)$ a $\mathcal{L}$.

Hasta ahora he intentado evitar hablar de vacíos (*gaps*) de valores de verdad y cúmulos (*gluts*) de valores de verdad. Pero una forma muy popular de distinguir las teorías paracompletas de las teorías paraconsistentes es a través de la distinción entre vacíos y cúmulos. En los enfoques paracompletos se dice que la oración del mentiroso nos fuerza a postular un vacío de valores de verdad, en el sentido de que la oración carece de un valor de verdad, es 'gappy'. Mientras que en los enfoques paraconsistentes se dice la oración del mentiroso nos fuerza a postular un cúmulo de valores de verdad, es decir, la oración del mentiroso tiene dos valores de la verdad al mismo tiempo, es 'glutty'. De hecho, el rechazo de la ley de tercero excluido es a veces (de hecho, la mayor parte de las veces) equiparado con la aceptación de vacíos de valores de verdad, y el rechazo de la regla de explosión es a veces (de hecho, la mayor parte de las veces) equiparado con la aceptación de cúmulos de valores de verdad.

Pero, resulta que ninguna de estas dos identificaciones es del todo exacta (véase, por ejemplo [34]). Para ser precisos, digamos que una teoría *acepta vacíos de valores de verdad* si y sólo si

$\nvDash \neg Tr\langle\phi\rangle \wedge \neg Tr\langle\underset{\cdot}{\neg}\phi\rangle$,
y que una teoría es *paracompleta* si y sólo si
$\nvDash \phi, \neg\phi$.
No hay ninguna razón para pensar que estas dos propiedades siempre se cumplen o fallan conjuntamente, y de hecho, ya en K_3^+, no coinciden. K_3^+ es paracompleta, pero no admite vacíos de valores de verdad en el sentido anterior.

Pasando a las teorías paraconsistentes, digamos que una teoría *acepta cúmulos de valores de verdad* si y sólo si
$\vDash Tr\langle\phi\rangle \wedge\ Tr\langle\underset{\cdot}{\neg}\phi\rangle$,
y que una teoría es *paraconsistente* si y sólo si
$\phi, \neg\phi \nvDash \psi$.
Una vez más, no hay ninguna razón para pensar que estas dos propiedades son equivalentes. Ya en LP^+ la identificación es problemática. Pues aunque LP^+ es a la vez paraconsistente y acepta cúmulos de valores de verdad, también admite vacíos de valores de verdad, al menos de acuerdo con nuestra definición. De hecho, el problema de fondo es que tanto en K_3^+ como en LP^+ vacíos y cúmulos son equivalentes, ya que contamos con todas las reglas de De Morgan y con la equivalencia entre ϕ y $\neg\neg\phi$.

¿Podemos desarrollar una teoría paraconsistente que acepte cúmulos de valores de verdad y sin aceptar vacíos de valores de verdad? La respuesta es 'sí' y, de hecho, este es el tipo de teoría que defiende Priest en [72]. Las teorías paraconsistentes de la verdad apoyan la idea de que algunas oraciones falsas también son verdaderas, por lo que parece que estas teorías no deben aceptar el principio según el cual: si una oración es falsa, entonces no es verdadera. En otras palabras, siguiendo esta línea de razonamiento, las teorías paraconsistentes deben rechazar el paso de
$Tr\langle\underset{\cdot}{\neg}\phi\rangle$
a
$\neg Tr\langle\phi\rangle$.

Esto quiere decir que los cúmulos de valores de verdad $(Tr\langle\phi\rangle \wedge\ Tr\langle\underset{\cdot}{\neg}\phi\rangle)$ no implican vacíos de valores de verdad $(\neg Tr\langle\phi\rangle \wedge \neg Tr\langle\underset{\cdot}{\neg}\phi\rangle)$, ya que el paso anterior es necesario para validar esta implicación[4].

Ahora bien, rechazar este paso es suficiente para rechazar la transparencia del predicado de verdad, pues nótese que la inferencia de $\neg\phi$ a $\neg Tr\langle\phi\rangle$ ya no es legítima. Este es el punto en que dos defensores bien conocidos de la paraconsistencia, Priest [72] y Beall [17], separan sus caminos. Tal vez la di-

[4]De forma dual, un teórico paracompleto podría querer decir que los vacíos de valores de verdad no implican cúmulos de valores de verdad. Si es así, debe rechazar el principio según el cual: si una oración no es verdadera $(\neg Tr\langle\phi\rangle)$, entonces es falsa $(Tr\langle\neg\phi\rangle)$. Sin embargo, no estoy al tanto de alguien que sostenga esta posición en la bibliografía.

ferencia radica en el hecho de que este último ve el predicado de verdad como un dispositivo puramente expresivo, mientras que el primero suscribe a una concepción teleológica de la verdad. Si la verdad es un dispositivo puramente expresivo cuyo único objetivo es permitir la expresión de generalizaciones de un cierto tipo, entonces parece seguirse, por las consideraciones ofrecidas en el primer capítulo, que la verdad es (o al menos debe ser) absolutamente transparente. Si, sin embargo, la verdad tiene una naturaleza subyacente, tal vez hayan razones para dudar de su presunta transparencia.

En lo que queda me ocuparé sólo de un predicado de verdad transparente, es decir, impondré la siguiente condición:

- Para cada fórmula ϕ de $\mathcal{L}^+$ y cada v: $v(\phi) = v(Tr\langle\phi\rangle)$[5].

Voy a llamar a la teoría resultante LP^+. Es posible proporcionar una semántica trivaluada de punto fijo por LP^+. La construcción es muy similar a la ofrecida en el capítulo 2 para K_3^+. Las principales diferencias son las siguientes:

- Para obtener el punto fijo mínimo, en lugar de comenzar la construcción sin oraciones pertenecientes a la extensión y la antiextensión del predicado de verdad ($v^0(Tr^+) = v^0(Tr^-) = \varnothing$), hacemos que *todas* las oraciones estén tanto en la extensión como en la antiextensión del predicado de verdad ($v^0(Tr^+) = v^0(Tr^-) = Sent_{\mathcal{L}^+}$).

- Esto significa que en lugar de ser creciente, la construcción será decreciente. A medida que avanzamos a través de los ordinales, la extensión y la antiextensión del predicado de verdad se hacen más y más pequeñas, en el sentido de que (los códigos de) las oraciones van saliendo de la extensión o de la antiextensión del predicado de verdad.

- En los ordinales límite, en lugar de tomar la unión para calcular la nueva extensión y la nueva antiextensión del predicado de verdad, tomamos la intersección.

- La extensión y la antiextensión decrecen de forma monótona, por lo que las consideraciones habituales de cardinalidad se aplican para demostrar que en algún momento se alcanza un punto fijo. Para obtener puntos fijos diferentes del mínimo, podemos empezar la construcción de otra manera. Por ejemplo, podemos poner la oración del honesto τ fuera de la extensión del predicado de verdad en v^0. La construcción se

[5]En lo que sigue, entiendo v como una interpretación basada en la matriz para LP.

lleva a cabo de la misma manera, pero ahora τ sólo estará en la anti-extensión del predicado de verdad en el punto fijo, por lo que su valor será 0, en lugar de $\frac{1}{2}$, y el punto fijo resultante es uno que extiende el punto fijo mínimo.

Espero que esto sea suficiente para entender la idea general de la construcción. Al igual que antes, pasaré a considerar ahora de qué forma podemos construir un procedimiento de prueba para esta teoría.

3.2.2. Teoría de la prueba

Esta sección es similar a la sección 2.2.2. Por razones que ya he discutido allí, voy a ofrecer dos procedimientos de prueba por LP^+. Uno de los procedimientos de prueba utiliza secuentes de tres lados, mientras que el otro utiliza secuentes estándar.

Secuentes de tres lados

Una característica muy atractiva de los secuentes de tres lados es que no es necesario definir un nuevo sistema diferente de $\mathcal{S}^+$ con el fin de obtener un procedimiento de prueba para LP^+. Todo lo que necesitamos hacer es modificar la definición sintáctica de validez.

Definición (*Validez sintáctica para* LP^+) Diré que un argumento del conjunto Γ al conjunto Δ es *sintácticamente válido en* LP^+ (en notación, $\Gamma \vdash_{LP^+} \Delta$) si el secuente $\Gamma|\Delta|\Delta$ tiene una prueba en $\mathcal{S}^+$.

De modo que las reglas de $\mathcal{S}^+$ son las mismas para K_3^+ y para LP^+. Básicamente, el sistema $\mathcal{S}^+$ representa las operaciones del esquema de Kleene fuerte comunes a K_3^+ y a LP^+ a través de sus reglas, y al igual que en la semántica basada en matrices, la diferencia entre estas dos lógicas puede capturarse puramente en términos de la definición de validez.

Otra lógica que puede recibir una caracterización en estos términos es S_3^+ (donde S_3^+ es, obviamente, S_3 más un predicado de verdad transparente):

Definición (*Validez sintáctica para* S_3^+) Diré que un argumento del conjunto Γ al conjunto Δ es *sintácticamente válido en* S_3^+ (en notación, $\Gamma \vdash_{S_3^+} \Delta$) si los secuentes $\Gamma|\Gamma|\Delta$ y $\Gamma|\Delta|\Delta$ tienen una prueba en $\mathcal{S}^+$.

Secuentes de dos lados

Como con K_3^+, hay buenas razones para ofrecer un procedimiento de prueba más estándar para LP^+.

Definición (*El sistema* LLP^+) El sistema LLP^+ es exactamente como el sistema LK_3^+ pero en lugar de $\mathrm{L}\neg^{At}$, se introduce la regla $\mathrm{R}\neg^{At}$:

$$\mathrm{R}\neg^{At}\ \frac{\Gamma, \phi^{At} \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \neg\phi^{At}, \Delta}$$

El sistema resultante caracteriza LP^+ en el sentido de que podemos probar que es correcto y completo con respecto a la semántica que ya hemos ofrecido.

También es posible probar, como en el capítulo 2, que el predicado de verdad se comporta adecuadamente en esta teoría. En particular, es totalmente transparente y respeta los principios de composicionalidad de Tarski.

3.3. Un nuevo condicional: los mundos anormales

Una característica de LP^+ que podría considerarse atractiva es que $Tr(x)$ no sólo es transparente, sino que también valida el esquema T:

Proposición 3.3.1 (Verdad ingenua en LP^+) $\vDash_{LP^+} Tr\langle\phi\rangle \equiv \phi$ *(donde* $\phi \equiv \psi =_{df} (\phi \supset \psi) \wedge (\psi \supset \phi)$*)*

Esta es una consecuencia inmediata del hecho de que LP^+ valida el principio de identidad ($\vDash_{LP^+} \phi \supset \phi$) junto con la transparencia del predicado de verdad en LP^+. Sin embargo, dado que, como hemos observado anteriormente, $\supset$ no satisface *modus ponens* en LP^+, la importancia de esta propiedad es, cuanto menos, dudosa. Lo que en realidad necesitamos es un condicional que, además de ser inmune a la paradoja de Curry, valide el esquema T *y satisfaga modus ponens.*

En consecuencia, parece que tenemos dos opciones. O bien introducimos un nuevo condicional primitivo, o bien no hacemos tal cosa. Si no hacemos tal cosa, debemos tratar de explicar en qué sentido el condicional de LP^+ es útil a pesar de no satisfacer una regla tan básica como *modus ponens*. En [72] y en [17], Priest y Beall (respectivamente) escogen la primera alternativa, mientras que, más recientemente (por ejemplo, en [16]), Beall ha cambiado de parecer al elegir la segunda opción. Por razones de espacio, sólo consideraré la primera alternativa aquí[6].

Antes de mostrar cómo añadir un condicional primitivo a LP^+, ofreceré una nueva caracterización semántica para esta teoría. Esto será útil por varias razones que se aclararán más adelante. Vamos a considerar estructuras de la forma $< \mathcal{W}, \mathcal{N}, \mathcal{A}, @, R, \mathcal{V} >$. En estas estructuras, $\mathcal{W}$ es un conjunto no vacío de mundos y $\mathcal{N}$ es un conjunto no vacío de 'mundos normales', así que tenemos $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{W}$. Podemos utilizar estos dos elementos para definir un conjunto (quizás vacío) de 'mundos anormales' $\mathcal{A} = \mathcal{W} - \mathcal{N}$[7]. Además, @ es el mundo real o base, y suponemos que $@ \in \mathcal{N}$, lo que significa que el mundo real es normal. También necesitamos una relación de accesibilidad binaria R entre mundos, lo cual deberían sonarle familiar a cualquier que haya tenido contacto con lógicas modales. Decimos que Rww' se cumple si y sólo si el mundo w' es accesible desde el mundo w. La cuestión de cómo dar una interpretación filosófica plausible de R es importante, sobre todo para las teorías paraconsistentes, pero no voy a tratarla aquí. Por último, $\mathcal{V}$ es un conjunto de valores semánticos. En particular, en lugar de tener $\mathcal{V} = \{1, \frac{1}{2}, 0\}$, sea $\mathcal{V} = \{\{1\}, \{1, 0\}, \{0\}\}$.

Una interpretación para LP^+ es, como antes, un par $< d, v >$, donde d es el dominio de la cuantificación y v asigna valores semánticos. Pero ahora la función v se relativiza a mundos pertenecientes a $\mathcal{W}$ y en lugar de asignar un valor en $\{1, \frac{1}{2}, 0\}$ a las fórmulas del lenguaje, asigna un valor en $\{\{1\}, \{1, 0\}, \{0\}\}$. Así que $1 \in v_w(\phi)$ significa que ϕ es verdadera en el mun-

[6]En pocas palabras, la segunda opción se basa en la siguiente idea. Aunque el condicional de LP^+ no satisfaga *modus ponens*, satisface (si admitimos conclusiones múltiples) la siguiente inferencia: $\phi, \phi \supset \psi \Rightarrow \psi, \phi \wedge \neg\phi$. Por lo tanto, si aceptamos ϕ y aceptamos $\phi \supset \psi$, la lógica nos da dos posibilidades: o aceptamos ψ o aceptamos que ϕ es una contradicción. Sobre la base de ciertas ideas de Harman [48], Beall sugiere que la lógica debe ir acompañada de principios pragmáticos de aceptación y rechazo. Por ejemplo, un principio pragmático plausible podría ser: las contradicciones deben ser rechazadas. Si esto es así, la inferencia anterior más el principio pragmático nos da una versión de *modus ponens*. Por supuesto, puede haber contextos donde el principio pragmático falla, como los relacionados con oraciones paradójicas. En esos casos, en lugar de aplicar *modus ponens* y deducir ψ, deberíamos inferir simplemente que ϕ es una contradicción.

[7]Una manera de entender los mundos es como sigue. Los mundos normales son los mundos lógicamente posibles, mundos donde las leyes de la lógica (clásica) se cumplen. Los mundos anormales son mundos lógicamente imposibles, mundos donde las leyes de la lógica pueden romperse. Es decir, así como a veces resulta útil considerar, por ejemplo, mundos físicamente imposibles (que son, no obstante, lógicamente posibles) para entender en qué sentido una ley física puede fallar, aquí resulta útil considerar mundos lógicamente imposibles para entender en qué sentido una ley lógica puede fallar. Por supuesto, esta justificación puede ser cuestionada, pero les dejo a los teóricos de la praconsistencia la tarea de defenderla.

do w y $0 \in v_w(\phi)$ significa que ϕ es falsa en w. Si tanto $1 \in v_w(\phi)$ como $0 \in v_w(\phi)$ se cumplen, decimos que ϕ es a la vez verdadera y falsa en w[8].

Hay diferentes maneras de introducir un nuevo condicional en el marco de la semántica de mundos posibles (e imposibles). Una alternativa obvia es definir un condicional estricto:

$\phi \to \psi =_{df}$ para todo $w' \in \mathcal{W}$ tal que Rww', $\phi \supset \psi$

Desde el punto de vista de un lógico relevantista este condicional no funciona, pues se validan oraciones como $\phi \to (\psi \to \psi)$ y $\phi \to (\psi \to \phi)$, para las cuales no es difícil encontrar contraejemplos en el lenguaje ordinario. Ahora bien, incluso si dejamos de lado estas preocupaciones propias del lógico relevantista, los lógicos paraconsistentes interesados en las paradojas semánticas tampoco deberían aceptar esta caracterización, ya que valida principios generadores de paradojas[9]. Tenemos que asegurarnos de que el condicional valide *modus ponens* pero también es necesario asegurarnos de que no valide otros principios que, junto con *modus ponens*, conducen a la trivialidad de la teoría. Por ejemplo, se sabe que, si el predicado de verdad es transparente, cualquier condicional que satisfaga *modus ponens* y el principio de contracción cae presa de la paradoja de Curry.

3.3.1. Condicionales relevantes

Para evitar estas dificultades, Priest [72] prefiere usar un condicional definido en términos de una relación *ternaria* de accesibilidad R[10]. Por lo tanto, nuestras estructuras semánticas serán como antes excepto que ahora R es una relación ternaria entre mundos. Decimos que $Rww'w''$ se cumple si y sólo si el par $< w', w'' >$ es accesible desde el mundo w.

Los enunciados condicionales tienen ahora condiciones de verdad distintas en mundos normales y en mundos anormales. Más precisamente:

- Sea $w \in \mathcal{N}$. Luego:
  - $1 \in v_w(\phi \to \psi)$ si y sólo si para todo $w' \in \mathcal{W}$, si $1 \in v_{w'}(\phi)$, entonces $1 \in v_{w'}(\psi)$.

[8] Esto es similar a la 'semántica relacional'. En la semántica relacional dejamos de lado la función v y usamos en su lugar una relación ρ entre fórmulas y valores de verdad. Una virtud de este enfoque es que no hay necesidad de cambiar el conjunto de valores. Podemos decir que una fórmula se relaciona tanto con el valor 1 como el valor 0. En [72], Priest afirma preferir un enfoque relacional, pero por razones de claridad, aquí seguiré usando función v.

[9] Como Priest sugiere en [72], esto puede evitarse haciendo que la relación R sea no-reflexiva. Sin embargo, no voy a analizar esta idea aquí.

[10] Esta relación ternaria es familiar en la lógicas relevantes. Véase [57] para una interpretación filosófica de esta relación.

- $0 \in v_w(\phi \to \psi)$ si y sólo si para algún $w' \in \mathcal{W}$, $1 \in v_{w'}(\phi)$ y $0 \in v_{w'}(\psi)$.

- Sea $w \in \mathcal{A}$. Luego:

  - $1 \in v_w(\phi \to \psi)$ si y sólo si para todo $w', w'' \in \mathcal{W}$ tal que $Rww'w''$, si $1 \in v_{w'}(\phi)$, entonces $1 \in v_{w''}(\psi)$.
  - $0 \in v_w(\phi \to \psi)$ si y sólo si para algún $w', w'' \in \mathcal{W}$ tal que $Rww'w''$, $1 \in v_{w'}(\phi)$ y $0 \in v_{w''}(\psi)$.

En este marco, la noción de validez semántica se define sobre mundos base:

Definición (*LP^+-válido*) Diré que un argumento de Γ a ϕ es *LP^+-válido* ($\Gamma \vDash_{LP^+} \phi$) si y sólo si para toda interpretación tal que $@ \Vdash \gamma$ para todo $\gamma \in \Gamma$, se cumple que $@ \Vdash \phi$[11].

La teoría resultante es bastante poderosa. De hecho, es muy similar a la lógica relevante B (véase [73]). La diferencia es que mientras que B da las condiciones de verdad para la negación usando la estrella Routley (ver más abajo), las condiciones de verdad de la negación en la presentación de Priest se dan de forma estándar[12]. El resultado es que en B la inferencia
$\phi, \neg\psi \vDash \neg(\phi \to \psi)$
falla, mientras que en la lógica de Priest, vale. Otra dificultad con la lógica de Priest es que la ley de tercero excluído no vale en general para enunciados condicionales. Es decir, hay oraciones de la forma $\phi \to \psi$ tal que $\nvDash (\phi \to \psi) \vee \neg(\phi \to \psi)$. Es fácil ver por qué. Digamos que $1 \in v_@(\phi)$, $0 \notin v_@(\phi)$, $1 \in v_@(\psi)$, y $0 \notin v_@(\psi)$. Además, sea $w \in \mathcal{A}$ y $1 \in v_w(\phi)$, pero $1 \notin v_w(\psi)$ y $0 \notin v_w(\psi)$. Se sigue que $1 \notin v_@(\phi \to \psi)$ y $0 \notin v_@(\phi \to \psi)$. Por ende, intuitivamente, bajo esta presentación semántica, ciertas afirmaciones condicionales no son verdaderas ni falsas.

Priest ofrece una manera de solucionar este problema. Se introduce un 'requisito de aumento', según el cual cada mundo con vacíos de valores de verdad puede transformarse en un mundo sin estos vacíos. De forma un poco más precisa, si hay un mundo w en el que una oración ϕ no es verdadera ni falsa, entonces hay un mundo w' donde ϕ es verdadera y un mundo w'' donde

[11] No utilizo conclusiones múltiples para que mi presentación sea fiel a los trabajos de Priest y Beall.

[12] En más detalle:
$1 \in v_w(\neg\phi)$ si y sólo si $0 \in v_w(\phi)$, y
$0 \in v_w(\neg\phi)$ si y sólo si $1 \in v_w(\phi)$.

ϕ falsa. De forma aún más precisa:

El requisito de aumento
Si $1 \notin v_w(\phi)$ y $0 \notin v_w(\phi)$, entonces existen $w', w'' \in \mathcal{W}$ tales que para toda fórmula $\psi \neq \phi$,

- si $1 \in v_w(\psi)$, entonces $1 \in v_{w'}(\psi)$ y $1 \in v_{w''}(\psi)$, y
- $1 \in v_{w'}(\phi)$ y $0 \in v_{w''}(\phi)$

El fundamento de la restricción es que dado un mundo con un vacío, es natural suponer que hay mundos que son exactamente iguales a éste pero donde se llena ese vacío. Por ejemplo, si hay un mundo en el que Juan no es calvo ni no-calvo, debería haber un mundo en el que él es calvo y un mundo donde no lo es (o en el que es tanto calvo como no-calvo). Ahora bien, aunque este requisito podría estar bien motivado para contextos donde utilizamos predicados vagos (como 'ser calvo'), o contextos en los que se consideran enunciados sobre futuros contingentes (ese es el ejemplo utilizado por Priest), me resulta difícil ver qué motivos podría haber para introducirlo en un contexto donde sólo se consideran las paradojas semánticas.

En cualquier caso, la restricción que impone el requisito de aumento nos asegura que todos los condicionales serán verdaderos o falsos en cada mundo posible. Sea $w \in \mathcal{N}$ y supongamos que $1 \notin v_w(\phi \to \psi)$ y $0 \notin v_w(\phi \to \psi)$. De esto se deduce que hay un mundo w' tal que $1 \in v_{w'}(\phi)$ pero $1 \notin v_{w'}(\psi)$ y $0 \notin v_{w'}(\psi)$. Por el requisito de aumento, hay un mundo w'' tal que $1 \in v_{w''}(\phi)$ y $0 \in v_{w''}(\psi)$. Esto significa que $0 \in v_w(\phi \to \psi)$, lo cual contradice nuestra suposición.

En cuanto a la interacción del nuevo condicional con el predicado de verdad, debemos notar algunos resultados interesantes.

Ejemplo (*La oración de Curry*) Consideremos una vez más una oración κ que dice que $Tr\langle\kappa\rangle \to \bot$. Por razones obvias, κ no puede ser estrictamente verdadera, pero *prima facie* podría ser verdadera y falsa, o estrictamente falsa. La primera opción es atractiva porque parece deseable ofrecer un tratamiento simétrico de la oración del mentiroso y de la oración de Curry. Sin embargo, mostraré que esto no puede ser el caso. De hecho, las teorías paraconsistentes del tipo que estamos considerando deben categorizar a la oración de Curry como una falsedad estricta. La razón es la siguiente. Supongamos que $1 \in v_@(\kappa)$. Dado que κ es la oración $Tr\langle\kappa\rangle \to \bot$, esto implica que $1 \in v_@(Tr\langle\kappa\rangle \to \bot)$. Aunque el predicado veritativo no es completamente transparente en el enfoque de Priest, los casos en los que falla la transparencia involucran la negación, de modo que también podemos inferir que $1 \in v_{@}(Tr\langle\kappa\rangle)$. Pero entonces la cláusula para el condicional en mundos normales (recordemos que @ es un mundo normal) nos proporciona que: en todos los mundos w', si $1 \in v_{w'}(Tr\langle\kappa\rangle)$, entonces $1 \in v_{w'}(\bot)$. Esto se cumple en particular para @. Con lo cual, obtendríamos $1 \in v_{@}(\bot)$. Pero por la definición de $\bot$, esto no puede ser cierto. Por lo tanto, $1 \notin v_{@}(\kappa)$, lo cual quiere decir que $0 \in v_{@}(\kappa)$. La oración es Curry es estrictamente falsa.

Ejemplo (*Modus tollens falla)* Recordemos que Priest se niega a identificar cúmulos con vacíos. En consecuencia, como expliqué más arriba, debe rechazar la inferencia que va de $\neg\phi$ a $\neg Tr\langle\phi\rangle$. Pero obsérvese que
$Tr\langle\phi\rangle \to \phi$
junto con la regla de *modus tollens*
$\phi \to \psi, \neg\psi \vDash \neg\phi$
lleva a
$\neg\phi \vDash \neg Tr\langle\phi\rangle$. De esto se desprende que si queremos un predicado veritativo ingenuo, *modus tollens* debe rechazarse. Esto se logra se la siguiente forma. Consideremos una estructura donde $\mathcal{W} = \mathcal{N} = \{w\}$. Sea $1 \in v_w(\phi)$, $0 \notin v_w(\phi)$, $1 \in v_w(\psi)$ y $0 \in v_w(\psi)$. Por ende, $0 \in v_w(\neg\phi)$, $1 \notin v_w(\neg\phi)$, $1 \in v_w(\neg\psi)$ y $0 \in v_w(\neg\psi)$. De esto podemos inferir que $1 \in v_w(\phi \to \psi)$ y $0 \in v_w(\phi \to \psi)$. Luego, tenemos un contraejemplo a *modus tollens*: $\phi \to \psi, \neg\psi \nvDash_{LP+} \neg\phi$.

Ejemplo (*Identidad y modus ponens valen*) Identidad es sencilla. Si $1 \in v_{@}(\phi)$, entonces $1 \in v_{@}(\phi)$. Así, la cláusula para mundos normales nos da $1 \in v_{@}(\phi \to \phi)$, lo cual significa que $\vDash_{LP+} \phi \to \phi$. En cuanto a *modus ponens*, supongamos que $1 \in v_{@}(\phi \to \psi)$ y que $1 \in v_{@}(\phi)$. Por la cláusula para mundos normales, se sigue que $1 \in v_{@}(\psi)$. Luego, $\phi \to \psi, \phi \vDash_{LP+} \psi$.

Ejemplo (*Contracción falla*) Consideremos una estructura donde $\mathcal{N} = \{@\}$, $\mathcal{A} = \{w\}$ y $R = \varnothing$. Sea $1 \notin v_{@}(\phi), 0 \in v_{@}(\phi), 1 \in v_w(\phi)$, $1 \notin v_w(\psi)$ y $0 \in v_w(\psi)$. Como consecuencia, $0 \in v_{@}(\phi \to \psi)$ y $1 \notin v_{@}(\phi \to \psi)$, ya que hay un mundo, en este caso w, en el que el antecedente es verdadero y el consecuente es falso. Pero, también podemos probar que $1 \in v_{@}(\phi \to (\phi \to \psi))$, pues para cada mundo, si ϕ es verdadera en ese mundo, también lo es $\phi \to \psi$ (en @ ϕ es falsa, mientras que en w $\phi \to \psi$ es verdadera, ya que R es una relación vacía). Por lo tanto, $\phi \to (\phi \to \psi) \nvDash_{LP+} \phi \to \psi$.

Antes de pasar a considerar el enfoque de Beall, mencionaré algunas quejas que Field a realizado en contra del condicional de Priest:

- En primer lugar, no hay ninguna prueba conocida de no trivialidad disponible para esta teoría, y no es fácil ver cómo las pruebas de no trivialidad habituales (como la de [22] o [17]) pueden ser adaptadas para lograr esto, ya que esas pruebas están diseñadas para aplicarse a teorías en la que la verdad es un predicado transparente, algo que no es el caso en el enfoque de Priest.

- Aunque la teoría valida todas las instancias de esquema T, también valida las negaciones de algunas instancias del esquema T. Esto es, a mi parecer, bastante desagradable. Una cosa es declarar válida la negación de la oración del mentiroso, pero otra cosa distinta es declarar válida la negación de un bicondicional que establece la equivalencia entre λ y $Tr\langle\lambda\rangle$.
- Algunas afirmaciones condicionales que no involucran el predicado $Tr(x)$ son verdaderas y falsas a la vez. Esto es aceptable para alguien como Priest, que afirma que hay dialeteias en ámbitos que no están relacionados con las paradojas semánticas. Sin embargo, como Field señala, si el condicional de Priest está diseñado para capturar el condicional indicativo del lenguaje ordinario, está lejos de hacerlo correctamente. Por un lado, el condicional ordinario parece obedecer el principio $\phi \to (\psi \to \psi)$, que no es válido en la teoría de Priest. Por otra parte, el condicional ordinario parece ser no-transitivo y no parece obedecer el principio conocido como 'fortalecimiento del antecedente' $(\phi \to \psi) \to (\phi \wedge \chi \to \psi)$, pero ambos son válidos para el condicional de Priest.

Permítanme dejar de lado por ahora el enfoque de Priest. Algunas de las cuestiones recién planteadas pueden abordarse, por ejemplo, insistiendo en que es preferible tener un predicado de verdad transparente y en que la única fuente de contradicciones verdaderas son las oraciones paradójicas.

La siguiente teoría que voy a considerar es la ofrecida por Beall en [17] y se basa en la 'semántica de la estrella de Routley'. Antes de proporcionar las condiciones de verdad para los enunciados condicionales, debemos hacer algunos ajustes en las cláusulas semánticas para las otras conectivas, especialmente la negación. En este marco, el lenguaje $\mathcal{L}$ se interpreta por medio de estructuras de la forma $< \mathcal{W}, \mathcal{N}, \mathcal{A}, @, \star, \Vdash >$. En estas estructuras, $\mathcal{W}, \mathcal{N}, \mathcal{A}$ y $@$ son como antes. $\star$ es una operación sobre los mundos de $\mathcal{W}$ tal que $w = w^{\star\star}$. Decimos que $w^{\star}$ es el compañero estrella de w. Por último, $\Vdash$ es una relación entre mundos y oraciones. $w \Vdash \phi$ se interpreta como ϕ *es verdadera en el mundo* w. El papel de la operación $\star$ se explicará en breve.

Al igual que antes, sea d el dominio de cuantificación y sea v una función de interpretación para el vocabulario no lógico (nuevamente, no hay necesidad de utilizar v como una función de valuación). Diré que $v_w(c)$ es el objeto denotado por la constante de individuo c en el mundo w de acuerdo a la función v, y que $v_w(R)$ es el conjunto denotado por el predicado R en el mundo w de acuerdo a v. Para simplificar las cosas, asumiré que la denotación de las constantes individuales no varía a través de los mundos (de modo que el subíndice w en $v_w(c)$ puede omitirse), pero que la denotación de los predicados sí varía.

Ahora podemos definir recursivamente en qué consiste que una oración sea verdadera en un mundo de acuerdo a una interpretación:

- $w \Vdash R(c_1, ..., c_n)$ si y sólo si $< v(c_1), ..., v(c_n) > \in v_w(R)$,
- $w \Vdash \neg\phi$ si y sólo si $w^\star \nVdash \phi$,
- $w \Vdash \phi \vee \psi$ si y sólo si $w \Vdash \phi$ o $w \Vdash \psi$,
- $w \Vdash \exists x\phi$ si y sólo si $w' \Vdash \phi$ para alguna x-variante w' de w[13].

Para obtener una lógica paraconsistente (y no paracompleta) imponemos la siguiente condición de *exhaustividad* sobre las interpretaciones:

- $w \Vdash \phi$ o $w^\star \nVdash \phi$ para todo $w \in \mathcal{N}$.

Téngase en cuenta que la semántica basada en la estrella de Routley también se pueden utilizar para caracterizar otras lógicas compatibles con un predicado de verdad transparente. Si en lugar de imponer la condición de exhaustividad, imponemos la siguiente restricción de *exclusividad*, se obtiene una vez más la lógica K_3:

- $w \nVdash \phi$ o $w^\star \Vdash \phi$ para todo $w \in \mathcal{N}$.

Si no imponemos ninguna de estas dos condiciones, obtenemos la lógica FDE, y si imponemos ambas condiciones conjuntamente, se sigue que para cada $w \in \mathcal{W}$ y cada $\phi \in \mathcal{L}$, $w \Vdash \phi$ si y sólo si $w^\star \Vdash \phi$. De modo que $w = w^\star$, lo que nos da la lógica clásica.

Como antes, las condiciones de verdad de los enunciados condicionales serán diferentes en mundos normales y en mundos anormales. Más precisamente:

- Sea $w \in \mathcal{N}$: $w \Vdash \phi \to \psi$ si y sólo si para todo $w' \in \mathcal{W}$, si $w' \Vdash \phi$, entonces $w' \Vdash \psi$.
- Sea $w \in \mathcal{A}$: $w \Vdash \phi \to \psi$ si y sólo si para todo $w', w'' \in \mathcal{W}$ tales que $Rww'w''$, si $w' \Vdash \phi$, entonces $w'' \Vdash \psi$.

[13]Donde una x-variante w' de w es un mundo que es como w excepto en que difiere a lo sumo en lo que la función de asignación asigna a la variable x ligada por $\exists x$.

El condicional resultante tiene las propiedades esperadas. Todos los ejemplos dados anteriormente para el condicional de Priest pueden ser analizados de forma análoga en esta semántica. Así, el condicional de Beall valida *modus ponens*, identidad y otros principios plausibles. Al mismo tiempo, no valida los principios de contracción, *pseudo modus ponens* y otros principios potencialmente peligrosos. Al igual que con el condicional de Priest, la oración de Curry es estrictamente falsa.

La teoría resultante puede caracterizarse axiomáticamente como sigue:

Definición (*La teoría BX*) La teoría BX contiene los siguientes axiomas y reglas:

$\phi \vee \neg\phi$
$\phi \rightarrow \psi$
$\phi \wedge \psi \rightarrow \phi$ (y $\phi \wedge \psi \rightarrow \psi$)
$\phi \rightarrow \phi \vee \psi$ (y $\psi \rightarrow \phi \vee \psi$)
$\phi \leftrightarrow \neg\neg\phi$
$(\neg\phi \vee \neg\psi) \leftrightarrow \neg(\phi \wedge \psi)$
$(\neg\phi \wedge \neg\psi) \leftrightarrow \neg(\phi \vee \psi)$
$\phi \wedge (\psi \vee \chi) \rightarrow (\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \chi)$
$(\phi \rightarrow \psi) \wedge (\phi \rightarrow \chi) \rightarrow (\phi \rightarrow \psi \wedge \chi)$
$(\phi \rightarrow \chi) \wedge (\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\phi \vee \psi \rightarrow \chi)$

$\forall x\phi \rightarrow \phi(t)$
$\phi(t) \rightarrow \exists x\phi$
$\phi \wedge \exists x\psi \rightarrow \exists x(\phi \wedge \psi)$ (donde x no está libre en ϕ)
$\forall x(\phi \vee \psi) \rightarrow (\phi \vee \forall x\psi)$ (donde x no está libre en ψ)
$\forall x(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\exists x\phi \rightarrow \psi)$ (donde x no está libre en ψ)
$\forall x(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow \forall x\psi)$ (donde x no está libre en ϕ)

Si $\vdash \phi$ y $\vdash \phi \rightarrow \psi$, entonces $\vdash \psi$.
Si $\vdash \phi$ and $\vdash \psi$, entonces $\vdash \phi \wedge \psi$.
Si $\vdash \phi \rightarrow \psi$, entonces $\vdash \neg\psi \rightarrow \neg\phi$.
Si $\phi_1 \rightarrow \phi_2$ y $\vdash \psi \rightarrow \chi$, entonces $\vdash (\phi_2 \rightarrow \psi) \rightarrow (\phi_1 \rightarrow \chi)$.[14]

Esta es la lógica relevante básica B más la ley de tercero excluido, que a veces recibe el nombre X en la bibliografía. De modo que la teoría resultante es llamada BX.

[14]Como señala Beall, deben hacerse algunos ajustes para que esta teoría axiomática sea (fuertemente) completa con respecto a la semántica. Necesitamos, en particular, versiones disyuntivas de las reglas. Para simplificar las cosas, sin embargo, voy a ignorar esta complicación. Los detalles pueden encontrarse en [75].

En este marco podemos asegurar la transparencia del predicado veritativo imponiendo la siguiente condición:

- Para toda fórmula ϕ de $\mathcal{L}^+$ y para todo $w \in \mathcal{W}$: $w \Vdash Tr\langle\phi\rangle$ si y sólo si $w \Vdash \phi$.

La teoría resultante es BX^+. La definición de validez para esta teoría no es distinta de la que ofrecimos más arriba para LP^+. BX^+ es una teoría que combina un predicado veritativo completamente transparente con un condicional plausible. En particular:

Teorema 3.3.2 (El esquema T) *Para toda fórmula ϕ de $\mathcal{L}^+$, se cumple que:*

$$\vDash_{BX^+} Tr\langle\phi\rangle \to \phi.$$

Prueba Sólo necesitamos verificar que para cada fórmula ϕ de $\mathcal{L}^+$, se cumple que $\vDash_{BX^+} \phi \to \phi$. Como el predicado veritativo es transparente, el teorema vale. ∎

En lo que queda de esta sección, voy a esbozar una prueba de la no trivialidad de la teoría BX^+. La prueba de la no trivialidad se basa en una construcción de Brady (véase [22]) para una teoría conjuntos paraconsistente, pero Priest (véase [67]) ha adaptado esta construcción para aplicarla a lenguajes semánticos (véase también [17], donde Beall ofrece una versión simplificada de la construcción).

Teorema 3.3.3 (La construcción de Brady, [22]) *BX^+ no es trivial.*

Prueba Sea $\mathcal{L}$ el lenguaje de la aritmética de Peano[15] y sea $\mathcal{L}^+$ el lenguaje que resulta de añadir a $\mathcal{L}$ predicado veritativo $Tr(x)$ y un condicional $\to$. En lo que sigue, sólo consideraré interpretaciones v_α^β para $\mathcal{L}^+$ (explicaré esta notación en breve), donde el vocabulario aritmético tiene su interpretación usual y el dominio es exactamente ω.

En primer lugar, comenzamos con una interpretación v_0^0 basada en el esquema de valuación fuerte de Kleene tal que:

$$v_0^0(\phi) = \begin{cases} v^{PA}(\phi) & \text{si } \phi \in \mathcal{L} \\ \frac{1}{2} & \text{si } \phi \text{ es de la forma } Tr\langle\psi\rangle \text{ o de la forma } \psi \to \chi \end{cases}$$

[15] Al igual que en la sección 2.2, será más fácil utilizar la aritmética de Peano como nuestro sistema de nombres en esta prueba, pero nada importante depende de esto.

En esta definición v^{PA} es una interpretación estándar para las fórmulas del lenguaje de la aritmética de Peano. El resto de las fórmulas de $\mathcal{L}^+$ obtienen su valor en v_0^0 composicionalmente. Además, estipulamos que $v_0^0(Tr(n)) = 0$ para los números n que no codifican fórmulas.

Para cada número ordinal α, construimos una secuencia de interpretaciones v_α^1, v_α^2, v_α^3,...,v_α^ω, $v_\alpha^{\omega+1}$,... . Esto se logra por medio de la aplicación de las cláusulas de Kleene fuerte junto con la siguiente cláusula para el predicado veritativo en cada etapa α:

$$v_\alpha^\beta(Tr\langle\phi\rangle) = \begin{cases} 1 & \text{si } \exists\zeta\forall\eta(\zeta \leq \eta < \beta \text{ implica } v_\alpha^\eta(\phi) = 1) \\ 0 & \text{si } \exists\zeta\forall\eta(\zeta \leq \eta < \beta \text{ implica } v_\alpha^\eta(\phi) = 0) \\ \frac{1}{2} & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Es sencillo probar (por inducción sobre la complejidad de ϕ) que cada una de estas secuencias (esto es, para cada ordinal α, la α-secuencia que se corresponde con ese ordinal) es monótona, en el sentido de que si $\zeta \leq \eta$, entonces para cada fórmula $\phi \in \mathcal{L}^+$, $v_\alpha^\zeta(\phi) = 1$ sólo si $v_\alpha^\eta(\phi) = 1$ y $v_\alpha^\zeta(\phi) = 0$ sólo si $v_\alpha^\eta(\phi) = 0$. Esto significa que en algún momento se llega a un punto fijo, que llamaré v_α^*.

Nótese que esto no es suficiente para llegar al resultado deseado. Si esta construcción tipo-Kripke se aplica sólo una vez, digamos a v_0^0, la valuación resultante (en nuestra notación, v_0^*) es tal que todas las fórmulas de la forma $\phi \to \psi$ obtienen el valor $\frac{1}{2}$. Esto no es lo que queremos, ya que la construcción no validaría muchos de los axiomas de BX^+.

Por consiguiente, necesitamos otra construcción para evaluar correctamente las fórmulas de la forma $\phi \to \psi$:

$$v_\beta^*(\phi \to \psi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \forall\eta < \beta, v_\eta^*(\phi \supset_{RM_3} \psi) = 1 \\ 0 & \text{si } \exists\eta < \beta, v_\eta^*(\phi \supset_{RM_3} \psi) = 0 \\ \frac{1}{2} & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

En la definición de arriba $\supset_{RM_3}$ es el condicional de RM_3, una lógica que ya consideramos en este capítulo. Téngase en cuenta que $\supset_{RM_3}$ no forma parte del lenguaje, simplemente lo usamos para calcular el valor de las fórmulas que tienen a $\to$ como su conectiva principal. Para mostrar que la construcción completa funciona, necesitamos mostrar que la secuencia (de puntos fijos) v_0^*, v_1^*, v_2^*,...,v_ω^*, $v_{\omega+1}^*$,.... es monótona y que por ende llega a un punto fijo. En otras palabras, necesitamos mostrar que si $\zeta \leq \eta$, entonces para toda fórmula $\phi \in \mathcal{L}^+$, $v_\zeta^*(\phi) = 1$ sólo si $v_\eta^*(\phi) = 1$ y $v_\zeta^*(\phi) = 0$ sólo si $v_\eta^*(\phi) = 0$. Es sencillo ver que esto se cumple para todas las fórmulas que no tienen la forma $\phi \to \psi$. Mostraré, a continuación, que esto también se cumple para fórmulas condicionales.

Supongamos que $v^*_\zeta(\phi \to \psi) = 0$. Esto se cumple sólo si $\exists\beta < \zeta, v^*_\beta(\phi \supset_{RM_3} \psi) = 0$, y dado que $\zeta \leq \eta$, esto implica que $\exists\beta < \eta, v^*_\beta(\phi \supset_{RM_3} \psi) = 0$. Esto es suficiente para inferir que $v^*_\eta(\phi \to \psi) = 0$. Ahora supongamos que $v^*_\zeta(\phi \to \psi) = 1$. Esto se cumple sólo si $\forall\beta < \zeta, v^*_\beta(\phi \supset_{RM_3} \psi) = 1$, lo cual quiere decir que $\forall\beta < \zeta, v^*_\beta(\phi) \leq v^*_\beta(\psi)$ y no es el caso que $v^*_\beta(\phi) = v^*_\beta(\psi) = \frac{1}{2}$. Por la definición de $\supset_{RM_3}$, tenemos que considerar cinco posibilidades: $v^*_\beta(\phi) = 0 \leq 0 = v^*_\beta(\psi), v^*_\beta(\phi) = 0 \leq \frac{1}{2} = v^*_\beta(\psi), v^*_\beta(\phi) = 0 \leq 1 = v^*_\beta(\psi), v^*_\beta(\phi) = \frac{1}{2} \leq 1 = v^*_\beta(\psi)$, y $v^*_\beta(\phi) = 1 \leq 1 = v^*_\beta(\psi)$. Por la hipótesis inductiva aplicada a ϕ y a ψ, que son fórmula de menor complejidad, sabemos que $\forall\beta < \eta, v^*_\beta(\phi) \leq v^*_\beta(\psi)$ y no es el caso que $v^*_\beta(\phi) = v^*_\beta(\psi) = \frac{1}{2}$. Esto implica que $\forall\beta < \eta, v^*_\beta(\phi \supset_{RM_3} \psi) = 1$. Por lo tanto, $v^*_\eta(\phi \to \psi) = 1$.

Esto es suficiente para mostrar que la construcción es monótona y que, por tanto, tiene la propiedad de punto fijo. Por supuesto, para probar además que BX^+ no es trivial necesitamos verificar que todos los axiomas y reglas de BX^+ son válidos de acuerdo con esta construcción (esto se lleva a cabo en [22]). Sin embargo, dejaré esta tarea al lector entusiasta. ∎

La construcción es útil para mostrar no sólo que el esquema T se cumple (lo cual también era cierto en la teoría de Priest), sino también para mostrar que la siguiente versión de la propiedad de transparencia está presente.

Teorema 3.3.4 (Transparencia) *Sea ψ cualquier oración en la que ϕ ocurre. El resultado de sustituir $Tr\langle\phi\rangle$ por cualquier ocurrencia de ϕ en ψ tiene el mismo valor semántico que ψ.*

Prueba Véase [17]. ∎

Otro hecho interesante que aún no he mencionado es que aunque aquí hemos utilizado la prueba de Brady para mostrar que BX^+ no es trivial, la prueba también se aplica a lógicas más fuerte que BX^+. Esto significa que la prueba es muy útil, ya que abarca la no trivialidad de varias teorías que combinan un condicional con un predicado veritativo transparente.

3.3.2. ¿Es $\to$ un condicional plausible?

El condicional de Beall no valida una serie de principios y reglas que son *prima facie* deseables y que no parecen ser potencialmente peligrosos. De hecho, la prueba de Brady puede ser utilizada para mostrar que varios principios pueden añadirse a BX^+ sin trivializar esta teoría (véase [23]):

$(\phi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\phi)$
$(\phi \to \psi) \vee (\psi \to \phi)$
$((\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \chi)) \to (\phi \to \chi)$
$\neg\phi, \psi \vDash \phi \to \psi$
$\phi, \neg\psi \vDash \neg(\phi \to \psi)$

Ahora, dado el deflacionismo metodológico al que suscribe Beall, uno puede sentirse tentado a pensar (como Caret y Ripley hacen en [23]) que debería aspirar a una lógica que sea tan clásica como sea posible. Y dado que la construcción de Brady se puede utilizar para comprobar la no trivialidad de lógicas más fuertes que BX^+, es por lo menos curioso que Beall esté satisfecho con el condicional de BX.

Más aún, sabemos que una característica interesante de la relación ternaria de accesibilidad R es que mediante la imposición de diferentes condiciones a R podemos obtener lógicas relevantes más fuertes que B (véase [73]) o BX. Es decir, estas condiciones pueden aseguran la validez de algunas fórmulas que no son válidas en BX^+. Por ejemplo, si imponemos la condición

Si $Rwab$, entonces $Rwb^\star a^\star$

obtenemos el principio de contraposición en forma de ley:

$(\phi \to \neg\psi) \to (\psi \to \neg\phi)$

Análogamente, si imponemos las siguientes condiciones sobre R:

Si hay un $x \in \mathcal{W}$ tal que $Rabx$ y $Rxcd$, entonces hay un $y \in \mathcal{W}$ tal que $Racy$ y $Rbyd$

y

Si hay un $x \in \mathcal{W}$ tal que $Rabx$ y $Rxcd$, entonces hay un $y \in \mathcal{W}$ tal que $Rbcy$ y $Rayd$

obtenemos las siguientes versiones del principio de transitividad, respectivamente:

$(\phi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\phi \to \chi))$

y

$(\phi \to \psi) \to ((\chi \to \phi) \to (\chi \to \psi))$

Por supuesto, hay ciertas formas de imponer condiciones sobre R que deberíamos evitar. Por ejemplo, si imponemos la condición

Si Rabc entonces para algún $x \in \mathcal{W}$, *Rabx y Rxbc*

la ley de contracción será válida:

$(\phi \to (\phi \to \psi)) \to (\phi \to \psi)$

Por tanto, si esta última condición se impone sobre los modelos de BX^+, la teoría resultante será trivial.

Dejando a un lado, por ahora, el principio de contracción, hay un conjunto de otras condiciones que podrían imponerse sobre R sin hacer que BX^+ se vuelva trivial (véase [73] para algunas de esas condiciones, aunque en el contexto de la lógica relevante básica B). Quizás Beall no quiera imponer estas condiciones porque crea que el condicional de BX^+ debe servir para capturar (al menos parcialmente) algunas de las características del condicional indicativo del lenguaje ordinario, y hay contraejemplos conocidos a, por caso, los principios de transitividad y contraposición. Sin embargo, este punto de vista parece difícil de entender. Por un lado, si el condicional de BX^+ debe servir para capturar (al menos parcialmente) algunas de las características del condicional indicativo del lenguaje natural, es en cierto sentido demasiado fuerte, ya que contiene las reglas de la contraposición y transitividad, y seguramente también hay contraejemplos en el lenguaje ordinario a estos principios en forma de reglas. Por otro lado, si el condicional de BX^+ no pretende ser un representante formal del condicional indicativo del lenguaje natural, sino simplemente un operador que sirve para asistir al predicado de verdad (transparente) en el cumplimiento de su función generalizadora, entonces parece un operador (innecesariamente) débil. Otros condicionales harían un mejor trabajo asistiendo al predicado de verdad transparente.

3.4. Revancha: ser estrictamente falso

A veces se afirma que las teorías paraconsistentes son superiores a las teorías paracompletas porque estas últimas no pueden caracterizar las oraciones que no son verdaderas ni falsas, mientras que las primeras pueden caracterizar correctamente las oraciones que son a la vez verdaderas y falsas (véase, por ejemplo, [72]). Si consideramos LP^+ y K_3^+ una vez más, tenemos $\vDash_{LP^+} Tr\langle\lambda\rangle$ e incluso $\vDash_{LP^+} Tr\langle\lambda\rangle \wedge Tr\langle\neg\lambda\rangle$, pero desafortunadamente, $\nvDash_{K_3^+} \neg Tr\langle\lambda\rangle$ y por ende $\nvDash_{K_3^+} \neg Tr\langle\lambda\rangle \wedge \neg Tr\langle\neg\lambda\rangle$.

Sin embargo, así como las teorías paracompletas habituales no pueden decir, con verdad, que ciertas oraciones no son verdaderas ni falsas, las teorías paraconsistentes habituales no pueden decir *con verdad estricta*, que ciertas oraciones son verdaderas y falsas. Pues supongamos que existe un predicado $J(x)$ que significa 'ser solamente verdadero' o 'ser estrictamente verdadero'. Si el conjunto de valores semánticos es $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$, este predicado debe devolver el valor 1 cuando se aplica a una oración solamente verdadera, y debe devolver el valor 0 en caso contrario (es decir, cuando se aplica a una oración que es solamente falsa o que es a la vez verdadera y falsa). Entonces, podemos construir un predicado $J(\neg x)$ y por ende una oración η tal que η es $\neg J\langle\eta\rangle$. Intuitivamente, η dice de sí misma que es solamente falsa. El problema es que si η es solamente verdadera (es decir, si tiene valor 1), lo que dice es el caso. Pero dice que es solamente falsa (es decir, que tiene valor 0), por lo que η será a la vez verdadera y, al mismo tiempo, solamente falsa, y esto parece inaceptable, incluso desde un punto de vista paraconsistente. Por otro lado, si η es solamente falsa, entonces lo que dice no es el caso. Pero dice que es solamente falsa, por lo que η es o bien solamente verdadera o bien verdadera y falsa a la vez. Así que, o bien η es solamente verdadera y solamente falsa, o bien η es a la vez verdadera y falsa y al mismo tiempo solamente verdadera. Una vez más, esto parece inaceptable.

El punto central aquí es que a pesar de lo que dicen los lógicos paraconsistentes, hay algunos predicados semánticos que no pueden expresarse en su lenguaje objeto. Por supuesto, el punto no es que no hay manera de expresar *algo como* el concepto en cuestión. De hecho, podríamos simplemente decir que *x es solamente verdadera* si y sólo si $Tr(x) \wedge \neg Tr(\neg x)$. La dificultad es que este predicado no se comporta como esperamos que el predicado *solamente verdadero* se comporte. Esto es importante porque queremos poder decir que ciertas oraciones son verdaderas, pero no también falsas. Tomemos cualquier oración ϕ que sea solamente verdadera. Debemos estar en condiciones de decir en $\mathcal{L}^+$ que esta oración es solamente verdadera (i.e. verdadera pero no falsa). Desafortunadamente, el enunciado $Tr\langle\phi\rangle \wedge \neg Tr\langle\neg\phi\rangle$ no será suficiente, porque hasta donde sabemos $Tr\langle\phi\rangle$ no descarta que $Tr\langle\neg\phi\rangle$.

Por otra parte, al no tener un predicado para el concepto *solamente verdadero*, tampoco tenemos un predicado para el concepto *ser consistente*. En otras palabras, no podemos clasificar correctamente las oraciones consistentes usando únicamente los recursos de $\mathcal{L}^+$. Intuitivamente, una oración consistente ϕ es tal que $\neg(Tr\langle\phi\rangle \wedge Tr\langle\neg\phi\rangle)$ se cumple. Desgraciadamente, las teorías paraconsistentes como las que venimos considerando validan oraciones como

$\neg(Tr\langle\lambda\rangle \wedge Tr\langle\neg\lambda\rangle)$. De hecho, estas teorías también prueban $Tr\langle\phi\rangle \wedge Tr\langle\neg\phi\rangle$, de modo que declara a λ consistente pero también inconsistente, y esto también parece inaceptable.

Tanto Priest [72] como Beall [17] han respondido a esta objeción, básicamente, concediendo el punto. Ellos sugieren que el predicado *solamente verdadero* simplemente debe identificarse con $Tr(x)$ en el sentido de que al igual que $Tr(x)$, el predicado *solamente verdadero* expresa un concepto inconsistente. Algunas oraciones serán solamente verdaderas y a la vez solamente falsas, o solamente verdaderas y al mismo tiempo, a la vez verdaderas y falsas.

Por supuesto, la estrategia de conceder el punto no parece muy convincente en su forma actual. Después de todo, parece que hay razones intuitivas para pensar que *solamente verdadero* es un predicado semántico legítimo distinto de $Tr(x)$ que nuestras teorías semánticas deben tratar de capturar. Existen diferencias entre Priest y Beall en lo que respecta a cómo hacer más precisa la estrategia de conceder el punto. Aunque Priest acepta que *solamente verdadero* es una noción inconsistente, rechaza su equivalencia con $Tr(x)$. Dado que $Tr(x)$ no es un predicado transparente en su teoría, $Tr\langle\phi\rangle$ y $Tr\langle\phi\rangle \wedge \neg Tr\langle\neg\phi\rangle$ no son equivalentes. Beall, por el contrario, acepta su equivalencia[16] pero sugiere tentativamente que hay una diferencia pragmática entre la afirmación de uno y del otro. Decir que $Tr\langle\lambda\rangle \wedge \neg Tr\langle\neg\phi\rangle$ acarrea implicaturas pragmáticas que están ausentes en el caso de $Tr\langle\phi\rangle$. En particular, el primer enunciado acarrea la implicatura de que la negación de ϕ no debe afirmarse, mientras que el segundo no lo hace. Beall también sugiere que no existe un concepto semántico legítimo de *solamente verdadero* que sea diferente del expresado por $Tr(x)$. Más concretamente, sostiene que las teorías formales de la verdad no son más que modelos idealizados, y que deben ser evaluados en función de su adecuación a los fenómenos objetivos que pretenden modelar. Por lo tanto, el problema de la revancha puede ser entendido como la queja de que nuestras teorías no son capaces de modelar esos fenómenos. Pero, si entendemos el problema de la revancha de esta manera, esto quiere decir que hemos asumido que la noción *solamente verdadero* es una noción semántica legítima que nuestras teorías semánticas deben capturar. Sin embargo, de acuerdo con Beall, esta suposición es errónea. Esta noción es dependiente de la semántica modelo-teórica que hemos venido utilizando, y esta semántica está definida en un metalenguaje clásico. Es decir, se trata de una noción que es un producto de nuestra teorización semántica sobre nocio-

[16]Puesto que $Tr(x)$ es transparente, $Tr\langle\phi\rangle \wedge \neg Tr\langle\neg\phi\rangle$ es equivalente a $\phi \wedge \neg\neg\phi$. A su vez, esto es equivalente a $\phi \wedge \phi$, por el principio de la doble negación. Ya que $\wedge$ es idempotente, esto se cumple si y sólo si ϕ se cumple. Pero, por la transparencia de $Tr(x)$ de nuevo, esto es equivalente a $Tr\langle\phi\rangle$.

nes legítimas, tales como la noción de verdad. Por lo tanto, no hay necesidad de que nuestras teorías semánticas den una explicación del funcionamiento de esta noción.

Pese a esto, creo que es difícil inferir de estas consideraciones que no debemos preocuparnos por el problema de la revancha. Por un lado, a diferencia de nociones como *valor designado* y *valor no designado*, las cuales claramente son un producto de nuestras teorías semánticas formales, las nociones de *solamente verdadero* y *solamente falso* parecen ser nociones preteóricas que nuestras teorías semánticas deben intentar capturar. No hay nada en el argumento de Beall para contrarrestar esa afirmación. Por otra parte, aún concediendo que estas nociones no son nociones semánticas genuinas, sino simplemente nociones artificiales que son un productos de nuestras teorías semánticas formales, cualquier teoría capaz de capturar estas nociones sería más que bienvenida. Si el proyecto inicial era el de obtener teorías semánticamente cerradas, un defecto importante de la estrategia de conceder el punto es que no aborda esta cuestión.

Beall sugiere tentativamente varias maneras de añadir (o definir) un operador para representar la idea de ser *solamente verdadero* en el marco de su teoría BX (también podríamos tomar BX^+, no hay una diferencia significativa). Aquí voy a considerar una de esas maneras, la que presenta en el apéndice del capítulo tres de [17]. Esta es la propuesta que, en mi opinión, es la más interesante de las que ofrece y la que está más desarrollada[17]. Su idea es definir un operador para la noción de *solamente verdadero* de la siguiente manera. Tomemos cualquier modelo de BX y un enunciado ψ que sea solamente verdadero en ese modelo. Es decir, consideremos una oración ψ tal que: $@ \vdash \psi$ y $@^\star \vdash \psi$. Luego, $\psi \to \phi$ debe servir para expresar la idea de que ϕ es verdadera. En otras palabras, él define
$J\phi =_{df} \psi \to \phi$.
Y luego prueba que si $J\phi$, entonces ϕ no es inconsistente, esto es, que no es el caso que $\phi \wedge \neg\phi$.

Proposición 3.4.1 *Consideremos cualquier modelo de BX que no sea tri-*

[17]Una propuesta similar (y tal vez más sofisticada) puede encontrarse en [72], donde Priest define iteraciones del operador *solamente falso* de ls siguiente forma:

- $JF\phi =_{df} \phi \to \bot$ (donde $\to$ es el condicional de Priest)
- $JF_{\alpha+1}\phi =_{df} JF_\alpha\phi \vee (\phi \to JF_{\alpha+1}\phi)$
- $JF_\lambda\phi =_{df} \forall\beta < \lambda,\ Tr\langle JF_\beta\phi\rangle$

. La situación es similar a la que encontramos en la teoría de Field para el operador D. Para cada oración falsa, hay un cierto ordinal α tal que la teoría prueba $JF_\alpha\phi$, pero no puede haber un operador general para la noción de solamente falso.

vial[18]*, y sea ψ una oración que es solamente verdadera en ese modelo. Si $@ \Vdash \psi \rightarrow \phi$, entonces $@ \nVdash \phi \wedge \neg\phi$.*

Prueba Supongamos que $@ \Vdash \phi \wedge \neg\phi$. Luego, $@ \Vdash \phi$ y $@ \Vdash \neg\phi$. De este segundo hecho podemos inferir que $@^\star \nVdash \phi$. Pero ya que también tenemos $@^\star \Vdash \psi$, hay un mundo en el cual ψ es verdadera pero ϕ no lo es. Por lo tanto, $@ \nVdash \psi \rightarrow \phi$. ∎

Beall propone seis desiderata para el operador J. En principio, se supone que son condiciones necesarias, pero no suficientes[19]. Aquí están:
D1. $J\phi \vDash_{BX} \phi$ (si ϕ es solamente verdadera, entonces es verdadera).
D2. $\phi \nvDash_{BX} J\phi$ (porque, además de ser verdadera, ϕ puede también ser falsa).
D3. $\neg\phi, J\phi \vDash_{BX} \psi$ (si ϕ es solamente verdadera pero también falsa, entonces cualquier oración se sigue. Pues, de otra forma, ϕ podría ser solamente verdadera y a la vez falsa.).
D4. $\nvDash_{BX} \neg J\phi \vee J\neg\phi$ (algunas oraciones no son solamente verdaderas ni solamente falsas).
D5. $J\phi, \phi \wedge (\phi \rightarrow \psi) \vDash_{BX} \psi$ ($\rightarrow$ satisface *modus ponens* para oraciones que son solamente verdaderas).
D6. Para alguna $\phi, \nvDash_{BX} \phi$ (no trivialidad).

No es difícil verificar que D1-D5 se cumplen, y que D6 está garantizada por la prueba de no trivialidad que vimos más arriba. Con todo, un problema serio que afecta a esta propuesta es que nunca se da que $J\phi \vDash_{BX} JJ\phi$ (véase Rossberg's [92]). En otros términos, el operador J *nunca* puede iterarse. Para ver por qué esto es así, consideremos una oración de la forma $JJ\phi$, donde ψ es como antes, y ϕ (también) es solamente verdadera. Por definición esta oración es simplemente $\psi \rightarrow (\psi \rightarrow \phi)$. Por nuestra suposición, sabemos que $@ \Vdash J\phi$ (i.e. $@ \Vdash \psi \rightarrow \phi$, lo cual quiere decir que para todo mundo $w \in \mathcal{W}$, si $w \Vdash \psi$, entonces $w \Vdash \phi$, por la cláusula semántica para mundos normales; recuérdese que @ es normal). Sin embargo, $@ \nVdash \psi \rightarrow (\psi \rightarrow \phi)$, porque existe un mundo anormal w tal que $w \Vdash \psi$ y $w \nVdash \psi \rightarrow \phi$. Este último hecho se cumple porque hay mundos w' y w'' tales que $w' \Vdash \psi$ y $w'' \nVdash \phi$ (por la cláusula de mundos anormales). En consecuencia, $@ \nVdash JJ\phi$, y por tanto $J\phi \nvDash_{BX} JJ\phi$. Más aún, nótese que la prueba que acabamos de ofrecer vale para cualquier ϕ que sea solamente verdadera, así que hemos mostrado que J nunca puede iterarse.

¿Qué tan serio es este problema? La condición de que el operador J pueda iterarse (al menos para algunas oraciones) es un desideratum extra muy razonable. De hecho, puede probarse (véase nuevamente [92]) que $\vDash_{BX} J\phi$ sólo si

[18]Que existe un modelo así se sigue de la prueba de no trivialidad esbozada antes.

[19]Aunque, Beall afirma que "it's arguably as much as one should reasonably demand" (véase [17], p. 63).

$\vDash_{BX} \psi \rightarrow \phi$, lo que significa que J sólo captura un subconjunto propio de las oraciones que son solamente verdaderas: el conjunto de oraciones implicadas por ψ. Pero ciertamente hay oraciones que son solamente verdaderas pero que no están implicadas por ψ, de modo que parece mejor entender la expresión $J\phi$ como '*ϕ está implicada por ψ*', en lugar de como '*ϕ es solamente verdadera*'. Por consiguiente, podemos concluir que J no es suficiente para capturar la noción de ser solamente verdadero.

3.5. La paradoja de la validez, una vez más

En mi opinión, la paradoja de la validez afecta a los enfoques paracompletos y a los paraconsistentes más o menos de la misma manera. Por lo tanto, no hay mucho que decir sobre esto, aparte de lo que ya he observado en la sección 2.5.

Siguiendo las ideas de Field (sección 2.5.1), un lógico paraconsistente podría tratar de rechazar una de las reglas que gobiernan el predicado de validez. Así como algunos defensores del enfoque paracompleto podrían sentirse inclinados a rechazar RVal (dado que por lo general rechazan la regla correspondiente para el condicional), algunos teóricos paraconsistentes podrían argumentar a favor de rechazar LVal. Si *modus ponens* falla para el condicional de LP, podemos esperar, quizás, que falle también para Val. Sin LVal, no puede probarse en general que $Val(\langle\phi\rangle, \langle\psi\rangle)$ junto con ϕ impliquen ψ. Por supuesto, todo esto es muy especulativo. Las propiedades de Val dependerán de las características específicas de la teoría paraconsistente en cuestión.

El teórico paraconsistente también podría tratar de proporcionar una construcción similar a la que fue ofrecida en la sección 2.5.2. Esta vez, la idea sería hacer que ciertos argumentos sean válidos *e inválidos* al mismo tiempo. Sin embargo, como con el enfoque paracompleto, es difícil proporcionar una construcción de este tipo manteniendo al mismo tiempo todas las propiedades estructurales de la relación de consecuencia.

La situación, hasta donde puedo ver, es simétrica a la encontrada en el capítulo 2, así que voy a dejar este tema aquí.

3.6. Cuantificación restricta relevante

He mencionado anteriormente que los deflacionistas sobre la verdad afirman que el predicado de verdad no es más que un dispositivo lingüístico cuyo único propósito es permitir la expresión de ciertas generalizaciones, como las de la forma *todos los ϕs son ψs* (sección 1.4). De hecho, representar adecuadamente los enunciados que expresan cuantificaciones restringidas es importante no sólo para los deflacionistas. Los argumentos expresados en el lenguaje ordinario utilizan cuantificaciones restringidas y cualquier teoría que aspire a capturar al menos parcialmente estos argumentos debe tener una forma de representar adecuadamente este tipo de cuantificaciones.

Hemos visto en la sección 2.6 que si estas generalizaciones se formalizan mediante el condicional de las teorías paracompletas (por ejemplo, mediante el condicional de Field de la sección 2.3), nos topamos con algunos problemas. La situación para el lógico paraconsistente es muy similar. Por un lado, si las generalizaciones restringidas se formalizan mediante el condicional material $\supset$, entonces muchos de los principios naturales que involucran cuantificadores restringidos serán inválidos. Por ejemplo, dado que las lógicas paraconsistentes carecen de la regla de silogismo disyuntivo (o equivalentemente, la regla de *modus ponens* para $\supset$), la inferencia $\phi(t), \forall x(\phi(x) \supset \psi(x)) \vdash \psi(t)$ será inválida porque $\phi(x) \supset \psi(x)$ no es otra cosa que $\neg\phi(x) \vee \psi(x)$.

Por otro lado, si las generalizaciones restringidas se formalizan mediante cualesquiera de los dos condicionales considerados en este capítulo, una vez más, nos toparemos con problemas. Los condicionales paraconsistentes son, en cierto sentido, *demasiado fuertes* para la cuantificación restringida. Un enunciado de la forma *todos los ϕs son ψs* puede ser verdadero en el mundo actual, sin ser verdadero en todos los mundos, pero $\rightarrow$ abarca todos los mundos, ya que para que $\phi \rightarrow \psi$ sea verdadero en un mundo w, tenemos que comprobar si en cada mundo $w' \in \mathcal{W}$, ϕ es verdadero sólo si ψ es verdadero. Esto significa que, en otro sentido, $\rightarrow$ es *demasiado débil* para la cuantificación restringida, ya que, como antes, no logra validar una serie de principios cuya validez es esperable. Un ejemplo importante de esto es la siguiente versión de debilitamiento del antecedente (este es el principio (II) de la sección 2.6):

Si todos son ψs, entonces todos los ϕs son ψs

Si representamos esta afirmación en $\mathcal{L}^+$ como $\forall x\psi(x) \rightarrow \forall x(\phi(x) \rightarrow \psi(x))$, entonces es fácil ver que $\nvDash_{BX^+} \forall x\psi(x) \rightarrow \forall x(\phi(x) \rightarrow \psi(x))$. La razón es que para que el consecuente sea verdadero en @ debe cumplirse que para cada mundo $w \in \mathcal{W}$, $w' \Vdash \phi$ sólo si $w' \Vdash \psi$, para cada x-variante w' de w. Pero consideremos dos mundos @ y w, donde $@' \Vdash \psi$ para toda x-variante $@'$ de @, pero hay una x-variante w' de w tal que $w' \Vdash \phi$ pero $w' \nVdash \psi$. Luego, $@ \Vdash \forall x\psi(x)$, pero $@ \nVdash \forall x(\phi(x) \rightarrow \psi(x))$. Este modelo es suficiente para mostrar que $\forall x\psi(x) \nvDash_{BX^+} \forall x(\phi(x) \rightarrow \psi(x))$ y *a fortiori* $\nvDash_{BX^+} \forall x\psi(x) \rightarrow \forall x(\phi(x) \rightarrow \psi(x))$.

¿Hay alguna alternativa? Sí, hay algunas propuestas disponibles en la bibliografía que muestran cómo manejar la cuantificación restringida dentro de las teorías paraconsistentes. En esta sección voy a considerar brevemente dos. La primera es de [15] e incluso tiene un nombre: 'el condicional de Melbourne'[20]. Los autores definen un nuevo condicional, diferente de $\supset$ pero también de $\rightarrow$. Para hacerlo, primero necesitan la siguiente definición:

$w \sqsubseteq w'$ se cumple si y sólo si para toda fórmula ϕ, $w \Vdash \phi$ sólo si $w' \Vdash \phi$.

Aquí, $w \sqsubseteq w'$ quiere decir que w' extiende a w, en el sentido de que todo lo que es verdadero en w también es verdadero en w'. El condicional se caracteriza como sigue:

$w \Vdash \phi \blacktriangleright \psi$ si y sólo si para todo w', w'' tales que $R'ww'w''$, $w' \Vdash \phi$ sólo si $w'' \Vdash \psi$

donde $R'ww'w''$ se cumple si $Rww'w''$ y $w \sqsubseteq w''$ (R es la relación de accesibilidad ternaria usual). Esto es, cuando evaluamos un condicional $\phi \blacktriangleright \psi$ en un mundo w sólo tenemos que considerar aquellos pares de mundos w', w'' donde toda la información de w se preserva en w''.

Debe quedar claro que el condicional $\blacktriangleright$ que acabamos de definir es estrictamente más débil que $\rightarrow$, ya que $\phi \rightarrow \psi \vDash \phi \blacktriangleright \psi$, pero la conversa no se da.

Al imponer esta restricción, podemos obtener varios principios plausibles que involucran cuantificadores restringidos (el lector puede encontrar muchos ejemplos en [15]). En particular, tanto *modus ponens* para $\blacktriangleright$ como la versión de debilitamiento del antecedente discutida anteriormente son válidas ahora. Comprobaré este último hecho para ilustrar cómo funciona la definición. Supongamos que $@ \Vdash \forall x \psi(x)$. Por definición, para toda x-variante $@'$ de $@$, $@' \Vdash \psi$. Ahora bien, si $R@wu$ y $@ \sqsubseteq u$, entonces para toda x-variante u' de u, $u' \Vdash \psi$. Esto es suficiente para inferir que para toda x-variante $@'$ de $@$, $@' \Vdash \phi \blacktriangleright \psi$. Por lo tanto, $@ \Vdash \forall x(\phi(x) \blacktriangleright \psi(x))$, y por ende $\forall x \psi(x) \vDash \forall x(\phi(x) \blacktriangleright \psi(x))$. El contraejemplo que ofrecimos más arriba ya no está disponible, pues la nueva condición requiere que $@ \sqsubseteq w$ y esto impide que para cada objeto del dominio $@ \Vdash \psi$ pero para algún objeto del dominio $w \nVdash \psi$.

Además, falla contraposición, lo cual es necesario para que este enfoque no sea trivial. La razón es que por debilitamiento, obtenemos

[20] En realidad, los autores están pensando en ciertas lógicas de la relevancia, pero lógicas de la relevancia que son inmunes a las paradojas de la verdad, por lo que la distinción entre estas lógicas relevantes y las lógicas paraconsistentes no será importante en lo que sigue

$\psi \vDash \phi \blacktriangleright \psi$
y utilizando el principio de contraposición para $\blacktriangleright$, esto se convierte en
$\psi \vDash \neg\psi \blacktriangleright \neg\phi$.
Ahora supongamos que ψ es una contradicción verdadera. Usando *modus ponens* para $\blacktriangleright$, podemos inferir que $\neg\phi$ para todo ϕ y por tanto (dado que podemos eliminar la doble negación) ϕ para todo ϕ.

Un cuestión importante es que es aún una pregunta abierta si la teoría resultante para $\blacktriangleright$ es trivial. Así que, por el momento, no hay garantía de que no existan oraciones tipo-Curry que involucren el operador $\blacktriangleright$ capaces de causar dificultades. Por lo que sabemos, este enfoque podría ser trivial.

Pasemos al segundo enfoque. Este puede encontrarse en [17]. En su libro, Beall considera tres propuestas diferentes para añadir (o definir) un nuevo condicional para representar cuantificadores restringidos. Aquí sólo voy a considerar una (es la tercera del capítulo 5). La idea es muy simple. Definimos un nuevo condicional $\blacktriangleright$ utilizando recursos ya disponibles en la teoría BX. Decimos que $\phi \blacktriangleright \psi$ se da si y sólo si $\phi \rightarrow \psi$ se da o ψ se da. Más formalmente,

$$\phi \blacktriangleright \psi =_{df} (\phi \rightarrow \psi) \vee \psi$$

Luego, los enunciados de la forma *todos los ϕs son ψs* deben representarse en $\mathcal{L}$ como $\phi \blacktriangleright \psi$ y esto, a su vez, se define en términos del condicional original y la disyunción.

La teoría resultante valida, al igual que la anterior, varios principios plausibles que involucran cuantificadores restringidos. Crucialmente, tanto *modus ponens* como el principio de debilitamiento son válidos, pero el principio de contraposición no lo es (para los detalles, véase [17], p.125). Verifiquemos el caso de debilitamiento. Supongamos que $@ \Vdash \forall x\psi(x)$. Luego, para toda x-variante $@'$ de $@$, $@' \Vdash \psi$. Por tanto, para toda x-variante $@'$ de $@$, $@' \Vdash (\phi \rightarrow \psi) \vee \psi$. Se sigue que $@ \Vdash \forall x((\phi(x) \rightarrow \psi(x)) \vee \psi(x))$, i.e. $@ \Vdash \forall x(\phi(x) \blacktriangleright \psi(x))$. Por lo tanto, $\forall x\psi(x) \vDash_{BX} \forall x(\phi(x) \blacktriangleright \psi(x))$.

Aún más importante es que podemos usar la prueba de la no trivialidad para BX^+. Es decir, hay una garantía de que este enfoque no es trivial. Esto es así porque, al contrario de lo que sucedía en el enfoque anterior, donde $\blacktriangleright$ era un operador primitivo, $\blacktriangleright$ se define aquí en términos de expresiones que ya están en el lenguaje.

¿Son estas propuestas suficientemente atractivas? Un aspecto que podemos notar de inmediato es que ambos enfoques parecen estar hechos a medida para validar el principio de debilitamiento considerado anteriormente. En el primero, se estipula que $w \sqsubseteq w''$. Esto hace que el consecuente de $\phi \blacktriangleright \psi$ sea verdadero, porque si estamos evaluando un cierto enunciado condicional $\phi \blacktriangleright \psi$ en un mundo w, tenemos que comprobar lo que sucede con ψ en cada mundo w'' tal que $Rww'w''$, y la verdad de ψ en w se asume, ya que es la premisa de debilitamiento. En el segundo, esto es aún más claro, ya que se dice que un condicional es verdadero si el consecuente es verdadero (y el consecuente es la premisa de debilitamiento).

Asimismo, Field ha señalado (véase [34]) que los enfoques paraconsistentes tienen una serie de inconvenientes para explicar adecuadamente las cuantificaciones restringidas. Un problema con el primer enfoque es que no puede validar el principio de debilitamiento en forma de ley. Es decir, no puede probar que $\forall x\psi(x) \rightarrow \forall x(\phi(x) \blacktriangleright \psi(x))$ es una ley válida, lo que parece, cuanto menos, algo costoso. Desde un punto de vista intuitivo, las mismas motivaciones que estaban allí para introducir un condicional que satisfaga el principio de debilitamiento en forma de regla están allí para pedir debilitamiento en forma de ley también.

En el segundo enfoque, sí tenemos el principio de debilitamiento en forma de ley, pero ya no es posible validar

$\forall x(\phi(x) \blacktriangleright \psi(x)) \wedge \forall x(\phi(x) \blacktriangleright \chi(x)) \rightarrow \forall x(\phi(x) \blacktriangleright (\psi(x) \wedge \chi(x)))$

De hecho, esto ni siquiera vale en forma de regla. Para ver que esto es así, consideremos un modelo tal que su conjunto de mundos $\mathcal{W}$ es simplemente $\{@, w\}$, donde $@ \nVdash \phi, @ \nVdash \psi, @ \Vdash \chi, w \Vdash \phi, w \Vdash \psi$ y $w \nVdash \chi$. Este modelo es tal que $@ \Vdash (\phi \blacktriangleright \psi) \wedge (\phi \blacktriangleright \chi)$, pero $@ \nVdash \phi \blacktriangleright (\psi \wedge \chi)$ (he omitido los cuantificadores para simplificar el ejemplo).

Otro problema que afecta a ambos enfoques es que no es posible probar *modus ponens* en forma de ley, esto es, el siguiente principio es inválido

$\forall x(\phi(x) \blacktriangleright \psi(x)) \wedge \phi(t) \rightarrow \psi(t)$

La razón de esto es que, como señalé antes, $\blacktriangleright$ es estrictamente más débil que $\rightarrow$, de modo que $\phi \rightarrow \psi \vDash \phi \blacktriangleright \psi$. Pero, una consecuencia de esto es que no es posible probar el principio de arriba. Pues si fuera válido, entonces

$\forall x(\phi(x) \blacktriangleright \psi(x)) \wedge \phi(t) \blacktriangleright \psi(t)$

también sería válido. Desgraciadamente, esto junto con la regla de *modus ponens* para $\blacktriangleright$ lleva a una trivialidad. Sea κ^* la oración $Tr\langle\kappa^*\rangle \blacktriangleright \bot$. Podemos construir la siguiente derivación tipo-Curry. Por el esquema T, tenemos

$Tr\langle\kappa^*\rangle \leftrightarrow (Tr\langle\kappa^*\rangle \blacktriangleright \bot)$

(donde $\leftrightarrow$ es uno de los (bi)condicionales paraconsistentes presentados en este capítulo). Por la ley de *modus ponens* para $\blacktriangleright$,

$(Tr\langle\kappa^*\rangle \wedge (Tr\langle\kappa^*\rangle \blacktriangleright \bot)) \blacktriangleright \bot$

está disponible. Por la definición de κ^* y la transparencia de $Tr(x)$, podemos obtener

$(Tr\langle\kappa^*\rangle \wedge Tr\langle\kappa^*\rangle) \blacktriangleright \bot$

Pero como ϕ implica $\phi \wedge \phi$,

$Tr\langle\kappa^*\rangle \blacktriangleright \bot$

Por *modus ponens* para $\rightarrow$, inferimos

$Tr\langle\kappa^*\rangle$
y por *modus ponens* para $\blacktriangleright$, finalmente obtenemos
$\perp$.

Por ende, otra consecuencia costosa de los enfoques paraconsistentes que hemos considerado es que no pueden contener *modus ponens* en forma de ley para $\blacktriangleright$.

Una desventaja final de los enfoques paraconsistentes que mencionaré es que tampoco pueden validar el principio
si nada es ϕ y no ψ, entonces todos los ϕs son ψs.
Pues supongamos que dicho principio es válido. Luego
$\neg\exists x(\phi(x) \wedge \neg\psi(x)) \vDash \forall x(\phi(x) \blacktriangleright \psi(x))$
se cumple, lo cual significa que
$\neg(\phi \wedge \neg\psi) \vDash \phi \blacktriangleright \psi$
también se cumple. Pero entonces, suponiendo que $\blacktriangleright$ es el condicional de Beall, esto se cumple si y sólo si
$\neg\phi \vee \psi \vDash (\phi \rightarrow \psi) \vee \psi$
se cumple. Pero nótese que esta inferencia es válida siempre y cuando la siguiente inferencia sea válida:
$\neg\phi \vDash \phi \rightarrow \psi$.
Lamentablemente, esto no puede ser el caso. Pues si lo fuera, entonces *modus ponens* para $\rightarrow$ nos da la regla de explosión[21].

[21] Otra objeción en contra del enfoque de Beall (atribuida a Ripley) es considerada (y respondida) en [18]. Por razones de espacio la omitiré.

Capítulo 4

Paralógicas alternativas

4.1. Paracompletitud y paraconsistencia, otra vez

En los dos capítulos anteriores hemos considerado varios ejemplos de teorías paracompletas y paraconsistentes. En el capítulo 2 consideré algunas teorías paracompletas basadas en la lógica K_3, y en el capítulo 3 algunas teorías paraconsistentes basadas en la lógica LP. Desde un punto de vista filosófico, K_3 y LP son muy diferentes. Desde un punto de vista técnico, sin embargo, son bastante similares. Una de sus características técnicas comunes tiene que ver con su tratamiento de la oración del mentiroso. Tanto en K_3 como en LP λ recibe el valor intermedio $\frac{1}{2}$. Esto le da una asignación consistente a λ ya que el valor de $\neg\phi$ se define como 1 menos el valor de ϕ para cualquier fórmula ϕ. Así que podemos hacer que los valores de $Tr\langle\neg\lambda\rangle, \neg Tr\langle\lambda\rangle$ y $Tr\langle\lambda\rangle$ sean todos $\frac{1}{2}$.

A pesar de que esta elegante idea funciona bastante bien, es sabido que estas lógicas también pueden caracterizarse por medio de semánticas bivalentes. Las cuatro formas de hacer esto que conozco son: la semántica de la estrella de Routley, la semántica relacional, la semántica parcial y la semántica de bivaluaciones (véase [73] para las dos primeras, [47] para la tercera y [12] para la cuarta[1]). En este capítulo voy a presentar una semántica formal basada en un enfoque más reciente desarrollado por Arnón Avron y Iddo Lev en [4]. La idea es, a grandes rasgos, definir la negación por medio de una matriz no determinista[2]. Esto nos permitirá construir lógicas que, por un

[1]En realidad, este tipo de semántica se conoce desde [30], donde se ofrece un tratamiento de los sistemas C_n de Da Costa en términos de bivaluaciones.

[2]Algunas de los argumentos que voy a presentar también funcionan si utilizamos bivaluaciones. Pero, por razones que explicaré más adelante, prefiero usar la semántica no

lado, son compatibles con un predicado de verdad transparente y, por otro, no tienen la necesidad de introducir una tercera categoría semántica[3]. Como mostraré más adelante, la idea de que las paradojas de la verdad no requieren la postulación de una tercera categoría semántica pone de manifiesto una serie de cuestiones filosóficas interesantes. El principal aporte de este capítulo es discutir algunas de esas cuestiones y argumentar a favor de la idea de que las presentaciones bivalentes de estas lógicas tienen una serie de ventajas con respecto a las presentaciones más habituales, como las que introduje en los capítulos 2 y 3. Además, parte de lo que diré en este capítulo servirá de base para la teoría que presentaré y defenderé en el capítulo 7.

4.2. Semánticas no deterministas

En esta sección explicaré cuál es la idea general detrás de las semánticas no deterministas (véase [4] para más detalles). La novedad principal es que podemos definir expresiones lógicas por medio de matrices no deterministas[4].

Intuitivamente, en una semántica no determinista existe al menos una conectiva tal que no es posible determinar por completo el valor de una fórmula compuesta que involucra esa conectiva incluso si sabemos los valores de todas las fórmulas atómicas del lenguaje. En otras palabras, es necesario hacer una elección entre los valores de un determinado conjunto. Esta idea se puede explicar rigurosamente como sigue:

Definición ($\mathcal{ND}Matriz$) Una *matriz no determinista* para un lenguaje libre de cuantificadores $\mathcal{L}$ es una tupla $\mathcal{M} =< \mathcal{V}, \mathcal{D}, \mathcal{O} >$, donde:

- $\mathcal{V}$ es un conjunto no vacío de valores,
- $\mathcal{D}$ es un subconjunto propio no vacío de $\mathcal{V}$, y
- $\mathcal{O}$ es un conjunto de funciones tal que para cada conectiva n-aria $\diamond$ de $\mathcal{L}$, hay una correspondiente función $\diamond^{\mathcal{M}}$ en $\mathcal{O}$ tal que $\diamond^{\mathcal{M}}$: $\mathcal{V}^n \longrightarrow 2^{\mathcal{V}} - \varnothing$[5].

determinista.

[3]Tendré más que decir sobre la idea de una 'categoría semántica' en la sección 4.5. Por ahora, voy a utilizar este término de manera un tanto informal.

[4]Para hacer que las cosas sean tan simples como sea posible, sólo voy a considerar cómo utilizar matrices no deterministas para definir conectivas, pero las matrices no deterministas también se pueden utilizar para definir cuantificadores no deterministas. Véase [5] para los detalles.

[5]La razón para excluir el conjunto vacío es que no hay una manera sencilla de computar el valor de una fórmula compleja cuando en cierto paso de la computación tenemos el conjunto vacío como input.

Por supuesto, como en las matrices deterministas, $\mathcal{V}$ es un conjunto de valores de verdad y $\mathcal{D}$ un conjunto de valores designados. La parte interesante de la definición anterior tiene que ver con el conjunto de funciones $\mathcal{O}$ para las conectivas no deterministas. En una matriz determinista, para cada conectiva n-aria $\diamond$ de $\mathcal{L}$ hay una correspondiente función $\diamond^{\mathcal{M}}$ tal que $\diamond^{\mathcal{M}}$: $\mathcal{V}^n \longrightarrow \mathcal{V}$. La función toma como input una cierta n-tupla de valores de $\mathcal{V}^n$ y devuelve como output un valor de $\mathcal{V}$. En el caso de las conectivas no deterministas, el codominio de la correspondiente función es el conjunto de conjuntos de valores $2^{\mathcal{V}} - \varnothing$, en lugar del conjunto de valores $\mathcal{V}$.

Asimismo, nótese que las matrices deterministas son un caso especial de las matrices no deterministas. Más específicamente, para cada conectiva n-aria $\diamond$ en una matriz determinista $\mathcal{M}$ que se interpreta como una función $\diamond^{\mathcal{M}}$: $\mathcal{V}^n \longrightarrow \mathcal{V}$, es posible construir una matriz no determinista $\mathcal{M}'$ en la que cada conectiva puede entenderse como una función que sólo da como output conjuntos unitarios, esto es, $\diamond^{\mathcal{M}'}$: $\mathcal{V}^n \longrightarrow \{\mathcal{A} \subseteq \mathcal{V}$: $|\mathcal{A}| = 1\}$. Al hacer esto, obtenemos una matriz no determinista que emula el comportamiento de las conectivas deterministas.

Es sencillo caracterizar las nociones usuales de *valuación*, *satisfacción*, *validez*, etc. para las semánticas no deterministas. Por ejemplo, una valuación se define de la siguiente forma:

Definición (*Valuación*) Sea $Form_{\mathcal{L}}$ el conjunto de fórmulas del lenguaje $\mathcal{L}$. Una *valuación* en $\mathcal{M}$ es una función v: $Form_{\mathcal{L}} \longrightarrow \mathcal{V}$ tal que para cada conectiva n-aria $\diamond$ de $\mathcal{L}$, la siguiente condición se cumple para cada $\phi_1, ..., \phi_n \in Form_{\mathcal{L}}$: $v(\diamond(\phi_1, ..., \phi_n)) \in \diamond^{\mathcal{M}}(v(\phi_1), ..., v(\phi_n))$.

Nótese que como $\diamond^{\mathcal{M}}(v(\phi_1), ..., v(\phi_n))$ nos proporciona un conjunto de valores, en lugar de un sólo valor, usamos '$\in$' y no '$=$' en la definición previa. Con esta nueva noción de valuación podemos definir los conceptos de *satisfacción* y *validez* de la manera usual.

4.3. Lógicas no deterministas bivaluadas

Hay muchas maneras en las que una matriz puede ser no determinista. Para mis propósitos actuales, resulta suficiente considerar matrices de solamente dos valores donde cada conectiva, excepto por la negación, es determinista.

Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje proposicional con una sola conectiva unaria $\neg$ y dos conectivas binarias $\vee$ y $\wedge$. Sea $\mathcal{M}_1 =< \mathcal{V}_1, \mathcal{D}_1, \mathcal{O}_1 >$, donde:

- $\mathcal{V}_1 = \{1, 0\}$,

- $\mathcal{D}_1 = \{1\}$, and
- $\mathcal{O}_1 = \{\neg^{\mathcal{M}_1}, \vee^{\mathcal{M}_1}, \wedge^{\mathcal{M}_1}\}$ se define de la siguiente manera:

	$\neg^{\mathcal{M}_1}$
1	{0}
0	{1,0}

		$\vee^{\mathcal{M}_1}$
1	1	{1}
1	0	{1}
0	1	{1}
0	0	{0}

		$\wedge^{\mathcal{M}_1}$
1	1	{1}
1	0	{0}
0	1	{0}
0	0	{0}

La matriz $\mathcal{M}_1$ caracteriza una negación no determinista. En particular, es compatible con la existencia de valuaciones v tales que para alguna fórmula ϕ, $v(\phi) = v(\neg\phi) = 0$. Esta matriz se corresponde con el fragmento libre del condicional de la lógica $CLaN$, desarrollada en [14].

Por supuesto, también es posible modificar la negación de otra forma. Sea $\mathcal{L}$ igual que antes y sea $\mathcal{M}_2$ idéntica a $\mathcal{M}_1$ excepto por como está definida la negación:

	$\neg^{\mathcal{M}_2}$
1	{1,0}
0	{1}

$\mathcal{M}_2$ contiene una negación no determinista. Pero esta vez pueden existir valuaciones v tales que para alguna fórmula ϕ, $v(\phi) = v(\neg\phi) = 1$. Como se señala en [4], esta matriz se corresponde con el fragmento libre del condicional de la lógica $CLuN$, también desarrollada en [14].

Es sencillo verificar que $\mathcal{M}_1$ es una lógica paracompleta y que $\mathcal{M}_2$ es una lógica paraconsistente, dado que $\nvDash_{\mathcal{M}_1} \phi, \neg\phi$, y $\phi, \neg\phi \nvDash_{\mathcal{M}_2} \psi$. Lo que me parece interesante de estas matrices es que son compatibles con un predicado veritativo transparente, aún siendo bivaluadas. Ya he mencionado que tanto la lógica paracompleta trivaluada K_3 como la lógica paraconsistente trivaluada LP son compatibles con un predicado veritativo transparente. Pero no es difícil mostrar que todo contramodelo de K_3 puede transformarse en un contramodelo de $\mathcal{M}_1$, y también que todo contramodelo de LP puede transformarse en un contramodelo de $\mathcal{M}_2$[6].

[6]Sólo para ser exhaustivo, hay una tercera matriz $\mathcal{M}_3$ con una negación no determinista que también es compatible con un predicado veritativo transparente. $\mathcal{M}_3$ tiene la siguiente negación:

	$\neg^{\mathcal{M}_3}$
1	{1,0}
0	{1,0}

Las pruebas de estos hechos pueden obtenerse modificando detalles menores en las pruebas ofrecidas en [14] para $CLaN$ y $CLuN$. Para probar el primer hecho, la idea es reemplazar todas las asignaciones del valor $\frac{1}{2}$ por 0, y dejar el resto intacto. Para el segundo, necesitamos reemplazar todas las asignaciones del valor $\frac{1}{2}$ por 1, y nuevamente dejar el resto sin modificar.

Proposición 4.3.1 *Si* $\Gamma \vDash_{\mathcal{M}_1} \Delta$, *entonces* $\Gamma \vDash_{K_3} \Delta$.

Esquema de prueba Si $\Gamma \nvDash_{K_3} \Delta$, entonces hay una valuación de K_3 $v^{\mathcal{A}}$ tal que $v^{\mathcal{A}}$ asigna a toda γ en Γ el valor 1 y asigna a toda δ en Δ o bien el valor 0 o bien el valor $\frac{1}{2}$. Ahora construimos una valuación $v^{\mathcal{B}}$ que es exactamente como $v^{\mathcal{A}}$ excepto porque asigna 0 siempre que $v^{\mathcal{A}}$ asigna $\frac{1}{2}$. Más específicamente, $v^{\mathcal{B}}$ es tal que para cada fórmula ϕ:

- si $v^{\mathcal{A}}(\phi) = \frac{1}{2}$, entonces $v^{\mathcal{B}}(\phi) = 0$, y
- si $v^{\mathcal{A}}(\phi) \neq \frac{1}{2}$, entonces $v^{\mathcal{B}}(\phi) = v^{\mathcal{A}}(\phi)$.

Claramente, $v^{\mathcal{B}}$ es una valuación de $\mathcal{M}_1$ y $v^{\mathcal{B}}$ asigna a cada γ en Γ el valor 1 y a cada δ en Δ el valor 0. Luego, $\Gamma \nvDash_{\mathcal{M}_1} \Delta$. ∎

Esto quiere decir que $\mathcal{M}_1$ es una sublógica de K_3. Por ende, $\mathcal{M}_1$ es una matriz paracompleta bivaluada consistente (no determinista) que es compatible con un predicado veritativo transparente.

Proposición 4.3.2 *Si* $\Gamma \vDash_{\mathcal{M}_2} \Delta$, *entonces* $\Gamma \vDash_{LP} \Delta$.

Esquema de prueba Similar a la prueba de la proposición 4.3.1. ∎

Esto muestra que $\mathcal{M}_2$ es una sublógica de LP. Por lo tanto, $\mathcal{M}_2$ es una matriz paraconsistente bivaluada no trivial (no determinista) que es compatible con un predicado veritativo transparente.

Hay resultados de corrección y completitud para estas matrices. Estos resultados se siguen de un hecho más general cuya prueba puede encontrarse en [3]. Si utilizamos un cálculo de secuentes, la matriz $\mathcal{M}_1$ es completa y correcta con respecto al cálculo de secuentes que se corresponde con la lógica (proposicional) clásica (véase el sistema CL del capítulo 1) *menos* la siguiente regla:

Para los interesados, resulta que $\mathcal{M}_3$ es el fragmento libre del condicional de la lógica (paracompleta y paraconsistente) $CloN$, desarrollada en [14] y que es una sublógica de la lógica tetravaluada FDE. Asimismo, hemos visto que hay una cuarta lógica en esta familia, que a veces recibe el nombre de S_3. Análogamente, hay una cuarta matriz, que llamaré $\mathcal{M}_4$, y que puede ser obtenida a partir de $\mathcal{M}_3$ admitiendo sólo aquellas valuaciones de $\mathcal{M}_3$ donde la negación se comporta de manera no determinista o bien para el input 0 o bien para el input 1, pero no para ambos. Resulta que $\mathcal{M}_4$ es una sublógica de la lógica trivaluada S_3.

$$\text{R}\neg \,\frac{\Gamma, \phi \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\phi}$$

Y la lógica de $\mathcal{M}_2$ es correcta y completa con respecto a la lógica (proposicional) clásica[7] *menos* la regla.:

$$\text{L}\neg \,\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \phi}{\Gamma, \neg\phi \Rightarrow \Delta}$$

Esto no debe ser una sorpresa, ya que cada una de estas reglas se corresponde con una fila en la matriz para $\neg$. Si quitamos R$\neg$, $\neg$ "no sabe" qué hacer con las fórmulas falsas, mientras que si quitamos L$\neg$, $\neg$ "no sabe" qué hacer con las fórmulas verdaderas.

Un problema evidente con estas lógicas es que son demasiado débiles. $\mathcal{M}_1$ es una sublógica de K_3 y $\mathcal{M}_2$ es una sublógica LP (de hecho, en ambos casos, las matrices son estrictamente más débiles), como podemos ver abajo:

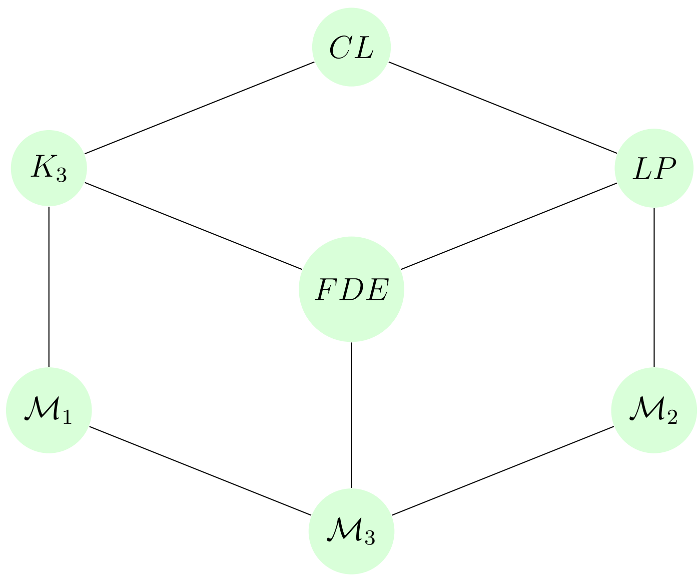

Figura 4.1

Estas lógicas basadas en matrices son mucho más débiles que las lógicas trivaluadas usuales. Por ejemplo, no podemos definir la conjunción (disyunción) en términos de la disyunción (conjunción) y la negación. Por otra parte,

[7]Dado que una de las reglas de la negación no estará disponible, en ambos casos tenemos que hacer un ajuste menor: $\phi \Rightarrow \phi$ debe ser un secuente inicial para *todas las fórmulas*, y no sólo para todas las fórmulas atómicas.

no hay interacción en absoluto[8] entre la disyunción y la conjunción ya que *todas* las leyes de De Morgan fallan en estas lógicas.

Hay una manera conocida de solucionar este problema (véase de nuevo [14]). Aquí mostraré que, una vez más, gracias a la ayuda de las matrices no deterministas, esta solución no requiere la postulación de una tercera categoría semántica. Sean $\mathcal{M}_1^*$ y $\mathcal{M}_2^*$ como las matrices $\mathcal{M}_1$ y $\mathcal{M}_2$, respectivamente, pero supongamos que cumplen con los siguientes requisitos adicionales:

- Para cada fórmula ϕ y cada valuación v:

    1. $v(\phi) = v(\neg\neg\phi)$.
    2. $v(\neg(\phi \wedge \psi)) = v(\neg\phi \vee \neg\psi)$.
    3. $v(\neg(\phi \vee \psi)) = v(\neg\phi \wedge \neg\psi)$.[9]

La matriz $\mathcal{M}_1^*$ se corresponde con el fragmento libre del condicional de la lógica $CLaNs$ y la matriz $\mathcal{M}_2^*$ se corresponde con el fragmento libre del condicional de la lógica $CLuNs$, ambas desarrolladas en [14]. Es posible probar que $\mathcal{M}_1^*$ y que K_3 caracterizan el mismo conjunto de inferencias válidas, y que $\mathcal{M}_2^*$ y LP también caracterizan el mismo conjunto de inferencias válidas.

Proposición 4.3.3 $\Gamma \vDash_{\mathcal{M}_1^*} \Delta$ *si y sólo si* $\Gamma \vDash_{K_3} \Delta$.

Esquema de prueba La prueba de la dirección de izquierda a derecha es similar a la prueba de la proposición 4.3.1. Para la otra dirección, supongamos que $\Gamma \nvDash_{\mathcal{M}_1^*} \Delta$. Entonces hay una valuación de $\mathcal{M}_1^*$ $v^{\mathcal{A}}$ tal que $v^{\mathcal{A}}$ asigna a cada γ en Γ el valor 1 y asigna a cada δ en Δ el valor 0. Ahora construyamos una valuación $v^{\mathcal{B}}$ que es exactamente como $v^{\mathcal{A}}$ excepto porque asigna $\frac{1}{2}$ a una fórmula ϕ siempre que $v^{\mathcal{A}}$ asigne 0 a ϕ y a $\neg\phi$. Más específicamente, $v^{\mathcal{B}}$ es tal que para toda fórmula *atómica* ϕ:

- $v^{\mathcal{B}}(\phi) = \frac{1}{2}$ siempre que $v^{\mathcal{A}}(\phi) = v^{\mathcal{A}}(\neg\phi) = 0$, y
- $v^{\mathcal{B}}(\phi) = v^{\mathcal{A}}(\phi)$ en cualquier otro caso.

---

[8]A excepción de algunas inferencias que no involucran la negación como la que va de $\phi \wedge \psi$ a $\phi \vee \psi$ y la que va de $\phi \wedge (\psi \vee \chi)$ a $(\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \chi)$.

[9]Si los cuantificadores estuvieran disponibles, necesitaríamos estipular además que para cada fórmula ϕ y cada valuación v:

- $v(\exists x \neg\phi) \equiv v(\neg\forall x\phi)$.
- $v(\forall x \neg\phi) \equiv v(\neg\exists x\phi)$.

No es difícil ver que $v^{\mathcal{B}}$ es una valuación de K_3 y que para cada fórmula ϕ se cumple que si $v^{\mathcal{A}}(\phi) = 1$, entonces $v^{\mathcal{B}}(\phi) = 1$, y que si $v^{\mathcal{A}}(\phi) = 0$, entonces o bien $v^{\mathcal{B}}(\phi) = 0$ o bien $v^{\mathcal{B}}(\phi) = \frac{1}{2}$. Se sigue que para cada $\gamma \in \Gamma$, $v^{\mathcal{B}}(\gamma) = 1$ y para cada $\delta \in \Delta, v^{\mathcal{B}}(\delta) = 0$ o $v^{\mathcal{B}}(\delta) = \frac{1}{2}$. Esto quiere decir que $\Gamma \not\models_{K_3} \Delta$. ∎

Como es usual, un resultado análogo puede probarse para LP.

Proposición 4.3.4 $\Gamma \models_{\mathcal{M}_2^*} \Delta$ *si y sólo si* $\Gamma \models_{LP} \Delta$.

Esquema de prueba Para la dirección de derecha-a-izquierda, la única diferencia relevante con respecto a la prueba previa es que hacemos que $v^{\mathcal{B}}$ sea exactamente como $v^{\mathcal{A}}$ excepto en que para cada fórmula atómica ϕ, $v^{\mathcal{B}}(\phi) = \frac{1}{2}$ siempre que $v^{\mathcal{A}}(\phi) = v^{\mathcal{A}}(\neg\phi) = 1$, y $v^{\mathcal{B}}(\phi) = v^{\mathcal{A}}(\phi)$ en cualquier otro caso. ∎

Estos resultados muestran que $\mathcal{M}_1^*$ y $\mathcal{M}_2^*$ son versiones bivaluadas de K_3 y LP, respectivamente. No necesitamos una tercera categoría semántica si la negación se caracteriza por medio de una matriz no determinista.

También tenemos resultados de corrección y completitud disponibles para estas matrices. Esto es inmediato a partir del resultado anterior, junto con el hecho de que K_3 y LP poseen resultados de corrección y completitud (véanse los capítulos 2 y 3).

¿Qué ocurre con λ y otras oraciones problemáticas en estas lógicas? Mientras que en las lógicas trivaluadas utilizamos la tercera categoría semántica para clasificar estas oraciones, las lógicas que presentamos en este capítulo no hacen tal cosa. En particular, $v^{\mathcal{M}_1^*}(\lambda) = 0$ y $v^{\mathcal{M}_2^*}(\lambda) = 1$. Estas asignaciones no generan problemas. Por un lado, dado que en $\mathcal{M}_1^*$ podemos tener $v^{\mathcal{M}_1^*}(\phi) = v^{\mathcal{M}_1^*}(\neg\phi) = 0$ para algunas fórmulas ϕ, lo siguiente se cumple si hay un predicado veritativo disponible:
$v^{\mathcal{M}_1^*}(Tr\langle\lambda\rangle) = v^{\mathcal{M}_1^*}(\neg Tr\langle\lambda\rangle) = 0$.
Análogamente, dado que en $\mathcal{M}_2^*$ podemos tener $v^{\mathcal{M}_2^*}(\phi) = v^{\mathcal{M}_2^*}(\neg\phi) = 1$ para algunas fórmulas ϕ, lo siguiente se cumple:
$v^{\mathcal{M}_2^*}(Tr\langle\lambda\rangle) = v^{\mathcal{M}_2^*}(\neg Tr\langle\lambda\rangle) = 1$.
En consecuencia, una vez que tenemos una negación no determinista presente, no hay ninguna necesidad de postular una tercera categoría semántica para hacer que el predicado veritativo sea transparente.

4.4. Un predicado veritativo transparente

Esta subsección está destinada a mostrar que podemos ofrecer una semántica de punto fijo bivaluada para un lenguaje que contiene un predicado de verdad transparente. Aunque teniendo en cuenta los resultados de la sección anterior y la construcción que ofrecí en el capítulo 2 para K_3^+, este hecho debe ser inmediato, igualmente es instructivo ver exactamente cómo es que la construcción puede llevarse a cabo. Esto nos ayudará a entender cómo el predicado de verdad puede interpretarse adecuadamente en una semántica de dos valores y, en especial, la forma en que las oraciones paradójicas se comportan.

Aquí esbozaré cómo funciona la construcción para $\mathcal{M}_1^*$. La construcción es similar a la que ofrecí en el capítulo 2 para K_3^+, pero hay algunas diferencias interesantes. En primer lugar, sólo consideraremos interpretaciones v^δ para $\mathcal{L}^+$ donde los *literales* aritméticos (es decir, fórmulas aritméticas atómicas y sus negaciones) tienen su valor de verdad estándar y donde el dominio es exactamente ω[10]. En segundo lugar, tenemos que imponer una condición adicional sobre las interpretaciones:

- Para toda fórmula ϕ y toda interpretación v^δ, se cumple que $v^\delta(\neg Tr\langle\phi\rangle) = v^\delta(Tr\langle\neg\phi\rangle)$.

Como es usual, definimos un operador de *salto* $\mathcal{J} : \mathcal{P}\omega \to \mathcal{P}\omega$ sobre interpretaciones para $\mathcal{L}^+$. Este operador se define como sigue:

$$\mathcal{J}(v^\delta(Tr^+)) = \{\langle\phi\rangle : v^\delta(\phi) = 1\}.$$

Observemos que como esta matriz es bivaluada, no hay ninguna necesidad de considerar la antiextensión del predicado veritativo. Podemos definirla a partir de su extensión en cada interpretación v^δ de la siguiente forma:

$$v^\delta(Tr^-) = \omega - v^\delta(Tr^+).$$

Al igual que en el capítulo 2, si podemos demostrar que el operador $\mathcal{J}$ es *monótono*, esto es suficiente para inferir que dicho operador tiene puntos fijos que pueden servir como interpretaciones para el predicado veritativo. Intuitivamente, la idea es partir de una interpretación v^0 que asigna una extensión (quizás vacía y) consistente al predicado de verdad. Ya que la negación no es determinista, la construcción es tal que algunas fórmulas y sus negaciones estarán en la antiextensión del predicado de verdad. Aunque algunas fórmulas

[10]Obsérvese que debido a que la negación es no determinista, no resulta suficiente estipular (como en el capítulo 2) solamente que la parte aritmética del vocabulario tiene su significado estándar en todas las interpretaciones, también necesitamos fijar los valores de las negaciones de las fórmulas atómicas en cada interpretación. De lo contrario, podría haber interpretaciones en las cuales las oraciones aritméticas atómicas tendrán el mismo valor que sus negaciones.

verdaderas podrían estar todavía en la antiextensión del predicado de verdad en v^0, el operador de salto corrige sucesivamente esta situación mediante la inclusión de (cada vez) más códigos de Gödel de fórmulas verdaderas en la extensión del predicado de verdad de forma monótona. Esto significa que los conjuntos
$v^0(Tr^+), \mathcal{J}(v^0(Tr^+)), \mathcal{J}(\mathcal{J}(v^0(Tr^+))), ...$
forman una secuencia creciente, mientras que los conjuntos
$v^0(Tr^-), \mathcal{J}(v^0(Tr^-)), \mathcal{J}(\mathcal{J}(v^0(Tr^-))), ...$
forman una secuencia *decreciente*.

Para mostrar de qué forma funciona esto con mayor rigurosidad, primero necesitamos el siguiente lema:

Lema 4.4.1 *Si $v^\alpha(Tr^+) \subseteq v^\beta(Tr^+)$, entonces para cada fórmula ϕ de $\mathcal{L}^+$, si $v^\alpha(\phi) = 1$, entonces $v^\beta(\phi) = 1$, y si $v^\beta(\phi) = 0$, entonces $v^\alpha(\phi) = 0$.*

Prueba Puesto que hay sólo dos valores de verdad, sólo hace falta establecer la primera afirmación, ya que ésta implica la segunda. La afirmación se demuestra por inducción sobre la complejidad de ϕ, y tenemos que considerar, como en el capítulo 2, cada tipo de fórmula positiva y cada tipo de fórmula negada. Dejo los detalles al lector. ∎

Como corolario obtenemos lo siguiente:

Lema 4.4.2 (*Monotonía de $\mathcal{J}$*) *La secuencia posee la siguiente propiedad de monotonía: Si $v^\alpha(Tr^+) \subseteq v^\beta(Tr^+)$, entonces $\mathcal{J}(v^\alpha(Tr^+)) \subseteq \mathcal{J}(v^\beta(Tr^+))$ y $\mathcal{J}(v^\beta(Tr^-)) \subseteq \mathcal{J}(v^\alpha(Tr^-))$.*

Prueba Como en la prueba anterior, es suficiente con probar solamente una de las afirmciones. La prueba es como la ofrecida en el capítulo 2. ∎

Por consideraciones de cardinalidad, en algún punto la antiextensión del predicado de verdad deja de decrecer y su extensión deja de crecer. Por ende, la construcción llega a un punto fijo.

Teorema 4.4.3 (*Existencia de un punto fijo para $\mathcal{J}$*) *La construcción tiene la propiedad de punto fijo. Esto es, hay una interpretación v^δ tal que:*

- $\mathcal{J}(v^\delta(Tr^+)) = v^\delta(Tr^+)$, *y*
- $\mathcal{J}(v^\delta(Tr^-)) = v^\delta(Tr^-)$.

¿Qué ocurre con $\mathcal{M}_2^*$? Para $\mathcal{M}_2^*$ la idea es similar, pero en lugar de asignar una extensión consistente al predicado de verdad en v^0, asignamos una antiextensión consistente en v^0, y esta vez el operador de salto incluye cada vez más códigos de Gödel de oraciones falsas en la antiextensión del predicado de verdad de una manera monótona. La construcción es muy parecida a la que esbocé en el capítulo 3 para LP^+.

4.5. Como entender las matrices no deterministas

Aunque son técnicamente atractivas, podría argumentarse que estas lógicas no tienen ningún interés filosófico. En esta sección voy a mostrar por qué no estoy de acuerdo con esto. La ausencia de un tercer valor de verdad nos da una serie de características muy deseables. En primer lugar, hay una bonita simetría entre la verdad y la falsedad. Un argumento válido es tanto preservador de verdad de las premisas a las conclusiones como preservador de falsedad de las conclusiones a las premisas. En mi opinión, esto es una ventaja sobre las teorías trivaluadas como K_3 y LP, en las que o bien falla la preservación de verdad o bien falla la preservación de falsedad[11]. En [108], discutiendo argumentos de una sola premisa y una sola conclusión, Alan Weir afirma

> (...) I take it as constitutive of the notion of logical consequence that if the premiss is true the conclusion is true and if the conclusion is false the premiss is false. The second, upwards falsity-preservation direction is often omitted, probably because in classical bivalent semantics it follows from the first, but I see no reason at all for an asymmetrical treatment of downwards truth-preservation and upwards falsity-preservation.

Aunque yo no iría tan lejos como para decir que la simetría entre la verdad y la falsedad es constitutiva de la noción de consecuencia lógica, creo que la asimetría es una característica extraña que debe evitarse siempre que sea posible. Como Weir luego señala, en un marco de conclusiones múltiples, la simetría equivale a la exigencia de que si todas las premisas son verdaderas, entonces por lo menos una de las conclusiones tiene que ser verdadera *y* si todas las conclusiones son falsas, entonces al menos una de las premisas tiene que ser falsa. Dado que la semántica es bivalente, este requisito es plenamente satisfecho en $\mathcal{M}_1^*$ y en $\mathcal{M}_2^*$, incluso ante la presencia de un predicado veritativo transparente.

En segundo lugar, un defecto que suele atribuírsele a los enfoques trivaluados es que no pueden especificar adecuadamente el estatus semántico de

[11] Es preciso hacer aquí dos observaciones. En primer lugar, la lógica paracompleta y paraconsistente S_3 es preservadora de verdad y de falsedad en el sentido deseado. Pero, podría decirse que su relación de consecuencia es extremadamente débil. En segundo lugar, hay un sentido en el que la lógica LP es preservadora de verdad y de falsedad. Sin embargo, esto no es suficiente para abordar la cuestión de la simetría entre la verdad y la falsedad: aunque los argumentos válidos en LP preservan falsedad *estricta* de conclusiones a premisas, no se da que preserven verdad *estricta* de premisas a conclusiones.

las oraciones que reciben el tercer valor de verdad. En K_3^+ no es posible expresar realmente que la oración del mentiroso no es verdadera ni falsa (véase la sección 2.4), mientras que en LP^+ la oración que (presuntamente) expresa que la oración del mentiroso es a la vez verdadera y falsa, no sólo es verdadera, sino también falsa (véase la sección 3.4). En $\mathcal{M}_1^*$ y $\mathcal{M}_2^*$ no existe tal problema. En $\mathcal{M}_1^*$ la oración que dice que el mentiroso es verdadera es falsa, y en $\mathcal{M}_2^*$ la oración que dice que el mentiroso es verdadera es verdadera. Se podría argumentar que aún así hay un problema porque en $\mathcal{M}_1^*$ la oración que dice que el mentiroso es falsa es ella misma falsa, y en $\mathcal{M}_2^*$ la oración que dice que el mentiroso es falsa es ella misma verdadera. Sin embargo, la oración que dice que el mentiroso es falsa es simplemente la oración del mentiroso, por lo que exigir que $\mathcal{M}_1^*$ ($\mathcal{M}_2^*$) debe categorizar esta oración como verdadera (falsa) es lo mismo que exigir que clasifique al propio mentiroso como verdadero (falso).

Una cuestión relacionada es la de si existe una versión reforzada del mentiroso que afecte a estas teorías. En las teorías multivaluadas, tales como K_3, no puede haber un predicado que exprese el concepto de no verdad. Y del mismo modo, en teorías como LP, no puede haber un predicado que exprese el concepto de falsedad estricta. Si hubiera tales predicados, habría nuevas oraciones, similares a la del mentiroso, que harían que estas teorías sean triviales. Sin embargo, este problema simplemente se disuelve en $\mathcal{M}_1^*$ y en $\mathcal{M}_2^*$, donde nor ser verdadero es lo mismo que ser (estrictamente) falso. Esto no quiere decir que estas teorías sean semánticamente cerradas, en el sentido de que pueden expresar todos los conceptos semánticos inteligibles. Pues, por ejemplo, en $\mathcal{M}_1^*$ no puede haber una negación exhaustiva, y en $\mathcal{M}_2^*$ no puede haber una negación exclusiva. Aún así, no hay mentirosos reforzados en estas teorías que sean diferentes del mentiroso original. Para ponerlo en un lema: en estas teorías todos los mentirosos son iguales[12].

Por último, una ventaja metodológica de presentar K_3, LP y lógicas similares por medio de matrices no deterministas de dos valores (o por medio de cálculos de secuentes de dos lados) es que podemos ver de una manera muy precisa lo que separa a estas lógicas de la lógica clásica. Y la diferencia se reduce a esto: la negación se comporta de una manera distinta. En particular, se comporta de forma no determinista. En algunos casos, deja abierto el valor semántico de la fórmula negada. Sin embargo, en la presentación

[12]Un problema relacionado que no puede ser disuelto de la misma forma es que existen oraciones como 'hay una oración que no es verdadera ni falsa' y 'no hay oraciones que sean verdaderas y falsas'. La primera será falsa según $\mathcal{M}_1^*$ y la segunda será verdadera de acuerdo a $\mathcal{M}_2^*$, lo que parece bastante desagradable. Sin embargo, en este sentido $\mathcal{M}_1^*$ y $\mathcal{M}_2^*$ no son mejores ni peores que sus versiones trivaluadas, en donde la primera oración se evalúa como ni verdadera ni falsa, y la segunda como verdadera y falsa, respectivamente.

de tres valores (o en la presentación que utiliza secuentes de tres lados), la diferencia es entendida en términos de la noción de validez. No hay nada particularmente especial con la negación[13].

Pasemos a los potenciales problemas a los que estas lógicas se enfrentan. Primero, una característica atractiva de lógicas como K_3 y LP es que nos dan una historia conceptual de por qué el mentiroso y oraciones similares son especiales. En la primera, se dice que el mentiroso no es verdadera ni falsa, y esto explica por qué la teoría le asigna el valor $\frac{1}{2}$. En la segunda, se dice que el mentiroso es a la vez una oración verdadera y falsa, y esto explica por qué la teoría asigna el valor $\frac{1}{2}$.

¿Qué hay de $\mathcal{M}_1^*$ y $\mathcal{M}_2^*$? En la primera, el mentiroso recibe el valor 0, mientras que en la segunda recibe el valor 1. ¿Hay algo interesante que decir acerca de por qué esto es así? Creo que sí. Una interpretación plausible y sencilla de estas lógicas que ya he mencionado en el capítulo 1 es en términos de aceptación y rechazo (o aserción y negación, si preferimos analizar actos de habla en lugar de actitudes proposicionales). En particular, podemos interpretar $\vDash_{\mathcal{M}_1^*}$ y $\vDash_{\mathcal{M}_2^*}$ en la línea de [83] y [84]. $\Gamma \vDash_{\mathcal{M}_i^+} \Delta$ (para $i = 1, 2$) equivale a la afirmación de que no debemos aceptar cada miembro de Γ y al mismo tiempo rechazar cada miembro de Δ. Para oraciones, podemos decir que si una oración tiene el valor 1, entonces eso significa que debemos aceptarla, y si una oración tiene el valor 0, esto significa que no debemos aceptarla o, lo que equivale a lo mismo aquí, que debemos rechazarla. Así, en el caso de $\mathcal{M}_1^*$ no aceptamos la oración del mentiroso ni su negación, y en el caso de $\mathcal{M}_2^*$ aceptamos ambas. Creo que, en este sentido, $\mathcal{M}_1^*$ y $\mathcal{M}_2^*$ son "menos hipócritas" que sus contrapartidas trivaluadas, en las que la bivalencia resurge tácitamente en términos de la dicotomía entre tener el valor designado y no tenerlo.

Una segunda cuestión es que no está claro hasta qué punto $\neg^{\mathcal{M}_1^*}$ y $\neg^{\mathcal{M}_2^*}$ representan negaciones "reales". Una característica interesante de la mayoría de las lógicas multivaluadas es que para las fórmulas que reciben un valor clásico, la negación se comporta igual que la negación clásica. En $\mathcal{M}_1^*$ y en $\mathcal{M}_2^*$ eso no ocurre.

Creo que es muy natural entender las conectivas no deterministas como expresiones *ambiguas*. En el caso que nos ocupa, el carácter no determinista de la negación refleja el hecho de que la negación se utiliza de manera ambigua cuando teorizamos acerca de la verdad. En particular, la negación se comporta de una forma en contextos en los que hay oraciones paradóji-

[13]Por supuesto, esto es sólo una ventaja con respecto a la presentación trivaluada de K_3, LP y lógicas similares, por lo que esta crítica no afecta a la semántica relacional ni a la semántica de la estrella de Routley, donde el cambio fundamental tiene que ver con el comportamiento de la negación también.

cas involucradas, y se comporta de manera diferente en situaciones libres de paradojas. Por ejemplo, un teórico paracompleto (paraconsistente) sostiene que la negación se comporta como un operador no exhaustivo (no exclusivo) cuando ocurre en la oración del mentiroso, pero que se comporta como la negación clásica cuando ocurre en oraciones no paradójicas. En otras palabras, la negación es ambigua entre dos lecturas, una lectura exhaustiva (exclusiva) y una lectura no exhaustiva (no exclusiva). En una de esas lecturas, la negación es siempre es capaz de formar oraciones contradictorias, en la otra a veces no lo es. Una característica interesante del marco no determinista es que captura esta ambigüedad de una manera muy precisa.

Por otra parte, sólo tenemos que preocuparnos por la ambigüedad hasta cierto punto. Por un lado, la no composicionalidad de la negación sólo afecta a las negaciones de fórmulas atómicas. Una vez que se determinan los valores de verdad de todos los literales, podemos calcular los valores del resto de las fórmulas composicionalmente. Pero más importante aún, una vez que reconocemos que estamos razonando en un contexto completo (consistente), la negación se comporta como la negación clásica. Más precisamente, podemos "recapturar " los razonamientos clásicos en ciertos contextos, al igual que en K_3 y en LP (véase [18]). En $\mathcal{M}_1^*$ las inferencias clásicas valen exactamente cuando las fórmulas atómicas que ocurren en las conclusiones respetan tercero excluido, y en $\mathcal{M}_2^*$ las inferencias clásicas valen exactamente cuando las fórmulas atómicas que ocurren en las premisas son contradictorias. Más rigurosamente, podemos probar la siguiente afirmación (donde $\{\gamma_1^{At}, ..., \gamma_m^{At}\}$ es el conjunto de fórmulas atómicas que ocurren en Γ y $\{\delta_1^{At}, ..., \delta_n^{At}\}$ es el conjunto de fórmulas atómicas que ocurren en Δ):

Proposición 4.5.1 $\Gamma \vDash_{CL} \Delta$ *si y sólo si* $\delta_1^{At} \vee \neg\delta_1^{At}, ..., \delta_n^{At} \vee \neg\delta_n^{At}, \Gamma \vDash_{\mathcal{M}_1^*} \Delta$.

Esquema de prueba La dirección de derecha a izquierda es sencilla. Para la otra dirección, supongamos que $\delta_1^{At} \vee \neg\delta_1^{At}, ..., \delta_n^{At} \vee \neg\delta_n^{At}, \Gamma \nvDash_{\mathcal{M}_1^*} \Delta$. Esto quiere decir que hay una valuación de $\mathcal{M}_1^*$ $v^{\mathcal{A}}$ tal que $v^{\mathcal{A}}$ le asigna a cada γ en Γ el valor 1, a cada δ en Δ el valor 0 y a $\delta_i^{At} \vee \neg\delta_i^{At}$ el valor 1 para cada i tal que $1 \leq i \leq n$. Ahora construimos una valuación $v^{\mathcal{B}}$ que es exactamente como $v^{\mathcal{A}}$ excepto en que le asigna 1 a una fórmula $\neg\phi$ siempre que $v^{\mathcal{A}}$ le asigna 0 a ϕ. Más precisamente, $v^{\mathcal{B}}$ es tal que para cada fórmula atómica ϕ:

- $v^{\mathcal{B}}(\phi) = v^{\mathcal{A}}(\phi)$, y
- $v^{\mathcal{B}}(\neg\phi) = 1$ siempre que $v^{\mathcal{A}}(\phi) = 0$.

No es difícil ver que $v^{\mathcal{B}}$ es una valuación clásica y que para cada $\gamma \in \Gamma$, $v^{\mathcal{B}}(\gamma) = 1$ y para cada $\delta \in \Delta, v^{\mathcal{B}}(\delta) = 0$. Esto quiere decir que $\Gamma \nvDash_{CL} \Delta$. ∎

Como es usual, tenemos un resultado análogo para $\mathcal{M}_2^*$:

Proposición 4.5.2 $\Gamma \vDash_{CL} \Delta$ *si y sólo si* $\Gamma \vDash_{\mathcal{M}_2^*} \Delta, \gamma_1^{At} \wedge \neg\gamma_1^{At}, ..., \gamma_m^{At} \wedge \neg\gamma_m^{At}$.[14]

Esquema de prueba Similar a la prueba de la proposición 4.5.1. ∎

La primera proposición puede entenderse, al menos de manera aproximada, como la idea de que en las situaciones en que la ley de tercero excluido se cumple, es decir, en situaciones completas, $\mathcal{M}_1^*$ se comporta como la lógica clásica. La segunda proposición muestra, a grandes rasgos, que en situaciones en las que la ley de no contradicción se cumple, es decir, en situaciones consistentes, $\mathcal{M}_2^*$ se comporta como la lógica clásica. Estos hechos deben ser suficientes para disipar la sospecha de que la negación se comporta extrañamente incluso en situaciones que no son paradójicas[15].

Se me ha sugerido que el fanático de la composicionalidad no estará satisfecho. Pero es importante tener en cuenta que los resultados anteriores muestran que una vez que averiguamos si la oración negada es paradójica o no, la negación sí se comporta composicionalmente. Como ya señalé, en un contexto libre de paradojas, la negación es simplemente la negación clásica. Pero si estamos razonando con una oración paradójica, la negación se comporta como el operador nulo, dejando el valor de la oración negada intacto. En el caso de la paradoja del mentiroso y de oraciones similares, hay una explicación para esto: el mentiroso puede ser identificada, en cierto sentido, con su propia negación, por lo que no debemos esperar ningún cambio en el valor de verdad. Por lo tanto, una vez que nos damos cuenta de si la oración que ha sido negada es paradójica o no, se restablece la composicionalidad.

[14] En [13], Batens ofrece una prueba del siguiente resultado (he modificado ligeramente su notación):

$\vdash_{CL} \phi$ si y sólo si $\vdash_{PIz} (\psi_1 \wedge \neg\psi_1) \vee ... \vee (\psi_n \wedge \neg\psi_n) \vee \phi$, para algún $\psi_1, ..., \psi_n$

donde PIz es cualquier extensión paraconsistente de $CLuN$ (la cual es en realidad PI en la notación de [13]). Si tenemos en cuenta la existencia de la propiedad de la forma normal disyuntiva en $CLuNs$, entonces podemos tomar a $\psi_1, ..., \psi_n$ como fórmulas atómicas y en consecuencia obtener la proposición 4.5.2 para $CLuNs$ (y por ende para el fragmento de $CLuNs$ que carece del condicional, $\mathcal{M}_2^*$). Gracias a un evaluador de la revista *Australasian Journal of Logic* por esto.

[15] Hay otras maneras de recapturar los razonamientos clásicos en estas lógicas. Una estrategia popular es introducir un operador de determinación (en el caso de las teorías paracompletas; véase el capítulo 2) o de consistencia (en el caso de las teorías paraconsistentes; véase el capítulo 3). Sin embargo, la introducción de estos operadores es, como vimos, problemática en presencia de oraciones paradójicas.

Una tercera preocupación es que hay otras maneras de proporcionar una semántica formal bivaluada para K_3, LP y lógicas similares. Como mencionamos a la pasada anteriormente, estas lógicas pueden caracterizarse utilizando la semántica de Routley, la semántica relacional, la semántica parcial y la semántica de bivaluaciones. Sin embargo, en las primeras tres, parece razonable señalar que se postulan más de dos *categorías semánticas*, aún cuando tengamos solamente dos valores de verdad. Cuando hablo de una categoría semántica me refiero a una forma de evaluar semánticamente una oración. Nótese que esto puede o no coincidir con los valores de verdad que estamos en condiciones de asignar a una oración de acuerdo con un modelo. Por ejemplo, aunque la semántica parcial para K_3 utiliza sólo dos valores de verdad, se introduce una tercera categoría semántica, la de carecer de un valor de verdad. Otro ejemplo viene dado por la semántica relacional para LP, la cual también utiliza sólo dos valores de verdad, pero asigna ambos a ciertas oraciones. Una vez más, las oraciones que poseen ambos valores de verdad pertenecen a una tercera categoría semántica. El caso de la semántica de Routley es más difícil de analizar, ya que la presencia de mundos posibles y de mundos 'estrella' oscurece un poco las cosas. El marco actual, por el contrario, sólo requiere la postulación de dos categorías semánticas.

El problema con la semántica de bivaluaciones es diferente. Al igual que con las matrices no deterministas bivalentes, la semántica de bivaluaciones sólo requiere la postulación de dos categorías semánticas. De hecho, se sabe que cualquier relación de consecuencia que sea reflexiva, monótona, y obedezca la regla de corte (es decir, cualquier relación de consecuencia *tarskiana*) es exactamente la relación de consecuencia determinada por un conjunto de bivaluaciones. Ahora bien, cualquier lógica caracterizable por medio de una matriz como las que he estado considerando obedece estos principios. Debido a esto, su relación consecuencia puede caracterizarse utilizando bivaluaciones[16]. Por lo tanto, desde un punto de vista técnico, podría haber utilizado bivaluaciones en lugar matrices no deterministas.

La razón por la que prefiero usar este último tipo de semántica y no la primera es que, desde una perspectiva más conceptual, la definición de la negación por medio de una matriz no determinista pone de manifiesto uno de los aspectos claves de la negación que he mencionado antes: la negación se comporta ambiguamente. Mientras que las matrices no deterministas capturan esta ambigüedad de manera muy explícita, este hecho queda tácito en la semántica de bivaluaciones.

[16]Una versión de este resultado fue utilizado por Roman Suszko en los años 70 [101] para motivar la afirmación de que sólo hay dos valores de verdad. Esto a veces se llama 'Tesis de Suszko'. Una prueba de este resultado, así como una breve discusión del tema, pueden encontrarse en [97]. Gracias a Dave Ripley por motivar esta nota.

Una preocupación final que voy a abordar -una que a veces se considera crucial- es que $\mathcal{M}_1^*$ y $\mathcal{M}_2^*$ son demasiado débiles, ya que carecen de un condicional adecuado. Por ejemplo, $\mathcal{M}_1^*$ no puede contener un condicional clásico. Pues supongamos que el condicional se define de la siguiente manera:

		$\supset^{\mathcal{M}_1^*}$
1	1	$\{1\}$
1	0	$\{0\}$
0	1	$\{1\}$
0	0	$\{1\}$

Luego, la negación *clásica* $\neg_C$ se vuelve definible

$\neg_C \phi =_{df} \phi \supset \neg\phi$

Algo similar sucede con $\mathcal{M}_2^*$. Esta vez el condicional clásico no genera problemas[17], pero no podemos tener, entre otras cosas, una disyunción exclusiva:

		$\not\leftrightarrow^{\mathcal{M}_2^*}$
1	1	$\{0\}$
1	0	$\{1\}$
0	1	$\{1\}$
0	0	$\{0\}$

En presencia de esta conectiva podemos definir, una vez más, la negación *clásica* $\neg_C$:

$\neg_C \phi =_{df} (\phi \vee \neg\phi) \not\leftrightarrow \phi$

En suma, las teorías que hemos considerado, incluso en sus versiones reforzadas, no son más fuertes que K_3 y LP. Cualquier crítica existente vinculada con la debilidad de estas lógicas se aplican también a $\mathcal{M}_1^*$ y $\mathcal{M}_2^*$. Y, como he analizado en los capítulos 2 y 3, se han hecho muchas críticas de este tipo, especialmente en relación con los condicionales de estas teorías. Hemos visto que ha habido intentos de añadir condicionales a K_3 y (una teoría similar a) LP. No conozco intentos similares para $\mathcal{M}_1^*$ o $\mathcal{M}_2^*$, pero

[17]Bueno, en realidad sí los genera. No hay problemas siempre y cuando no contemos con una constante de falsedad $\perp$ disponible en el lenguaje ni con una oración que sea falsa en toda valuación. Nótese que sin estas cosas no es posible construir una oración de Curry. Sin embargo, si hay una constante de falsedad o una oración que sea siempre falsa, el condicional clásico puede utilizarse para definir la negación clásica:
$\neg_C \phi \equiv_{df} \phi \supset \perp$.

podemos conjeturar que si un condicional plausible puede ser añadido a las teorías trivaluadas, también se puede agregar a las teorías bivaluadas.

En el capítulo 7 voy a abordar la cuestión de cómo agregar una condicional a una teoría similar a $\mathcal{M}_1^*$ (y a una teoría similar a $\mathcal{M}_2^*$), así como un predicado validez ingenuo. La idea será la de rechazar las reglas estructurales de contracción, manteniendo la teoría paracompleta (paraconsistente). Los detalles tendrán que esperar hasta el capítulo 7, pero antes de empezar a considerar las teorías subestructurales, voy a terminar mencionando otra estrategia para hacer frente al problema del condicional.

Debe quedar claro a esta altura que al tomar una matriz y volverla no determinista, la lógica caracterizada por la matriz original (posiblemente) se debilita. Esto podría no ser una buena estrategia para las matrices que ya están acusadas de ser demasiado débiles, como K_3 y LP, pero puede ser una buena idea para matrices que son demasiado fuertes. Un ejemplo interesante de esto es la lógica de Łukasiewicz con infinitos valores de verdad, a la que me referiré ahora.

Apéndice

Apéndice A

Condicionales no deterministas

En este apéndice quiero abordar el problema de encontrar un condicional fuerte para una teoría de la verdad ingenua. Este problema no es nuevo en absoluto. Por lo general, las teorías donde la verdad se trata como un concepto ingenuo caen bajo el siguiente dilema: o la teoría está sujeta a la paradoja de Curry, la cual hace que sea trivial, o la teoría no es trivial, pero el condicional resultante es demasiado débil[1]. Recientemente ha habido muchos intentos de evitar este dilema por medio de la introducción de condicionales bastante complicadas (como [7], [17], [37] y [110]), algunos de los cuales ya han sido analizados en los capítulo 2 y 3.

Un condicional relativamente familiar y no tan complicado que aún no hemos considerado es el condicional de la lógica de Łukasiewicz con infinitos valores de verdad. Sin embargo, Hartry Field [37], p.94 afirma que:

> (...) the clear inadequacy of the continuum-valued semantics for languages with quantifiers should not blind us to its virtues in a quantifier-free context. Indeed, one might well hope that some simple modification of it would work for languages with quantifiers. In fact, this does not seem to be the case: major revisions in the approach seem to be required.

Ahora bien, yo no sé exactamente lo que Field quiere decir cuando afirma que necesitamos 'revisiones mayores', pero aquí voy a considerar varias teorías muy cercanas a la lógica de Łukasiewicz y argumenté que la mayoría de ellas tienen algunas propiedades interesantes que vale la pena explorar. Aunque esto puede hacerse en términos sintácticos, analizando los axiomas y

[1]Algunas teorías subestructurales de la verdad no entran en este dilema, como veremos en capítulos posteriores. En este apéndice sólo consideraré teorías con una relación de consecuencia que satisfaga a todas las propiedades estructurales habituales.

reglas que el condicional debe satisfacer, emplearé un enfoque semántico. En particular, voy a utilizar matrices no deterministas para obtener subteorías relativamente fuertes de la lógica de Łukasiewicz con infinitos valores.

El resto del apéndice se estructura de la siguiente manera. En el apartado siguiente, después de mostrar la insuficiencia de la lógica de Łukasiewicz con *finitos* valores de verdad (ya sea determinista o no), presento la versión de esta lógica que postula infinitos valores. Luego, considero varias formas de hacer que esta lógica sea no determinista y muestro qué tan fuertes son las teorías resultantes. La subsección que sigue a esa contiene algunos comentarios especulativos acerca de si las teorías no deterministas que presento son ω-inconsistentes, y luego muestro que es posible definir un operador de determinación en estas teorías. Hacia el final comparo la presente propuesta con un enfoque similar recientemente desarrollado por Andrew Bacon en [8].

A.1. La lógica de Łukasiewicz

Ciertas lógicas multivaluadas como K_3 y LP ofrecen soluciones plausibles a la paradoja del mentiroso. Sin embargo, hemos visto que el condicional material se comporta de manera un poco extraña en estas lógicas: *modus ponens* ($\phi, \phi \supset \psi \nvDash_{LP} \psi$) no vale en LP, mientras que identidad ($\nvDash_{K_3} \phi \supset \phi$) no vale en K_3. Añadir un condicional a estas lógicas definible en términos de mundos (im)posibles o en términos de secuencias de revisión es, como vimos, bastante complicado.

¿Hay otra forma de añadir un condicional adecuado a estas lógicas? Eso dependerá, por supuesto, de lo que entendamos por 'condicional adecuado'. Una opción consiste en sugerir que un condicional adecuado es aquel que satisface ciertas leyes y reglas de inferencia. Otra opción es imponer restricciones generales relativas a la forma en que las valuaciones deben comportarse para oraciones condicionales. Estos enfoques no son mutuamente excluyentes. Por ejemplo, podríamos imponer restricciones sobre las valuaciones de tal manera que el condicional valide las leyes y reglas que queremos. No obstante, podría ocurrir que en ciertos contextos uno de los enfoques sea más ilustrativo que el otro.

Si estamos considerando un espacio de valores *linealmente ordenado*[2], parece útil emplear el segundo enfoque y decir que un condicional $\to$ es *adecuado* si no esta sujeto a la paradoja de Curry y satisface las siguientes condiciones:

[2]También asumiré que el espacio de valores satisface la siguiente condición: *para todo* x *y para todo* y, *si* $x \in \mathcal{D}$ *e* $y \in \mathcal{V} - \mathcal{D}$, *entonces* $x > y$.

1. Si $v(\phi) \leq v(\psi)$, entonces $v(\phi \to \psi) \in \mathcal{D}$.
2. Si $v(\phi) > v(\psi)$, entonces $v(\phi \to \psi) \in \mathcal{V} - \mathcal{D}$.

¿Puede una teoría de la verdad transparente ser complementada con un condicional adecuado en este sentido? Desafortunadamente, para cualquier matriz linealmente ordenada que sea finitamente valuada, independientemente de si es determinista o no lo es, lo siguiente puede ser probado:

Teorema A.1.1 *Ninguna matriz con n valores que sea linealmente ordenada y que contenga un predicado veritativo transparente puede tener un condicional adecuado, siempre que para cada valor no designado i exista una oración ϕ tal que $v(\phi) = i$.*[3]

Prueba Supongamos que $\mathcal{V}$ tiene n elementos. Dado que los valores de $\mathcal{V}$ están linealmente ordenados por una relación $<$, podemos listarlos como sigue: $r_1, ..., r_n$, donde $r_1 < .... < r_n$ y $\varnothing \neq \mathcal{D} \subseteq \{r_2, ..., r_n\}$. Ya que $\mathcal{D}$ es finito, hay un valor no designado $r_i \notin \mathcal{D}$ mayor que todos los demás. Ahora consideremos una oración γ tal que γ es $Tr\langle\gamma\rangle \to \phi$, donde $v(\phi) = r_i$. Podemos razonar de la siguiente forma: si $v(\gamma) \in \mathcal{D}$, entonces $v(\gamma) > v(\phi)$. Luego, por la condición 2, $v(\gamma) \in \mathcal{V} - \mathcal{D}$; si $v(\gamma) \in \mathcal{V} - \mathcal{D}$, entonces $v(\gamma) \leq v(\phi)$. De modo que por la condición 1, $v(\gamma) \in \mathcal{D}$. En ambos casos, tenemos una contradicción. ∎

Luego, el problema con las matrices no deterministas finitas es que podemos utilizar el mayor valor no designado para construir una versión de la oración de Curry[4]. Con matrices infinitas este problema no surge necesariamente. Puede haber un número infinito de valores crecientes no designados, así que quizás no haya un valor no designado que sea mayor que todos los demás. Sin embargo, existe un problema diferente con las teorías infinitamente valuadas que incluyen un predicado de verdad ingenuo. La mejor de estas teorías es, a mi entender, la teoría de Łukasiewicz $Ł_\infty$[5]. Esta teoría puede

[3] En realidad, podemos demostrar que existe una oración de este tipo, por lo que podemos disponer de este supuesto en el teorema. Sin embargo, prueba es más simple de esta manera.

[4] Véase [80] para una versión diferente de este resultado que no involucra matrices no deterministas. El teorema de Restall es en cierto modo más fuerte que lo que acabamos de demostrar, ya que también se aplica a ciertas matrices que no están linealmente ordenadas. Sin embargo, en un sentido diferente, es más débil, ya que sólo tiene en cuenta matrices deterministas.

[5] Por lo general, si se quiere hacer hincapié en que el predicado de verdad está en el lenguaje, se utiliza el nombre $Ł_\infty Tr$, y por otra parte, si además se utiliza una teoría de la sintaxis como la aritmética de Peano, se usa el nombre $Ł_\infty^{PA} Tr$. Para facilitar la notación utilizaremos el nombre $Ł_\infty^{+}$ para la teoría con el predicado de verdad junto con algún sistema de nombres.

caracterizarse semánticamente de la siguiente manera (véase [73] para más detalles sobre Ł$_\infty$):

Definición (La lógica de Łukasiewicz Ł$_\infty$) Sea Ł$_\infty$ la teoría caracterizada por la matriz $< \mathcal{V}, \mathcal{D}, \mathcal{O} >$, donde

- $\mathcal{V} = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\} = [0, 1]$,
- $\mathcal{D} = \{1\}$, y
- $\mathcal{O}$ está definida de la siguiente forma:

	$\neg^{L_\infty}$
1	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1

$\vee^{L_\infty}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	1
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1	$\frac{1}{2}$	0

	$\exists^{L_\infty}$
$\{1\}$	1
$\{\frac{1}{2}\}$	$\frac{1}{2}$
$\{0\}$	0
$\{1, \frac{1}{2}\}$	1
$\{\frac{1}{2}, 0\}$	$\frac{1}{2}$
$\{1, 0\}$	1
$\{1, \frac{1}{2}, 0\}$	1

$$x \to^{L_\infty} y = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq y \\ 1 - (x - y) & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

La figura 4.2 nos da una idea aproximada de cómo se comporta el condicional de Ł$_\infty$ cuando una fórmula no recibe el valor 1[6]:

[6]Para evitar confusiones, notemos que la imagen puede ser engañosa porque parece asumir que por cada valor hay una fórmula que tiene ese valor. Pero dado que hay tantos valores como número reales entre 1 y 0, y sólo un conjunto enumerable de fórmulas, esto no es posible. Por lo tanto, la figura es inexacta en ese sentido

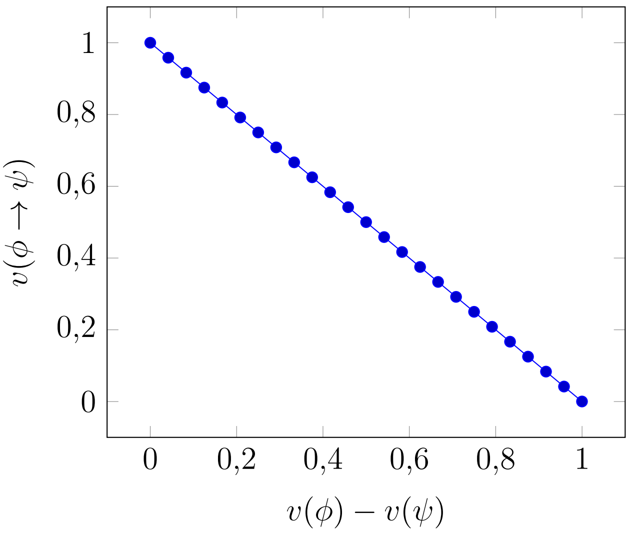

Figura 4.2: el condicional de Lukasiewicz

Una valuación $v^{Ł\infty}$ basada en la matriz que caracteriza la lógica $Ł_\infty$ puede definirse recursivamente de la forma usual (aunque en el resto de la sección usaré v omitiendo este supraíndice). Obtenemos la teoría $Ł^+_\infty$ considerando sólo aquellas valuaciones de $Ł_\infty$ que además satisfacen la condición de que para cada ϕ, $v(Tr\langle\phi\rangle) = v(\phi)$. Esta teoría tiene algunas propiedades atractivas, especialmente aquellas vinculadas al predicado de verdad y al condicional. Por ejemplo, al igual que K_3^+ y LP^+, la oración del mentiroso y otras oraciones problemáticas reciben el valor $\frac{1}{2}$, pero a diferencia de K_3^+, $Ł^+_\infty$ valida tanto identidad como todas las instancias del esquema T. Y, a diferencia de LP^+, *modus ponens* vale en $Ł^+_\infty$. Además, es posible ofrecer una axiomatización débilmente completa para el fragmento proposicional (libre de $Tr(x)$) de esta lógica. Más específicamente, todas las tautologías e inferencias (con un número finito de premisas) pertenecientes al fragmento libre de $Tr(x)$ pueden probarse a partir de los siguientes cuatro axiomas (junto con la regla de *modus ponens*):

$\phi \to (\psi \to \phi)$
$(\neg\psi \to \neg\phi) \to (\phi \to \psi)$
$(\phi \to \psi) \to ((\chi \to \phi) \to (\chi \to \psi))$
$((\phi \to \psi) \to \psi) \to ((\psi \to \phi) \to \phi)$

El problema es que $Ł^+_\infty$ también tiene algunas propiedades no tan atractivas. En primer lugar, la axiomatización previa es sólo débilmente completa.

Hay inferencias (pertenecientes al fragmento libre de $Tr(x)$) que no pueden probarse a partir de estos axiomas.

En segundo lugar, una manera de extender esta teoría a un lenguaje de primer orden es introduciendo los siguientes dos axiomas (junto con la regla de generalización):

$\forall x\phi(x) \rightarrow \phi(t)$ (donde t está libre para x en ϕ)
$\forall x(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow \forall x\psi)$ (donde x no está libre en ϕ)

Sin embargo, una vez que hacemos esto, la teoría ni siquiera es débilmente completa[7]. Hay ciertas oraciones (pertenecientes al lenguaje libre de $Tr(x)$) que son semánticamente válidas pero que no tienen prueba en esta axiomatización.

Estas dos propiedades no deberían molestarnos demasiado si no nos interesa tener un cálculo completo para esta lógica. Sin embargo, $Ł^+_\infty$ tiene una tercera propiedad desagradable: es ω-inconsistente.

Definición (ω-inconsistencia) Diré que una teoría $\mathcal{T}$ es *ω-inconsistente* si y sólo si para alguna fórmula $\phi(x)$ y cada objeto o, $\mathcal{T} \vDash \phi[\boldsymbol{o}/x]$ pero $\mathcal{T} \vDash \exists x \neg\phi(x)$ (donde $\boldsymbol{o}$ es un nombre para o)[8].

Asumiendo, por ejemplo, que la teoría de base de $Ł^+_\infty$ es la aritmética de Peano, se puede probar lo siguiente:

Teorema A.1.2 (Véase [79], [44], [8]) *$Ł^+_\infty$ es ω-inconsistente*[9].

De esto se desprende que hay una pregunta natural que debemos hacernos: ¿hay subteorías interesantes de $Ł_\infty$ con un condicional fuerte que no sean ω-inconsistentes?[10]

[7] [73] nos refiere a una prueba de Scarpellini.

[8] Podría ser importante notar que la propiedad de ser ω-inconsistente es diferente de la propiedad de ser inconsistente en la lógica ω (ω-logic) (i.e. de la propiedad de carecer de un modelo con la estructura de ω). Una teoría es inconsistente en la lógica ω si la teoría junto con la regla ω es inconsistente. Una teoría consistente en la lógica ω es ω-consistente, pero la conversa puede fallar. Gracias a un evaluador anónimo de la revista *Studia Logica* por aclarar esta cuestión.

[9] Además de esto, en [44] se prueba que al añadir ciertos axiomas de composicionalidad para el predicado veritativo a $Ł^+_\infty$, hacemos que la teoría se vuelva inconsistente, y no simplemente ω-inconsistente. Más precisamente, sea $Sent_{L^+_\infty}(x)$ un predicado satisfecho por todos los nombres de oraciones de $Ł^+_\infty$ y sólo por ellos. Puede mostrarse que $Ł^+_\infty$ ya valida cada instancia de un axioma-esquema como $Tr\langle\phi \vee \psi\rangle \leftrightarrow (Tr\langle\phi\rangle \vee Tr\langle\psi\rangle)$. Pero, si añadimos $\forall x\forall y(Sent_{L_\infty}(x) \wedge Sent_{L_\infty}(y) \rightarrow (Tr(x \vee y) \leftrightarrow (Tr(x) \vee Tr(y))))$ la teoría se vuelve inconsistente.

[10] Esta pregunta ha sido investigada hasta cierto punto por Bacon en [8]. Mientras que mi

A.2. Lógicas de Łukasiewicz no deterministas

La primera lógica que discutiré es $\mathcal{NDŁ}^+_\infty$, que es exactamente como $Ł^+_\infty$ excepto por lo siguiente:

$$x \rightarrow^{\mathcal{ND}L^+_\infty} y \in \begin{cases} \{1\} & \text{si } x \leq y \\ \mathcal{V} - \mathcal{D} & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

El condicional de Łukasiewicz es determinista, mientras que el condicional de $\mathcal{NDŁ}^+_\infty$ no lo es[11]. Nótese que el condicional de $\mathcal{NDŁ}^+_\infty$ surge muy naturalmente de las dos condiciones que impusimos más arriba en la definición de *condicional adecuado*. A continuación ofreceré una lista incompleta de principios que son válidos en esta teoría (como es usual, en algunas casos los nombres son algo arbitrarios):

$\phi \rightarrow \psi,\ \phi \vDash \psi$ (*modus ponens*)
$\vDash \phi \rightarrow \phi$ (identidad)
$\vDash \neg\neg\phi \rightarrow \phi$ (doble negación)
$\phi \rightarrow \psi, \neg\psi \vDash \neg\phi$ (*modus tollens*)
$\vDash \phi \wedge (\psi \vee \chi) \rightarrow (\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \chi)$ (distribución)
$\vDash \phi \rightarrow \phi \vee \psi$ ($\vee$-intro)
$\vDash \phi \wedge \psi \rightarrow \phi$ ($\wedge$-elim)
$\vDash (\phi \rightarrow \psi) \vee (\psi \rightarrow \phi)$ (linealidad)
$\phi \vDash \psi \rightarrow \phi$ (debilitamiento positivo)
$\neg\phi \vDash \phi \rightarrow \psi$ (explosión fuerte)
$(\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \chi) \vDash \phi \rightarrow \chi$ (transitividad débil)
$\neg\phi \vee \psi \vDash \phi \rightarrow \psi$ (regla de herradura positiva)

El problema con esta teoría es que el condicional es aún demasiado débil, ya que no logra validar varios principios altamente plausibles. De modo que es interesante ver hasta qué punto el condicional puede reforzarse sin hacer que la teoría se vuelva inconsistente u ω-inconsistente[12]. Para investigar esta

enfoque aquí es modelo-teórico, su enfoque es sintáctico, ya que analiza qué axiomas para el condicional debemos adoptar sin hacer que nuestra teoría sea ω-inconsistente. Véase también la sección final de [34].

[11] En realidad, necesitamos hacer algunos ajustes menores adicionales. Las otras expresiones lógicas también se definen de manera no determinista, aunque de una forma poco interesante. Por ejemplo, la negación y la disyunción se caracterizan como sigue: $\neg^{\mathcal{ND}L^+_\infty} x \in \{1 - x\}$, y $x \vee^{\mathcal{ND}L^+_\infty} y \in \{max(x, y)\}$.

[12] En realidad, no he ofrecido ninguna prueba de su ω-consistencia, pero sospecho firmemente que es de hecho ω-consistente. Como mostraremos en el apartado siguiente, las formas habituales de demostrar la ω-inconsistencia no pueden aplicarse.

cuestión presentaré ahora una serie de restricciones a las valuaciones sobre las que se caracteriza la noción de validez.

Una característica muy extraña de $\mathcal{NDL}^+_\infty$ es que un condicional podría no obtener el valor 0, incluso si su antecedente obtiene el valor 1 y su consecuente el valor 0. Una manera muy simple de evitar esto es mediante la imposición de la restricción siguiente:

Definición (Valuaciones semiclásicas) Una valuación v en una matriz $\mathcal{M}$ es *semiclásica* si y sólo si para cualquier par de fórmulas ϕ_1 y ϕ_2, si $v(\phi_1)$ y $v(\phi_2)$ están ambas en $\{0, 1\}$, entonces $v(\phi_1 \to \phi_2) = v(\neg\phi_1 \vee \phi_2)$.

Llamaré a esta teoría $\mathcal{NDL}^+_\infty(S)$, ya que es la teoría de Łukasiewicz infinitamente valuada no determinista con un predicado de verdad transparente sobre *valuaciones semiclásicas*. Con esta nueva restricción obtenemos varias inferencias que eran inválidas en $\mathcal{NDL}^+_\infty$ (ofreceré ejemplos más abajo).

Esta no es la única característica extraña de $\mathcal{NDL}^+_\infty$. Consideremos dos condicionales $\phi_1 \to \phi_2$ y $\phi_3 \to \phi_4$ (donde el valor del antecedente es mayor que el valor del consecuente) tal que en $\phi_1 \to \phi_2$ la “distancia” entre ϕ_1 y ϕ_2 es cercana a 0 y en $\phi_3 \to \phi_4$ la “distancia”es cercana a 1. No hay nada hasta el momento que nos impida asignar al primero un valor cercano a 0 y al segundo un valor cercano a 1. Para evitar esta consecuencia poco atractiva, imponemos la siguiente restricción:

Definición (Valuaciones uniformes$_1$) Una valuación v en una matriz $\mathcal{M}$ es *uniforme*$_1$ si y sólo si para cualesquiera fórmulas ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 y ϕ_4 tales que $v(\phi_1) > v(\phi_2)$ y $v(\phi_3) > v(\phi_4)$, si $v(\phi_1) - v(\phi_2) > v(\phi_3) - v(\phi_4)$, entonces $v(\phi_1 \to \phi_2) < v(\phi_3 \to \phi_4)$.

Intuitivamente, esto dice que si consideramos dos enunciados condicionales tales que la diferencia entre el (valor del) antecedente y el (valor del) consecuente en el primer condicional es mayor que la diferencia entre el (valor del) antecedente y el (valor del) consecuente en el segundo, el valor del segundo condicional debe ser mayor que el valor del primer condicional. Por ejemplo, si $v(\phi_1) = .8$, $v(\phi_2) = .6$, $v(\phi_3) = .3$ y $v(\phi_4) = .2$, entonces $v(\phi_1 \to \phi_2) < v(\phi_3 \to \phi_4)$. Llamaré a la teoría resultante $\mathcal{NDL}^+_\infty(U_1)$.

Aún otra característica insatisfactoria de $\mathcal{NDL}^+_\infty$ es la siguiente. Podríamos tener el siguiente par de condicionales: $\top \to \lambda$ y $\lambda \to \bot$. Dado que λ es la oración del mentiroso, su valor será $\frac{1}{2}$ en toda valuación. En consecuencia, su “distancia” de $\top$ es la misma que su “distancia” de $\bot$. Pero no hay nada que impida que una valuación le asigne valores muy diferentes (menores que 1) a estas dos fórmulas. Esta dificultad puede resolverse imponiendo la siguiente condición:

Definición (Valuaciones uniformes$_2$) Una valuación v en una matriz $\mathcal{M}$ es *uniforme*$_2$ si y sólo si para cualesquiera fórmulas ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 y ϕ_4 tales que $v(\phi_1) > v(\phi_2)$ y, $v(\phi_3) > v(\phi_4)$, si $v(\phi_1) - v(\phi_2) = v(\phi_3) - v(\phi_4)$, entonces $v(\phi_1 \to \phi_2) = v(\phi_3 \to \phi_4)$.

Esto dice, informalmente, que si tenemos dos enunciados condicionales tales que la diferencia entre el (valor del) antecedente y el (valor del) consecuente es la misma en ambos, entonces el valor de los condicionales debe ser el mismo. Por ejemplo, si $v(\phi_1) = .8$, $v(\phi_2) = .6$, $v(\phi_3) = .3$ y $v(\phi_4) = .1$, entonces $v(\phi_1 \to \phi_2) = v(\phi_3 \to \phi_4)$. Llamaré a la teoría resultante $\mathcal{ND}Ł^+_\infty(U_2)$.

Introduciré una última restriccion sobre las valuaciones:

Definición (Valuaciones acotadas por debajo) Una valuación v en una matriz $\mathcal{M}$ está *acotada por debajo* si y sólo si para cualesquiera par de fórmulas ϕ_1 y ϕ_2, si $v(\phi_1) > v(\phi_2)$, entonces $v(\phi_1 \to \phi_2) \geq v(\phi_2)$.

Así que si un condicional tiene un valor distinto de 1, su valor tiene que ser mayor que el valor de su consecuente. En otras palabras, un condicional falso no puede ser más falso que su propio consecuente. La teoría resultante es $\mathcal{ND}Ł^+_\infty(B)$[13].

Naturalmente, podría ser deseable imponer estas condiciones de manera simultánea. La teoría más fuerte que podemos obtener en este enfoque es $\mathcal{ND}Ł^+_\infty(SU_{1,2}B)$, en la que todas nuestras restricciones se imponen a la vez[14]. Las cuatro restricciones que he implementado son, a mi modo de ver, bastante naturales y, de hecho, todas ellas se cumplen en $Ł^+_\infty$. Sin embargo, no estoy sosteniendo que no haya otras restricciones plausibles que podrían ser impuestas sin hacer que el condicional se vuelva totalmente determinista[15].

Obsérvese que una valuación para condicionales no verdaderos es aceptable en la teoría $\mathcal{ND}Ł^+_\infty(SU_{1,2}B)$ en caso de que pueda caracterizarse por medio de una función estrictamente decreciente[16] f tal que $f(x) \geq 1 - x$, donde el valor de x está dado por la diferencia entre el valor del antecedente y el valor del consecuente del condicional.

[13]Se me ha señalado que esta última restricción es demasiado fuerte para aquellos condicionales en los que el contenido del antecedente no tiene nada que ver con el contenido del consecuente. Sin embargo, este tipo de preocupación relevantista está fuera de contexto aquí. El condicional de $Ł^+_\infty$ no pretende ser un modelo del razonamiento relevante, y tampoco los condicionales de sus subteorías.

[14]Un enfoque algebraico similar puede encontrarse en [37], capítulo 15.

[15]Una restricción adicional que podría ser impuesta es que las funciones de valuación sean funciones continuas. Sin embargo, no veo una razón de peso para rechazar las funciones de valuación que no cumplan con esta restricción.

[16]Diré que una función f es estrictamente decreciente si y sólo si para todo $x_1, x_2 \in dom f$, $f(x_1) > f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$.

De modo que, a grandes rasgos (y teniendo presente lo ya observado acerca de la inexactitud de este tipo de representaciones) el condicional para esta teoría puede comportarse de cualquiera de las siguientes maneras (entre otras, por supuesto):

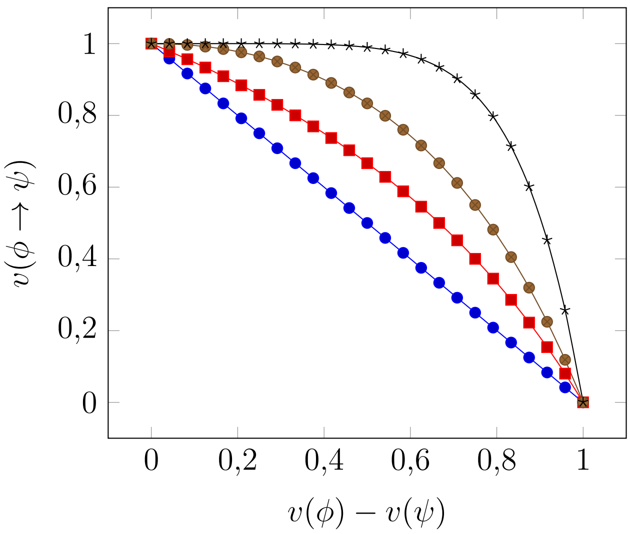

Figura 4.3: el condicional de $\mathcal{NDL}^{+}_{\infty}(SU_{1,2}B)$

Ahora estamos en condiciones de definir la noción de validez para cada una de las teorías que pueden obtenerse imponiendo las restricciones anteriores:

Definición (*Validez*) Un argumento del conjunto de fórmulas Γ a la fórmula ϕ es *válido*$_i$ ($\Gamma \vDash_i \phi$) si y sólo si toda i-valuación v en $\mathcal{M}$ que satisface γ para cada $\gamma \in \Gamma$, también satisface ϕ, donde i puede ser semiclásico, uniforme$_1$, uniforme$_2$, acotada por debajo o cualquier combinación de ellas.[17]

En lo que sigue listaré un conjunto de hechos acerca de estas teorías. Por ejemplo, no es difícil ver que al requerir que todas las valuaciones sean *semiclásicas*, obtenemos:

$\phi \wedge \neg\psi \vDash_{S^+} \neg(\phi \to \psi)$ (regla de la herradura negativa)

[17]La definición también contempla, como siempre, el caso en el que Γ es el conjunto vacío, de modo que aplicamos ambiguamente 'válido' tanto a argumentos como a oraciones.

Si hacemos que todas las valuaciones sean *uniformes*$_1$, las siguientes inferencias pasan a ser válidas:

$\phi \to \psi \vDash_{U_1^+} (\psi \to \chi) \to (\phi \to \chi)$ (transitividad$_1$)
$\phi \to \psi \vDash_{U_1^+} (\chi \to \phi) \to (\chi \to \psi)$ (transitividad$_2$)

También es sencillo verificar que si todas las valuaciones son *uniformes*$_2$, entonces:

$\vDash_{U_2^+} (\neg\psi \to \neg\phi) \to (\phi \to \psi)$ (contraposición)
$\vDash_{U_2^+} (\phi \to \psi) \wedge (\phi \to \chi) \to (\phi \to \psi \wedge \chi)$ ($\wedge$-intro)
$\vDash_{U_2^+} (\phi \to \chi) \wedge (\psi \to \chi) \to (\phi \vee \psi \to \chi)$ ($\vee$-elim)

Finalmente, si las valuaciones son *acotadas por debajo*, obtenemos:

$\vDash_{B^+} \phi \to (\psi \to \phi)$ (debilitamiento positivo fuerte)
$\phi \wedge \psi \to \chi \vDash_{B^+} \phi \to (\psi \to \chi)$ (exportación)

Debe quedar claro que cada restricción impuesta da una noción estrictamente más fuerte de validez. De modo que, cuantas más restricciones imponemos sobre el conjunto de valuaciones, más determinista será el condicional (y también más fuerte). Una imagen aproximada de cómo operan estas restricciones se proporciona en la figura 4.4:

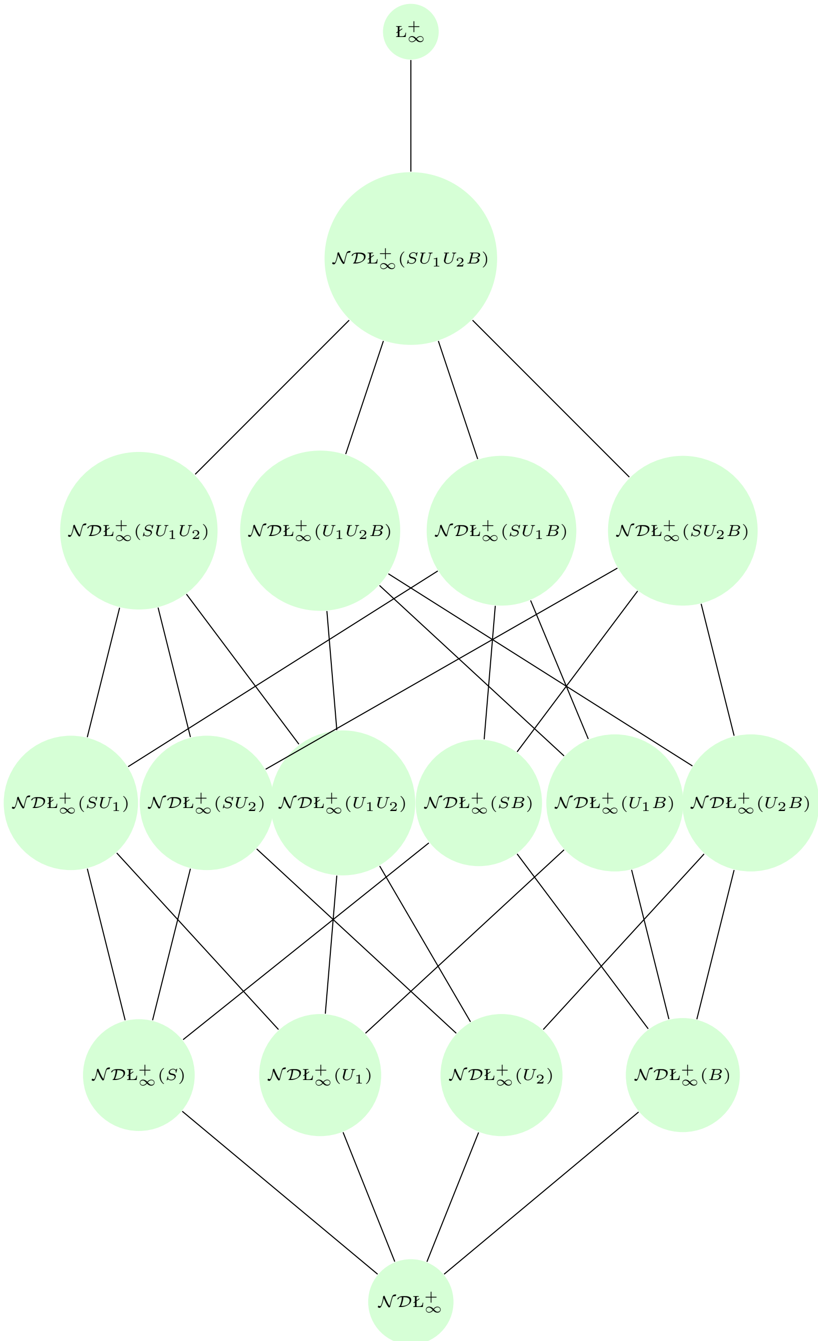

Figura 4.4: todas las teorías.

Una manera de precisar esta idea es utilizar la noción de un $refinamiento$:

Definición (Véase [5]) Una matriz no determista $\mathcal{M}_2 = \langle \mathcal{V}_2, \mathcal{D}_2, \mathcal{O}_2 \rangle$ es un *refinamiento* de una matriz $\mathcal{M}_1 = \langle \mathcal{V}_1, \mathcal{D}_1, \mathcal{O}_1 \rangle$ (en símbolos, $\mathcal{M}_1 \preceq \mathcal{M}_2$) si y sólo si

- $\mathcal{V}_2 \subseteq \mathcal{V}_1$,
- $\mathcal{D}_2 = \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{V}_2$,
- $\diamond^{\mathcal{M}_2}(x_1, ..., x_n) \subseteq \diamond^{\mathcal{M}_1}(x_1, ..., x_n)$ para cada conectiva n-aria $\diamond$ y para todo $x_1, ..., x_n \in \mathcal{V}_1$.[18]

Al imponer cada vez más restricciones sobre el conjunto de valuaciones, obtenemos refinamientos de teorías anteriores. Por ejemplo, lo siguiente se cumple:

$$\mathcal{NDŁ}^+_\infty \preceq \mathcal{NDŁ}^+_\infty(S) \preceq \mathcal{NDŁ}^+_\infty(SU_1) \preceq \mathcal{NDŁ}^+_\infty(SU_{1,2}) \preceq \mathcal{NDŁ}^+_\infty(SU_{1,2}B) \preceq Ł^+_\infty.$$ [19]

En [5], los autores prueban que para cada par de matrices no deterministas $\mathcal{M}_1$ y $\mathcal{M}_2$, si $\mathcal{M}_1 \preceq \mathcal{M}_2$, entonces $\models_{M_1} \subseteq \models_{\mathcal{M}_2}$. De esto se sigue inmediatamente que:

$$\models_{\mathcal{ND}L^+_\infty} \subseteq \models_{S^+} \subseteq \models_{SU^+_1} \subseteq \models_{SU^+_{1,2}} \subseteq \models_{SU_{1,2}B^+} \subseteq \models_{L^+_\infty}.$$

Por supuesto, este es sólo un ejemplo. Todas las formas en que nuestras teorías pueden refinarse unas a otras pueden encontrarse en la figura 4.4. Más específicamente, si hay una flecha ascendente de la teoría $\mathcal{T}_1$ a la teoría $\mathcal{T}_2$, entonces $\mathcal{T}_1 \preceq \mathcal{T}_2$ y por tanto $\models_{\mathcal{T}_1} \subseteq \models_{\mathcal{T}_2}$.

De particular interés es el hecho de que la teoría no determinista más fuerte que he considerado $\mathcal{NDŁ}^+_\infty(SU_{1,2}B)$ es tal que $\models_{SU_{1,2}B^+} \subsetneq \models_{L^+_\infty}$. Más aún, sabemos que $\mathcal{NDŁ}^+_\infty(SU_{1,2}B)$ es una sublógica *propia* de $Ł^+_\infty$, pues por ejemplo $\models_{L^+_\infty} ((\phi \to \psi) \to \psi) \to ((\psi \to \phi) \to \phi)$, pero $\not\models_{SU_{1,2}B^+} ((\phi \to \psi) \to \psi) \to ((\psi \to \phi) \to \phi)$.

Aunque no ofreceré la prueba aquí, el siguiente es un resultado conocido:

Teorema A.2.1 *(Véase [44]) $Ł^+_\infty$ es consistente.*

Puesto que todas las subteorías de $Ł^+_\infty$ serán también consistentes, como corolario podemos inferir que:

Corolario A.2.2 *$\mathcal{NDŁ}^+_\infty(SU_{1,2}B)$ es consistente.*

Naturalmente, también se sigue que todas las subteorías de $\mathcal{NDŁ}^+_\infty(SU_{1,2}B)$ son consistentes.

[18] Como todas las teorías que estamos considerando no difieren en su tratamiento de los cuantificadores, podemos dejarlos de lado en esta definición.

[19] Aunque la definición de refinamiento oficialmente se aplica sólo a matrices no deterministas, la comparación con $Ł^+_\infty$ es legítima, ya que hemos mostrado que toda matriz determinista puede emularse utilizando una matriz no determinista.

A.3. ¿ω-inconsistencia?

¿Qué ocurre con la ω-inconsistencia en estas teorías? La prueba de la ω-inconsistencia de $Ł_\infty^+$ ofrecida por Restall [79] depende de la posibilidad de definir un operador de fusión utilizando el condicional de Łukasiewicz. Pero esto no puede hacerse, al menos no de la misma forma, en el enfoque no determinista que he estado considerando. Restall define un operador de fusión $\circ$ de este modo[20]

$\phi^\circ\psi =_{df} \neg(\phi \rightarrow \neg\psi)$

Él toma a 0 como representando verdad y a 1 como representando falsedad. De modo que 0 es el único valor designado y el condicional se define como una resta restringida: $v(\phi \rightarrow \psi) = v(\psi)\dot{-}v(\phi)$. Esto quiere decir que $v(\phi^\circ\psi) = min(1, v(\phi) + v(\psi))$.

Dado que he estado utilizando a 1 como el único valor designado, el condicional de Łukasiewicz se define así: $v(\phi \rightarrow \psi) = min(1, 1 - v(\phi) + v(\psi))$. Esto quiere decir que $v(\phi^\circ\psi) = 1 - min(1, (1 - \phi) + (1 - \psi))$, lo cual puede simplificarse a

$v(\phi^\circ\psi) = max(0, \psi - (1 - \phi)))$

El aspecto clave del comportamiento de $\circ$ es que para cualquier fórmula ϕ y cualquier valuación v tal que $v(\phi) \neq 1$, hay un número finito n tal que la n-fusión de ϕ consigo misma recibe el valor 0.

$$v(\underbrace{\phi^\circ(\phi^\circ \ldots (\phi^\circ\phi)...))}_{n-veces}) = 0.$$

¿Por qué ocurre esto? Porque, como ya he indicado, $v(\phi^\circ\phi) = max(0, \phi - (1 - \phi))$. Así que $\phi^\circ\phi$ (esto es, $\neg(\phi \rightarrow \neg\phi)$) está diseñado para dar un valor tal que, si $v(\phi) = 1$, entonces $v(\phi^\circ\phi) = 1$; pero si $v(\phi) \neq 1$, entonces $v(\phi^\circ\phi)$ es estrictamente menor que $v(\phi)$. Más aún, si fusionamos $\phi^\circ\phi$ con ϕ, obtenemos una fórmula cuyo valor es estrictamente menor que $v(\phi^\circ\phi)$; y si fusionamos $\phi^\circ(\phi^\circ\phi)$ con ϕ obtenemos una fórmula cuyo valor es estrictamente menor que $v(\phi^\circ(\phi^\circ\phi))$; y así sucesivamente hasta que arribamos a una fórmula cuyo valor es igual o menor que $\frac{1}{2}$. En ese caso, una fusión adicional con ϕ es suficiente para llega a una fórmula cuyo valor es 0.

[20] No debemos confundir este operador con el operador de fusión $\otimes$ que introduciré en capítulos posteriores (si bien hay cierta relación entre ambos).

Utilizando el operador de fusión, Restall construye una secuencia de oraciones S_0, S_1, S_2,... tales que S_0 dice que no toda S_i es verdadera para $i > 0$, y S_{n+1} es la $n+1$-fusión de S_0. Luego muestra, usando un argumento semántico, que Ł$_\infty$ es ω-inconsistente, ya que declara verdadera a S_0 pero también afirma para cada i, que S_i es verdadera. El lector interesado puede ver [80] para más detalles.

Las cosas no son tan simples en el enfoque no determinista que he considerado. Por ejemplo, si intentamos utilizar el condicional, al modo de Restall, para definir un operador de fusión, no obtendremos el resultado deseado. Para ver por qué, consideremos primero la teoría $\mathcal{ND}$Ł$^+_\infty$. Tomemos cualquier fórmula ϕ tal que $\frac{1}{2} < v(\phi) < 1$. Para simplificar, supongamos que $v(\phi) = .8$. Mientras que en Ł$^+_\infty$, $v(\phi \to \neg\phi) = .4$ y luego $v(\neg(\phi \to \neg\phi)) = v(\phi^\circ\phi) = .6$, esta fórmula puede recibir cualquier valor de verdad no designado en $\mathcal{ND}$Ł$^+_\infty$, lo cual significa que su negación también puede recibir cualquier valor no designado. Por lo tanto, la fusión de esta fórmula particular consigo misma no sólo no decrece el valor de verdad, sino que incluso puede tener un valor de verdad mayor. Con lo cual, $^\circ$, definido de esta forma, no funciona en $\mathcal{ND}$Ł$^+_\infty$ como se supone que debería funcionar para ser un operador de fusión. En consecuencia, la presunta ω-inconsistencia de $\mathcal{ND}$Ł$^+_\infty$ no puede probarse utilizando este método.

Esto no debería ser una fuente de sorpresa, ya que $\mathcal{ND}$Ł$^+_\infty$ es una teoría relativamente débil. ¿Qué hay de las teorías más fuertes? Resulta que la situación es más o menos la misma. Consideraré $\mathcal{ND}$Ł$^+_\infty(SU_{1,2}B)$, la teoría no determinista más fuerte que he presentado. Supongamos de nuevo que $\frac{1}{2} < v(\phi) < 1$ y para simplificar sea $v(\phi) = .8$. Esta vez sería incorrecto decir que $\phi^\circ\phi$ puede tomar cualquier valor no designado. Dado que las valuaciones están acotadas desde abajo, $v(\phi \to \neg\phi) \geq .2$, Y luego $v(\phi^\circ\phi) = v(\neg(\phi \to \neg\phi)) \leq .8$[21]. Por ende, $v(\phi^\circ\phi)$ es menor o igual que $v(\phi)$. De hecho, se cumple que para cada fórmula ϕ y cada valuación v que el valor de la n-fusión de ϕ consigo misma es menor o igual que el valor de la $n-1$-fusión de ϕ consigo misma. El problema, por supuesto, es que las restricciones no son suficientes para garantizar que hay un número finito n (o un número infinito, para el caso) tal que la n-fusión de ϕ consigo misma obtenga el valor 0. Es perfectamente posible que el operador de fusión haga decrecer los valores "muy lentamente ", en el sentido de que la aplicación repetida de este operador produzca fórmulas cuyos valores no decrecen, o decrecen pero con un límite distinto de 0.

Una forma diferente de probar la ω-inconsistencia puede encontrarse en [8]. Allí, Bacon ofrece una versión sintáctica del siguiente resultado:

Teorema A.3.1 *(Véase [8]) Cualquier teoría transparente de la verdad ce-*

[21]Las otras condiciones no parecen servir aquí para restringir las valuaciones aún más.

rrada bajo las siguientes reglas es ω-inconsistente:[22]
si $\phi \vDash \psi$*, entonces* $\exists x\phi \vDash \exists x\psi$
$\phi \rightarrow \exists x\psi \vDash \exists x(\phi \rightarrow \psi)$ *(donde x no está libre en ϕ)*

Prueba Véase [8] para la prueba. Aunque su prueba es sintáctica, puede replicarse semánticamente. ∎

De modo que si alguna de las teorías no deterministas que he ofrecido satisface ambos principios, será ω-inconsistente. No obstante, podemos mostrar que la segunda regla no vale en $\mathcal{NDŁ}^{+}_{\infty}(SU_{1,2}B)$ (y *a fortiori* que no vale en ninguna de las teorías más débiles). Pues consideremos una fórmula $\psi(x)$ con (al menos) la variable x libre tal que para ninguna x-variante v' de v se cumpla que $v'(\phi) \leq v'(\psi)$ pero $sup\{v'(\psi)$: v' es una x-variante de $v\} = v(\phi)$. En $Ł^{+}_{\infty}$ esta valuación garantiza la verdad de la premisa y también de la conclusión. Sin embargo, en $\mathcal{NDŁ}^{+}_{\infty}(SU_{1,2}B)$ o cualquiera de las teorías no deterministas más débiles, no hay ninguna garantía de que la conclusión sea verdadera.

Puede haber alguna otra manera de definir el operador de fusión, o de probar la ω-inconsistencia de estas teorías, pero al momento no estoy al tanto de ninguna. Ahora bien, si la ω-inconsistencia no puede probarse para estas teorías, debe ser posible construir modelos estándar para ellas. Sin embargo, no es en absoluto evidente para mí cómo hacer esto. Está claro que no podemos demostrar que existe un modelo estándar definiendo un operador monótono de salto sobre las interpretaciones para el predicado de verdad, como suele hacerse en ciertas teorías multivaluadas. La razón es que el condicional de $\mathcal{NDŁ}^{+}_{\infty}(SU_{1,2}B)$ (al igual que el condicional de $Ł^{+}_{\infty}$) no puede representarse como una operación monótona sobre el conjunto de valores.

Otra estrategia sería utilizar el teorema de punto fijo de Brower, según el cual cada función continua en el conjunto de k-tuplas de números reales en el intervalo $[0, 1]$ tiene un punto fijo. De hecho, en [37], Field utiliza este teorema para demostrar que el fragmento proposicional de $Ł^{+}_{\infty}$ tiene un modelo estándar. Sin embargo, su prueba se aplica sólo a la parte proposicional del lenguaje y depende de que el condicional sea representable por medio de una función continua, algo que ocurre en $Ł^{+}_{\infty}$, pero no en nuestras teorías no deterministas[23].

[22] En realidad, Bacon hace una distinción entre teorías fuertemente ω-inconsistentes y teorías débilmente ω-inconsistentes. Sin embargo, para nuestros propósitos, esta distinción será innecesaria.

[23] Quizás sea posible modificar el condicional de manera que sea una función continua (o más precisamente, una función continua en relación a cada valuación). Pero incluso en ese caso, todavía no está claro si esta estrategia podría aplicarse al lenguaje cuantificacional completo.

A.4. Determinación en las semánticas no deterministas

Ya he mencionado que un problema que afecta a ciertas teorías paracompletas es que carecen de los recursos expresivos para afirmar que ciertas oraciones no son determinadamente verdaderas. Una virtud adicional de $Ł^+_\infty$ es que no tiene este defecto. Su condicional puede utilizarse para definir un operador de determinación razonable:

$D\phi =_{df} \neg(\phi \to \neg\phi)$.

El lector seguramente habrá notado que $D\phi$ es lo mismo que $\phi^\circ\phi$. De modo que en $Ł^+_\infty$ el operador de determinación es solamente un caso particular del operador de fusión.

Ahora bien, en el apartado anterior hemos visto que el operador de fusión no puede utilizarse, al menos no de la manera estándar, para probar la ω-inconsistencia de las teorías no deterministas. Puesto que el operador de determinación es sólo un caso límite del operador de fusión, una preocupación natural es que estas teorías dejen de lado una característica muy atractiva de $Ł^+_\infty$, la capacidad de añadir consistentemente un operador tal y *a fortiori*, la capacidad de expresar la idea de que ciertas oraciones no son determinadamente verdaderas.

Sin embargo, voy a demostrar que no hay ninguna razón para preocuparse. Ya en el capítulo 2, sugerí una serie de condiciones para que un operador de determinación sea *razonable*. Eran las siguientes[24]:

1. Si $v(\phi) = 1$, entonces $v(D\phi) = 1$.
2. Si $v(\phi) \leq v(\neg\phi)$, entonces $v(D\phi) = 0$.
3. Si $0 < v(\phi) < 1$, entonces $v(D\phi) \leq v(\phi)$[25].

[24] En el capítulo 2 utilicé una relación $\preccurlyeq$ sobre el conjunto de valores semánticos para especificar estas condiciones. Ya que ahora nuestro conjunto de valores es el conjunto de los números reales entre 0 y 1, podemos simplemente utilizamos la relación $\leq$. Antes esto no podía hacerse, porque el conjunto de valores sólo estaba parcialmente ordenado.

[25] Como mencioné en el capítulo 2, en [37], p. 235-36, Field coquetea con:
Si $0 < v(\phi) < 1$, entonces $v(D\phi) < v(\phi)$,
la cual es más fuerte y no se cumple en las teorías no deterministas que he considerado, aunque termina usando la condición 3. Para que la versión más fuerte se cumpla, necesitamos reforzar la restricción según la cual las valuaciones están acotadas por debajo imponiendo $v(\phi \to \psi) > v(\psi)$. En cierto sentido, es esto lo que es responsable de la ω-inconsistencia de $Ł^+_\infty$, ya que esto hace que sea posible definir un operador $D^*\phi$ que

4. Si $v(\phi) \leq v(\psi)$, entonces $v(D\phi) \leq v(D\psi)$.

Afortunadamente, podemos mostrar que todas estas condiciones se cumplen para el operador D en $\mathcal{NDL}^+_\infty(SU_{1,2}B)$, la más fuerte de las teorías que hemos estado considerando. Más precisamente,

Teorema A.4.1 (Un operador de determinación) $\mathcal{NDL}^+_\infty(SU_{1,2}B)$ *contiene un operador de determinación D razonable.*

Esquema de prueba Al igual que antes, sea $D\phi$ la fórmula $\neg(\phi \to \neg\phi)$. Está claro que toda valuación v satisface la condición 2. presentada más arriba. Además, si v es *semiclásica*, entonces la condición 1. se cumple, si v está *acotada por debajo*, entonces la condición 3. se cumple, y si v es tanto $uniforme_1$ como $uniforme_2$, entonces la condición 4. también se cumple. Omito los detalles. ∎

Estas propiedades no son solamente atractivas por sí mismas. Una vez que mostramos que D las satisface, podemos probar que D no es idempotente, en el sentido de que a veces $v(D\phi) \neq v(DD\phi)$. Esto es especialmente importante en el caso de oraciones problemáticas del tipo λ_n tal que $v(\lambda_n) = v(\neg D^n Tr\langle\lambda_n\rangle)$, donde D^n quiere decir que el operador D fue iterado n veces. No sólo tenemos $v(D\lambda) = 0$, pero también para cada λ_n tal que λ_n es $\neg D^n Tr\langle\lambda_n\rangle$, podemos probar que $v(D^{n+1}\lambda_n) = 0$. En otras palabras, para cada oración del mentiroso λ_n expresable en el lenguaje, podemos decir en el lenguaje que esa oración no es determinadamente verdadera[26].

A.5. Un comentario sobre el enfoque de Bacon

Finalizaré este apéndice mencionando un enfoque similar explorado recientemente por Bacon en [8]. Bacon considera dos teorías: $BCKN$ y $BCKD$. La teoría BCK contiene los siguientes axiomas para $\to$:
B $(\phi \to \psi) \to ((\chi \to \phi) \to (\chi \to \psi))$

exprese la idea de que ϕ es determinado en todos los ordinales contables. Esto a su vez sería suficiente para definir la negación clásica, pues $v(D^*\phi) \equiv 1$ siempre que $v(\phi) \equiv 1$, y $v(D^*\phi) \equiv 0$, en cualquier otro caso. Sin embargo, hasta donde puedo ver, esta condición no es suficiente para definir la negación clásica en las teorías no deterministas, ya que si $v(\phi) \in (\frac{1}{2}, 1)$, siempre es posible escoger un valor r en $[0, v(\phi))$ para $D^*\phi$. De modo que si λ_* es la oración $\neg D^*\lambda_*$, pueden existir valuaciones v tales que $v(\lambda_*) \equiv v(\neg D^*\lambda_*) \in (\frac{1}{2}, 1)$. Le agradezco a un referí anónimo de la revista *Studia Logica* por sugerirme que añada esta nota.

[26] Remito al lector a [37] o a las observaciones del capítulo 2 para que vea cómo este resultado puede generalizarse a ordinales transfinitos.

C $(\phi \to (\psi \to \chi) \to (\psi \to (\phi \to \chi))$
K $\phi \to (\psi \to \phi)$
Si añadimos el axioma N, obtenemos la teoría $BCKN$:
N $((\phi \to \bot) \to \bot) \to \phi$.
Y si añadimos el axioma de linealidad, obtenemos la teoría $BCKD$:
D $(\phi \to \psi) \vee (\psi \to \phi)$.

$BCKN$ tiene modelos en los que el espacio de valores no está linealmente ordenado, de modo que este aspecto puede explotarse para mostrar que $\phi \to \exists x\psi \nvDash \exists x(\phi \to \psi)$. Pero como aquí no estoy considerando matrices no linealmente ordenadas, ignoraré esta teoría. En el caso de $BCKD$, la presencia del axioma de linealidad garantiza que la teoría es verdadera sólo en espacios de valores linealmente ordenados. En particular, Bacon considera la siguiente definición semántica para el condicional de $BCKD$:

$$v(\phi \to \psi) = \begin{cases} 1 & \text{si } v(\phi) \leq v(\psi) \\ v(\psi) & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Luego pasa a mostrar que la inferencia que va de $\phi \to \exists x\psi$ a $\exists x(\phi \to \psi)$ falla para el condicional de $BCKD$. Sin embargo, esta inferencia falla sólo porque estamos considerando modelos que no son compatibles con un predicado de verdad transparente. Pues consideremos otra vez la oración de Curry δ (recordemos que δ es $Tr\langle\delta\rangle \to \bot$). Es sencillo ver que no es posible asignar consistentemente un valor de verdad a δ si utilizamos la definición de arriba. En el caso de las teorías no deterministas que he considerado, no hay un problema análogo. La paradoja de Curry se bloquea ya que toda oración de Curry recibe consistentemente un valor de verdad no designado, y por tanto la trivialidad se evita.

Con todo, no hemos respondido concluyentemente a la pregunta inicial. ¿Son estas teorías ω-consistente? Mi conjetura es que lo son, pero ciertamente es necesario dar con una prueba de su ω-consistencia[27].

[27]Otra pregunta abierta es la de si estas teorías no deterministas poseen una axiomatización completa. Si este fuera el caso, tendríamos un fuerte argumento a favor de estas teorías. No obstante, esta cuestión no es para nada obvia. Por ejemplo, es sencillo mostrar que $Ł^{+}_{\infty}$ no es una lógica compacta y que, como consecuencia, no es axiomatizable (una prueba de esto puede encontrarse en [73], p. 240, ejercicios 8-9). Sin embargo, la prueba más directa de este hecho depende de la posibilidad de usar el condicional para definir un operador de *fisión* -dual al operador de fusión-, algo que no puede hacerse de la forma usual con los condicionales no deterministas. Le agradezco a un evaluador anónimo de la revista *Studia Logica* por sugerir esta idea.

Parte III

Enfoques subestructurales

Capítulo 5

Teorías no transitivas

5.1. La regla de corte y la distinción estricto-tolerante

La mayoría de las relaciones de consecuencia son transitivas, entre ellas la relación de consecuencia clásica. Desde un punto de vista semántico, la transitividad se sigue del hecho de que la relación de consecuencia está definida como preservación de verdad o como preservación de algún (algunos) valor(es) designado(s). Esto nos permite concatenar argumentos. Si ϕ implica ψ y ψ implica χ, entonces estamos en condiciones de inferir que ϕ implica χ.

La transitividad ha sido considerada a veces como una propiedad constitutiva de la noción de consecuencia. Por ejemplo, Anderson y Belnap sostienen que ([1], p.154):

> Any criterion according to which entailment is not transitive is *ipso facto* wrong. It seems in fact incredible that anyone should admit that B follows from A, and that C follows from B, but feel that some further argument was required to establish that A entails C. What better argument for $A \to C$ could one want?

En muchos sistemas, la idea de que la relación de consecuencia es transitiva se expresa por medio de la regla de corte:

$$corte \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \phi \qquad \phi, \Pi \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}$$

La regla de corte es eliminable en la lógica clásica (y en muchos otros sistemas). El teorema de eliminación de corte probado por Gentzen (su *Hauptsatz*) muestra constructivamente cómo tomar cualquier prueba que contenga una aplicación de corte y transformarla en una prueba donde corte no se aplica. Por ende, todo secuente que tenga una prueba en la lógica clásica, tiene una prueba en la que no se utiliza la regla de corte.

Con todo, una vez que consideramos lenguajes más ricos, la eliminabilidad de corte dependerá de las características del vocabulario específico que está siendo utilizado, o al menos esto es lo que los defensores del enfoque no transitivo sostienen. En este sentido, la regla de corte es correcta si nos restringimos a un lenguaje puramente lógico (i.e. un lenguaje que contenga solamente $\neg, \vee, \exists$, etc. como constantes), pero falla si consideramos, por ejemplo, un lenguaje que contenga predicados vagos, conjuntistas o semánticos, entre otros[1].

Sé de tres propuestas que evitan las paradojas semánticas rechazando la regla de corte: la propuesta de Alan Weir en [108], la de Neil Tennant en [105], y la de Dave Ripley en [87] y [88]. En este capítulo sólo voy a considerar la tercera[2].

Las razones de Ripley para rechazar la regla de corte tienen que ver con la teoría bileteralista del significado (véase por ejemplo [83]) que defiende. El bilateralismo es una forma de inferencialismo en la cual el significado se explica en términos de condiciones de aserción *y negación*[3]. La negación es un acto de habla primitivo, al igual que la aserción, de modo que no debe ser entendido necesariamente en términos de la aserción de una oración negada. Un secuente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ debe entenderse entones como la afirmación de que es incoherente asertar todas las oraciones de Γ y al mismo tiempo negar todas las oraciones de Δ[4]. Luego, $\Rightarrow$ se explica en términos de ciertas restricciones sobre las aserciones y las negaciones que estamos en condiciones de realizar.

Esto puede aplicarse a las (meta)inferencias lógicas habituales de una forma muy natural. Por ejemplo, consideremos las reglas para la negación clásica:

$$\text{L}\neg\,\frac{\Gamma \Rightarrow \phi, \Delta}{\Gamma, \neg\phi \Rightarrow \Delta} \qquad\qquad \text{R}\neg\,\frac{\Gamma, \phi \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \neg\phi, \Delta}$$

Si ignoramos a Γ y a Δ, la primera regla expresa la idea de que es incoherente asertar $\neg\phi$ siempre que sea incoherente negar ϕ, y la segunda regla

[1]Para ver en qué sentido el rechazo de la propiedad de transitividad puede ayudar con la paradojas de Sorites, véase [27], para entender cómo puede ayudar con las paradojas conjuntistas, véase [86].

[2]Creo que hay buenas razones, además de la falta de espacio, para hacer esto. La propuesta de Ripley parece más desarrollada que las otras dos propuestas en varios aspectos.

[3]En esta sección hablaré de aserción y negación en lugar de aceptación y rechazo simplemente para mantenerme fiel a la presentación de Ripley.

[4]Tomaré aquí 'coherente' como una noción primitiva.

expresa la idea de que es incoherente negar $\neg\phi$ siempre que sea incoherente asertar ϕ. Las demás reglas operacionales de la lógica clásica pueden interpretarse de forma similar.

¿Qué hay de las reglas estructurales? Las reglas de monotonía, contracción (siempre que Γ y Δ sean conjuntos) y reflexividad no presentan complicaciones. La regla de corte, sin embargo, es diferente. Una vez más, haciendo caso omiso de Γ y Δ, corte expresa la idea de que si es incoherente negar ϕ y es incoherente asertar ϕ, ya estamos en una situación incoherente. Pero, ¿es esto así? Pues bien, esto podría ser cuestionado. Podría ser incoherente tanto afirmar como negar ϕ, sin que la situación en la que nos encontremos sea ya incoherente. Es sólo que ϕ puede ser, tal vez, una oración (extraña) que no es asertable ni negable.

De acuerdo con el defensor del enfoque no transitivo, esto es, de hecho, lo que ocurre con la oración del mentiroso y con otras oraciones paradójicas. Si bien es incoherente negar λ ($\Rightarrow \lambda$) y es incoherente afirmar λ ($\lambda \Rightarrow$), no se sigue que toda situación sea incoherente ($\Rightarrow$). En otras palabras, λ no es (totalmente) asertable ni (totalmente) negable, pero esto no implica trivialidad, así que corte falla para λ.

Algo similar puede decirse de la oración de Curry κ. Aunque es incoherente negar $Tr\langle\kappa\rangle$ ($\Rightarrow Tr\langle\kappa\rangle$) y es incoherente asertar $Tr\langle\kappa\rangle$ y al mismo tiempo negar ϕ, para cualquier ϕ ($Tr\langle\kappa\rangle \Rightarrow \phi$), de estas dos cosas no estamos autorizados a inferir que es incoherente negar cualquier oración ϕ ($\Rightarrow \phi$). De modo que corte falla también para κ.

Por supuesto, en cierta forma, el enfoque no transitivo es tanto paracompleto como paraconsistente. Es paracompleto en el sentido de que puede probar $\phi \vee \neg\phi \Rightarrow$ para algunas oraciones ϕ, y es paraconsistente ya que puede probar $\Rightarrow \phi \wedge \neg\phi$ para ciertas oraciones ϕ. No obstante, también está claro en qué sentido este enfoque difiere de los enfoques paracompletos y paraconsistentes. En las teorías paracompletas (no paraconsistentes) es incoherente asertar λ ($\lambda \Rightarrow$) y también es incoherente asertar $\neg\lambda$ ($\neg\lambda \Rightarrow$). Esto porque se rechaza la (meta)regla L$\neg$, es decir, aún cuando rechacemos λ, su negación puede no ser asertable. En las teorías paraconsistentes (no paracompletas) es incoherente negar λ ($\Rightarrow \lambda$) y es incoherente negar también la negación de λ ($\Rightarrow \neg\lambda$). Esto se debe a que en dichas teorías se rechaza la (meta)regla R$\neg$, es decir, aún si asertamos λ, su negación puede no ser rechazada. Sin embargo, en el enfoque no transitivo, es incoherente asertar o negar λ, y también es incoherente asertar o negar $\neg\lambda$. Tanto L$\neg$ como R$\neg$ son (meta)reglas válidas. La trivialidad se evita rechazando la regla de corte.

Ahora bien, si las oraciones paradójicas como λ no son asertables ni negables, ¿qué actitud debe el teórico no transitivo adoptar hacia ellas? Aquí es donde la distinción estricto-tolerante (véase el capítulo 1) juega un papel.

Mientras que es usual reconocer dos tipos de actos de habla, la aserción y la negación, en este enfoque hay dos formas de aserción y dos formas de negación: la aserción (negación) estricta y la aserción (negación) tolerante. La aserción (negación) estricta es más fuerte que la aserción (negación) tolerante. Las oraciones paradójicas no pueden ser *estrictamente* asertadas ni *estrictamente* negadas, pero pueden ser tanto *tolerantemente* asertadas como *tolerantemente* negadas. La distinción nos da una forma nueva y más sofisticada de entender $\Rightarrow$. Un secuente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ se cumple si y sólo si es incoherente asertar *estrictamente* todas las las oraciones de Γ y al mismo tiempo negar *estrictamente* todas las oraciones de Δ (equivalentemente, si es coherente negar *tolerantemente* alguna oración de Γ y al mismo tiempo asertar *tolerantemente* alguna oración de Δ).

En este marco teórico, podemos entender mejor por qué falla la regla de corte. Mientras que las fórmulas no pueden asertarse estrictamente y al mismo tiempo negarse estrictamente, a veces pueden asertarse y negarse tolerantemente.

5.2. Sistemas no transitivos: semántica y teoría de la prueba

5.2.1. Semántica

El enfoque no transitivo que consideraremos ofrece una manera diferente de utilizar modelos Kleene-Kripke para definir una lógica de la verdad. La clave es usar diferentes estándares para las premisas y las conclusiones en la definición de validez. A grandes rasgos, diremos que un conjunto de fórmulas Δ se sigue de un conjunto de fórmulas Γ si cada vez que todas las premisas Γ valen de acuerdo a cierto estándar, los miembros de Δ valen de acuerdo a otro estándar (más débil).

En particular, para hacer frente a las paradojas semánticas, es útil concentrarse en la relación de consecuencia estricta-tolerante y trivaluada $\vDash_{ST^+}$ (véase [27], [26], [25], [88] y [87]). En este enfoque la relación de consecuencia va de un conjunto de premisas estrictamente verdaderas (es decir, cada premisa toma el valor 1) a un conjunto de conclusiones tolerantemente verdaderas (es decir, al menos una conclusión no toma el valor 0). Más formalmente:

Consecuencia estricta-tolerante Diré que Δ *es una consecuencia estricta-tolerante de* Γ (i.e. $\Gamma \vDash_{ST^+} \Delta$) si y sólo si para toda valuación v, si $v(\gamma) = 1$ para cada $\gamma \in \Gamma$, entonces $v(\delta) > 0$ para alguna $\delta \in \Delta$.

Por lo tanto, un contramodelo de un argumento cuyo conjunto de premisas es Γ y cuyo conjunto de conclusiones es Δ es un modelo que asigna 1 a cada miembro de Γ y 0 a cada miembro de Δ (igual que un contramodelo clásico).

Dado que queremos discutir un predicado veritativo transparente, los modelos de ST^+, al igual que los de K_3^+ y LP^+, respetan el requisito de transparencia:

- Para toda valuación v, $v(T\langle\phi\rangle) = v(\phi)$

Una forma alternativa de entender la diferencia entre ST^+ y las lógicas K_3^+ y LP^+ es la siguiente: en las presentaciones típicas de las lógicas multivaluadas, la falsedad y la no-verdad no coinciden. En K_3^+ la noción de validez se basa en la preservación de verdad estricta, y en LP^+ se basa en la preservación de verdad tolerante. K_3^+ y LP^+ son lógicas diferentes debido a que en la caracterización semántica de estas lógicas escogemos valores designados distintos. En ST^+ la noción de validez ya no se define como la preservación de algún valor de verdad designado de las premisas a las conclusiones (o de las conclusiones a las premisas), sino más bien como un debilitamiento de estándar al pasar de las premisas a las conclusiones.

Es fácil ver que ST^+ es, en cierto sentido, una lógica más fuerte que K_3^+ y que LP^+: cualquier contramodelo de ST^+ es también un contramodelo de K_3^+ y un contramodelo de LP^+, pero hay contramodelos de K_3^+ y contramodelos de LP^+ que no son contramodelos de ST^+. Según [26], P.841:

> the key advantage of our approach, from which a number of other advantages will follow, lies in its keeping to classical logic.

De hecho, si consideramos el fragmento de $\mathcal{L}$ libre de $Tr(x)$, ST^+ coincide exactamente con la lógica clásica (más los nombres que hemos añadido para referirnos a las oraciones). Un argumento del conjunto de premisas Γ al conjunto de conclusiones Δ es válido en ST^+ si es válido en CL. Luego, ST^+ captura la noción clásica de validez. Más aún, ST^+ extiende conservativamente CL: las únicas diferencias aparecen con aquellos argumentos que involucran al predicado veritativo.

Teorema 5.2.1 (Conservatividad, [87]) *Para cualquier* $\Gamma, \Delta \subseteq \mathcal{L}$, $\Gamma \vDash_{ST} \Delta$ *si y sólo si* $\Gamma \vDash_{ST^+} \Delta$.

Para el lenguaje extendido, las cosas cambian. Por ejemplo, $\lambda \wedge \neg\lambda$ es una oración válida en ST^+, mientras que, por supuesto, ninguna contradicción puede ser clásicamente válida. De hecho, podemos probar el siguiente resultado más general en este enfoque:

Teorema 5.2.2 (Sustitución uniforme en $\mathcal{L}$, [87]) *Si* $\Gamma \vDash_{ST} \Delta$ *y* $\Gamma \cup \Delta \subseteq \mathcal{L}$*, entonces* $\Gamma^* \vDash_{ST^+} \Delta^*$*, donde * es cualquier sustitución uniforme (de fórmulas abiertas por predicados, evitando los conflictos habituales que pueden generarse con las variables ligadas siempre que sea necesario) sobre* $\mathcal{L}^+$*.*

Esto significa que tercero excluido, explosión, *modus ponens*, y otros principios clásicamente válidos que otros enfoques rechazan para evitar las paradojas pueden mantenerse aquí. El primer resultado nos garantiza que estos principios valen para aquellas inferencias que no involucran a $Tr(x)$, mientras que el segundo resultado nos garantiza que dichos principios valen para aquellas inferencias que sí involucran $Tr(x)$.

5.2.2. Teoría de la prueba

Hay diferentes procedimientos de prueba disponibles para ST^+. Al igual que con K_3^+ y LP^+, podemos establecer un cálculo de secuentes de dos lados o un cálculo de secuentes de tres lados. El primero es muy fácil de caracterizar. Consiste en todas las reglas operacionales de CL, todas sus reglas estructurales *excepto por la regla de corte*, y las reglas para el predicado de verdad. Como ya señalé, una vez que las reglas para la verdad están disponibles, corte deja de ser una regla redundante. De hecho, al añadir corte, la teoría se vuelve trivial.

Uno de mis objetivos en este capítulo es comparar ST^+ con LP^+ utilizando sus respectivos sistemas de prueba. Por esta razón, prefiero presentar ST^+ usando secuentes de tres lados, ya que (como se señaló en el apartado 2.2.2) esta tarea es más fácil si ambas lógicas están presentadas de esta manera. En [87] Ripley ofrece dos procedimientos de prueba para ST^+, uno basado en la lectura disyuntiva y el otro en la lectura conjuntiva negativa. Una vez más, sólo voy a considerar aquí la versión disyuntiva. Sin embargo, el lector debe tener en cuenta que modificando adecuadamente las definiciones correspondientes, una versión del resultado se obtendrá a continuación puede probarse para el otro sistema de Ripley también (por desgracia, fundamentar esta afirmación tomaría demasiado espacio).

Consideremos una vez más el sistema de prueba $\mathcal{S}^+$, presentado en la sección 2.2.2. He utilizado este sistema para proporcionar un procedimiento de prueba tanto para K_3^+ como para LP^+. Ahora voy a utilizarlo para ofrecer un procedimiento de prueba para ST^+. Hemos visto cómo es posible dar distintas definiciones de validez sintáctica para el sistema $\mathcal{S}^+$. En el caso de ST^+, usamos la siguiente definición:

Definición (*Validez sintáctica para* ST^+) Un argumento del conjunto Γ al conjunto Δ es *sintácticamente válido en* ST^+ (en símbolos, $\Gamma \vdash_{ST^+} \Delta$) si el secuente $\Gamma|\Gamma, \Delta|\Delta$ tiene prueba en $\mathcal{S}^+$.

Ahora bien, una aparente fuente de perplejidad es que ST^+ es una teoría no transitiva, pero el sistema de $\mathcal{S}^+$ contiene la regla de corte. No sólo eso, hemos visto que esta regla es no redundante en $\mathcal{S}^+$. Entonces, ¿cómo puede ser eso? Pues bien, a pesar de que corte y transitividad sean más o menos la misma cosa en un cálculo de secuentes de dos lados, esto no es el caso para secuentes de tres lados. En palabras de Ripley ([87]):

> (...) three-sided consequence is the "real" target system, revealing the full structure of the constraints on strict and tolerant assertion, and the two-sided consequences are just slices that reveal various aspects of this structure. So the whole thing can be "transitive" (in its way) even when some part of it is not transitive (in the usual way).

En otros términos, en $\mathcal{S}^+$ la regla de corte vale, pero no siempre es el caso que si $\Gamma \vdash_{ST^+} \phi, \Delta$ y $\Pi, \phi \vdash_{ST^+} \Sigma$ ambos se cumplen, entonces $\Gamma, \Pi \vdash_{ST^+} \Delta, \Sigma$ también se cumple.

5.3. Ventajas

ST^+ posee varias característica interesantes, algunas de las cuales no son compartidas por las lógicas no subestructurales que hemos considerado. En primer lugar, el predicado de verdad es totalmente transparente en ST^+. Para toda fórmula ϕ, podemos reemplazar ϕ por $Tr\langle\phi\rangle$ y viceversa dentro de cualquier fórmula sin alterar su estatus semántico. Por otra parte, el esquema T vale también:

para toda fórmula ϕ se da que $\vDash_{ST^+} Tr\langle\phi\rangle \equiv \phi$

La diferencia con las teoría no subestructurales de la verdad es que esto es posible sin invalidar inferencias clásicamente válidas. Es decir, por cada inferencia clásicamente válida $\Gamma \vDash_{CL} \Delta$, se cumple que $\Gamma \vDash_{ST^+} \Delta$. En este sentido, el enfoque estricto-tolerante es único. Aunque algunas de las otras teorías que he examinado también tienen un predicado de verdad ingenuo y transparente, todas ellas tienen que renunciar a algunas inferencias clásicamente válidas para evitar la trivialidad.

Otra característica interesante de ST^+ es que la noción de validez se define de una manera que hace que la introducción de un nuevo condicional sea innecesaria. Hemos visto que los defensores de K_3^+ y LP^+ deben introducir un nuevo condicional en sus teorías. La introducción de dicho condicional suele requerir una gran cantidad de maquinaria técnica, como secuencias de revisión, mundos anormales, o matrices no deterministas. En ST^+, nada de esto es necesario. El condicional puede definirse de la forma habitual mediante la negación y la disyunción:
$\phi \supset \psi =_{df} \neg\phi \vee \psi$.
Por otra parte, ninguna de las teorías que hemos visto puede tener un condicional que satisfaga el teorema de deducción. La razón es simple. Esperamos que el condicional cumpla con la regla de *modus ponens*. Pero si el teorema de la deducción se cumple, entonces el condicional también satisface la ley de *pseudo modus ponens*, que junto con la regla de *modus ponens* causa problemas (siempre que la lógica sea no subestructural). ST^+, sin embargo, no tiene esa limitación. El condicional es totalmente clásico y el teorema de deducción vale, es decir
$\Gamma, \phi \vDash_{ST^+} \psi, \Delta$ si y sólo si $\Gamma \vDash_{ST^+} \phi \supset \psi, \Delta$.

La clasicidad del condicional de ST^+ produce inmediatamente otra ventaja aparente. El condicional puede utilizarse para formalizar oraciones que involucran cuantificadores restringidos. Esto contrasta marcadamente con las teorías paracompletas y paraconsistentes, donde tenemos que introducir dos nuevos condicionales, uno para representar oraciones de la forma *si ϕ, entonces ψ*, y otro para representar oraciones de la forma *todos los ϕs son ψs*. Una vez más, nada similar es necesario en el enfoque estricto-tolerante.

Otra ventaja obvia de este enfoque que aún no he mencionado es que puede hacer frente a la paradoja de la validez. La paradoja es un problema únicamente si la regla de corte está disponible. Esto significa que en este enfoque es posible introducir un predicado de validez que satisfaga tanto LVal y RVal sin que la teoría sea trivial. Como ya sugerí, la paradoja de la validez pone a los defensores de las teorías paracompletas y paraconsistentes en una situación incómoda, ya que no involucra ninguna regla operacional. Así que sea cual fuera la respuesta ofrecida por los partidarios de las teoría paracompletas y paraconsistentes a esta paradoja, la respuesta será sustancialmente diferente del tipo de respuesta que ofrecen a la hora de abordar paradojas operacionales como la del mentiroso y la de Curry.

Este último aspecto de las teorías no transitivas me lleva a la ventaja final que voy a mencionar. El enfoque estricto-tolerante nos permite abordar paradojas muy diferentes de una manera uniforme. La paradoja del mentiroso, la paradoja de Curry, la paradoja de la Validez y muchas otras (¿todas?)

dependen de la regla de corte. En palabras de Ripley ([89]):

> To narrow down our list of suspects, it makes sense to ask: Who was at every one of the crime scenes? Using this method, logical vocabulary all comes out in the clear. It's not negation; he was out of town when the curries happened. It's not the conditional; she was nowhere near the liars (assuming, anyway, that negation isn't just the conditional with a false moustache on). But truth comes out in the clear too: it's got a solid alibi for the russells, the Hinnion-Liberts, and the validity curries (as well as knowers and Montagues). In fact, there are only two characters that turn up at all of the crime scenes: contraction and transitivity (...)

En otro trabajo, discutiendo también los enfoques no transitivos y no contractivos, Ripley afirma (véase [85]):

> Rather than rushing from paradox to paradox making ad hoc modications, these substructural approaches grapple with the paradoxes where they live: in the basic features of argumentation. This way, they can avoid having to worry about rules governing particular pieces of vocabulary; in a single fell swoop they address liars, curries, validity curries, Hinnion-Liberts, and so on.

5.4. Inferencias y metainferencias

A pesar de todas estas aparentes ventajas, con el fin de evitar la trivialidad, la noción de consecuencia de ST^+ tiene que perder algunas de las propiedades tradicionales vinculadas a las metainferencias. Las metainferencias son principios *acerca* de la relación de consecuencia. Es importante tener claro la diferencia entre una inferencia y una metainferencia. Una inferencia establece que existe una cierta relación entre conjuntos de fórmulas (o entre un conjunto de fórmulas y una fórmula). Un metainferencia, en cambio, es una propiedad de clausura sobre el conjunto de inferencias (véase [87], p. 354).

Las siguientes metainferencias se cumplen en ST^+:

- Si $\Gamma \vDash \Delta$, entonces $\Gamma, \Gamma' \vDash \Delta, \Delta'$ (monotonía).
- Si $\Gamma, \phi, \phi \vDash \Delta$, entonces $\Gamma, \phi \vDash \Delta$, y si $\Gamma \vDash \phi, \phi, \Delta$, entonces $\Gamma \vDash \phi, \Delta$ (contracción estructural).
- $\Gamma, \phi \vDash \psi, \Delta$ si y sólo si $\Gamma \vDash \phi \supset \psi, \Delta$ (teorema de la deducción).

- $\Gamma \vDash \Delta$ si y sólo si $\bigwedge \Gamma \vDash \bigvee \Delta$ (Juntar premisas, juntar conclusiones).
- Si $\Gamma, \phi \vDash \Delta$ y $\Gamma, \psi \vDash \Delta$, entonces $\Gamma, \phi \vee \psi \vDash \Delta$ (prueba por casos).

Sin embargo, no todas las metainferencias que valen en la lógica clásica siguen valiendo en ST^+. La primera que mencionaré es la transitividad. Hay fórmulas ϕ, ψ y χ tales que $\phi \vDash_{ST^+} \psi$ y $\psi \vDash_{ST^+} \chi$, pero $\phi \nvDash_{ST^+} \chi$. Por ejemplo, consideremos nuevamente la oración λ. Esta oración recibe el valor $\frac{1}{2}$ en todo modelo de ST^+. Dado que en ST^+ los contramodelos van del valor 1 al valor 0, no hay ningún contramodelo para el argumento que va de $\top$ a λ (ya que $\top$ tiene el valor 1 en todo modelo); por ende, $\top \vDash_{ST^+} \lambda$. De la misma forma, no hay ningún contramodelo para el argumento que va de λ a $\bot$ (ya que $\bot$ tiene el valor 0 en todo modelo); por tanto, $\lambda \vDash_{ST^+} \bot$. Sin embargo, existe un contramodelo para el argumento que va de $\top$ a $\bot$. En consecuencia, $\top \nvDash_{ST^+} \bot$. Luego, $\vDash_{ST^+}$ no es una relación transitiva. Por supuesto, debemos ser justos. Es precisamente porque transitividad falla en estos casos que ST^+ puede evitar la paradoja del mentiroso y paradojas similares.

La falla de transitividad implica, dado que vale el teorema de la deducción, que la siguiente versión de *modus ponens* debe fallar también. Supongamos que tenemos las siguientes oraciones válidas: ϕ y $\phi \supset \psi$. En este enfoque no se sigue que ψ sea también una oración válida. Pues consideremos el caso en que ϕ es λ y ψ es $\bot$.

La siguiente versión de *modus tollens* también falla: aún si $\neg\psi$ y $\phi \supset \psi$ son oraciones válidas, no se sigue que $\neg\phi$ sea también una oración válida (un contraejemplo es aquél en el que ψ es λ y ϕ es $\top$). Más aún, explosión, silogismo disyuntivo, y ciertas versiones de *reductio* tampoco valen en este enfoque.

Obsérvese que todas estas metainferencias son *inferencias* inválidas en LP^+. De modo que parece haber cierta similitud entre las inferencias de LP^+ y las metainferencias de ST^+. Sin embargo, mientras que la noción de validez de LP^+ es muy clara, los aspectos no estándar del concepto de validez de ST^+ hacen que sea difícil entender exactamente qué metainferencias se cumplen en esta lógica. Más abajo argumentaré que el conjunto de metainferencias correctas de ST^+ puede ser entendido como el conjunto de inferencias válidas de LP^+.

Hay otra idea interesante que está relacionada con el concepto de metainferencia. Informalmente, se dice que un argumento es *externamente válido en relación con una teoría $\mathcal{T}$* si el resultado de añadir las premisas del argumento como axiomas a $\mathcal{T}$ es suficiente para demostrar como teoremas las conclusiones del argumento (ofreceré una definición rigurosa más adelante). Para la lógica clásica no hay diferencias entre la validez y la validez externa. Cada argumento válido “a secas” es externamente válido y viceversa. Resulta que para lógicas subestructurales como ST^+ estas dos nociones ya no coinciden. Aunque todos los argumentos clásicamente válidos son válidos en ST^+, no es el caso que todos los argumentos clásicamente válidos sean externamente válidos de acuerdo a ST^+. Por otra parte, vamos a demostrar que el conjunto de argumentos externamente válidos en ST^+ es exactamente el conjunto de argumentos válidos en LP^+.

Argumentaré que estos hechos pueden usarse para mostrar que, en cierto sentido, ST^+ es similar a LP^+. Es más, argumentaré que debido a esto, algunas de las ventajas que he atribuido en la sección anterior a ST^+ son sólo aparentes. En general, cualquiera de las debilidades usualmente atribuidas a LP^+ son, de cierta forma, debilidades de ST^+ también.

Las siguientes tres subsecciones están estructuradas como sigue. En la próxima subsección, ofreceré una prueba de que el conjunto de metainferencias que se cumplen en ST^+ coincide con el conjunto de inferencias válidas en LP^+. Por lo tanto, diré que hay un sentido en que la noción de consecuencia de ST^+ es la misma que la de LP^+. Después de esto, introduciré la noción de lógica externa y utilizaré el cálculo de secuentes de tres lados para ofrecer una prueba de que la lógica externa de ST^+ es LP^+. Luego, introduciré algunas consideraciones conceptuales en contra de ST^+ que pueden extraerse de las dos subsecciones previas.

5.4.1. LP^+ y las metainferencias de ST^+

En esta sección ofreceré una prueba de que, en cierto sentido, la ‘lógica’ de las metainferencias de ST^+ es simplemente la lógica LP^+. Con este fin, primero introduciré la siguiente definición:

Definición (*Metainferencia*) Diré que una *metainferencia* de ST^+ es una afirmación de la forma:
Si $\Gamma_1 \vDash_{ST^+} \Delta_1, ..., \Gamma_n \vDash_{ST^+} \Delta_n$, entonces $\Gamma \vDash_{ST^+} \Delta$.[5]

Es importante entender bien qué cosas *no* son metainferencias. Por ejemplo, la afirmación ‘si $p \vDash_{ST^+} q$, entonces $p \vDash_{ST^+} p \vee q$’ (donde p y q son fórmulas atómica) no es una metainferencia, sino una instancia de la metainferencia ‘si $\phi \vDash_{ST^+} \psi$, entonces $\phi \vDash_{ST^+} \phi \vee \psi$’. Una metainferencia es una afirmación general que nos indica que si ciertos *tipos* de inferencias valen, entonces otro *tipo* de inferencia también vale.

[5] Asumiré que Γ y Δ son conjuntos finitos.

Argumentaré que cada metainferencia de ST^+ puede traducirse a una inferencia de LP^+ utilizando el condicional en lugar de la relación de consecuencia. Más precisamente, la idea es definir una función de traducción t para las inferencias de ST^+ como sigue:

Definición (*Traducción de una inferencia de* ST^+)

$$t(\Gamma \vDash_{ST^+} \Delta) = \begin{cases} \gamma_1 \wedge ... \wedge \gamma_n \supset \delta_1 \vee ... \vee \delta_m & \text{si } n, m > 0 \\ \neg(\gamma_1 \wedge ... \wedge \gamma_n) & \text{si } n > 0, m = 0 \\ \delta_1 \vee ... \vee \delta_m & \text{si } k = 0, m > 0 \\ \bot & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Con esta función de traducción[6] podemos mapear las metainferencias de ST^+ con las inferencias de LP^+. Más aún, podemos probar lo siguiente:

Teorema 5.4.1 (Primer resultado de coincidencia) *Las siguientes dos afirmaciones son equivalentes:*
(a) Si $\Gamma_1 \vDash_{ST^+} \Delta_1, ..., \Gamma_n \vDash_{ST^+} \Delta_n$*, entonces* $\Gamma \vDash_{ST^+} \Delta$.
(b) $t(\Gamma_1 \vDash_{ST^+} \Delta_1), ..., t(\Gamma_n \vDash_{ST^+} \Delta_n) \vDash_{LP^+} t(\Gamma \vDash_{ST^+} \Delta)$*.*

Para la direccion que va de (b) a (a) necesitamos el siguiente lema:

Lema 5.4.2 $\Gamma \vDash_{ST^+} \Delta$ *si y sólo si* $\vDash_{LP^+} \bigwedge \Gamma \supset \bigvee \Delta$.

Prueba $\Gamma \vDash_{ST^+} \Delta$ si y sólo si $\bigwedge \Gamma \vDash_{ST^+} \bigvee \Delta$ (por la metainferencia de juntar premisas, juntar conclusiones). Esto último se cumple si y sólo si $\vDash_{ST^+} \bigwedge \Gamma \supset \bigvee \Delta$ (por el teorema de la deducción). Dado que las oraciones válidas en ST^+ y las oraciones válidas en LP^+ coinciden, podemos obtener $\vDash_{LP^+} \bigwedge \Gamma \supset \bigvee \Delta$. ∎

Teorema 5.4.3 *(b) implica (a).*

Prueba Supongamos que *(b)* se cumple y que $\Gamma_1 \vDash_{ST^+} \Delta_1, ..., \Gamma_n \vDash_{ST^+} \Delta_n$. Por el lema previo, podemos inferir que $\vDash_{LP^+} \bigwedge \Gamma_1 \supset \bigvee \Delta_1$, ..., $\vDash_{LP^+} \bigwedge \Gamma_n \supset \bigvee \Delta_n$. Dado *(b)*, usando la transitividad de $\vDash_{LP^+}$, podemos obtener $\vDash_{LP^+} \bigwedge \Gamma \supset \bigvee \Delta$[7]. Usando el lema previo una vez más podemos inferir $\Gamma \vDash_{ST^+} \Delta$. Por lo tanto, *(a)* se cumple. ∎.

[6]Para simplificar las pruebas que ofreceré más abajo sólo consideraré el caso donde $m, n > 0$.

[7]Es crucial notar que aunque $\vDash_{ST^+}$ no es transitivo, $\vDash_{LP^+}$ ciertamente sí lo es.

La dirección que va de *(a)* a *(b)* es ligeramente más complicada. Comenzaré con la siguiente definición:

Definición (*La(s) función(es) r*) Sea *Form* el conjunto de fórmulas de $\mathcal{L}^+$ y sea V el conjunto de valuaciones de ST^+. Sea r: *Form* $\times$ $V \rightarrow$ *Form* cualquier función que toma como input un par compuesto por una fórmula y una valuación, y da como output una fórmula. Para cada fórmula ϕ y cada valuación v, r se comporta así:

$$r_v(\phi) = \begin{cases} \top & \text{si } \phi \text{ es atómica y } v(\phi) = 1 \\ \bot & \text{si } \phi \text{ es atómica y } v(\phi) = 0 \\ \lambda & \text{si } \phi \text{ es atómica y } v(\phi) = \frac{1}{2} \\ \neg r_v(\psi) & \text{si } \phi \text{ es } \neg\psi \\ r_v(\psi) \vee r_v(\chi) & \text{si } \phi \text{ es } \psi \vee \chi \\ \exists x r_v^{max}(\psi) & \text{si } \phi \text{ es } \exists x\psi \end{cases}$$

Estoy siendo un poco descuidado con la traducción de fórmulas abiertas. Como es usual, las fórmulas abiertas obtienen un valor semántico en virtud de una función de valuación *y una función de asignación de objetos en el dominio a las variables en el lenguaje*. Por lo tanto, una traducción de una fórmula abierta está disponible siempre y cuando asignamos algún objeto(s) a su variable(s) libre(s). Esto es importante para la traducción de fórmulas cuantificadas. En la definición anterior $r_v^{max}(\psi)$ es el máximo del conjunto $\{r_{v'}(\psi) : v' \text{ es una } x\text{-variante de } v\}$. El máximo del conjunto puede establecerse como sigue: cualquier fórmula que obtenga el valor 1 de acuerdo a v' es mayor que cualquier fórmula que obtenga el valor $\frac{1}{2}$ de acuerdo a v', y cualquier fórmula que obtenga cualquiera de estos dos valores de acuerdo a v' es mayor que cualquier fórmula que obtenga el valor 0 de acuerdo a v'[8]. Es importante notar que el conjunto $\{r_{v'}(\psi) : v' \text{ es una } x\text{-variante de } v\}$ puede contener más de un máximo. Por ejemplo, esto ocurre si el conjunto tiene como miembros a $\top \vee \neg\top$ y a $\bot \vee \neg\bot$. Por tanto, la definición que ofrecí más arriba es compatible con más de una función de traducción. Esto, con todo, no importa demasiado. Cualquier función de traducción servirá, siempre que preserve la estructura lógica.

[8]Una alternativa que no funciona es estipular que $r_v(\exists x\psi) \equiv \exists x r_v(\psi)$. Pues consideremos la fórmula $\exists x Tr(x)$. La traducción $r_v(\exists x Tr(x))$ de la fórmula $\exists x Tr(x)$ sería $\exists x r_v(Tr(x))$. Sin embargo, $r_v(Tr(x))$ dependerá de lo que la función de asignación implícita en v le asigna a x. Si, por ejemplo, $v(x) \equiv \langle\bot\rangle$, entonces $r_v(Tr(x)) \equiv \bot$, pero si $v(x) \equiv \langle\lambda\rangle$, entonces $r_v(Tr(x)) \equiv \lambda$. Por lo tanto, la traducción de $\exists x Tr(x)$ dependerá de la traducción de $Tr(x)$. Pero si $r_v(Tr(x)) \equiv \bot$ o si $r_v(Tr(x)) \equiv \lambda$, entonces $r_v(\exists x Tr(x)) \equiv \bot$ y $r_v(\exists x Tr(x)) \equiv \lambda$, respectivamente. Y esto no es lo que queremos.

Daré un par de ejemplos para ilustrar el funcionamiento de r_v. Consideremos la fórmula $Rc \vee \neg Rc$ y consideremos una valuación v tal que $v(Rc) = 0$. Tenemos:
$r_v(Rc \vee \neg Rc) = r_v(Rc) \vee r_v(\neg Rc) = r_v(Rc) \vee \neg r_v(Rc) = \bot \vee \neg\bot$.
Claramente, si $v(Rc) = 1$, entonces $r_v(Rc \vee \neg Rc) = \top \vee \neg\top$, y si $v(Rc) = \frac{1}{2}$, entonces $r_v(Rc \vee \neg Rc) = \lambda \vee \neg\lambda$.

Consideremos un ejemplo más complicado. Tomemos la fórmula $\exists x(Tr(x) \vee \neg Tr(x))$ y cualquier valuación v. Tenemos:
$r_v(\exists x(Tr(x) \vee \neg Tr(x)) = \exists x r_v^{max}(Tr(x) \vee \neg Tr(x)) = \exists x\ max\{r_v(Tr(x) \vee \neg Tr(x)) : v'$ es una x-variante de $v\} = \exists x\ max\{r_v(Tr(x)) \vee \neg r_v(Tr(x)) : v'$ es una x-variante de $v\} = \exists x\ max\{\top \vee \neg\top, \bot \vee \neg\bot, \lambda \vee \neg\lambda\} = \exists x \bot \vee \neg\bot$.
Obsérvese que en el último paso podríamos haber escogido también $\exists x \top \vee \neg\top$, dado que también es uno de los máximos del conjunto (y su estructura lógica es la misma). Esto quiere decir que hay más de una función de traducción capaz de llevar a cabo la tarea requerida. Lo que es importante para que r_v sea una buena función de traducción es que preserve la estructura lógica de las fórmulas que están siendo traducidas, eso es todo.

Lema 5.4.4 *Para toda fórmula ϕ en $\mathcal{L}^+$:*

1. *Si $v(\phi) = 1$, entonces $v(r_v(\phi)) = 1$.*

2. *Si $v(\phi) = 0$, entonces $v(r_v(\phi)) = 0$.*

3. *Si $v(\phi) = \frac{1}{2}$, entonces $v(r_v(\phi)) = \frac{1}{2}$.*

Prueba La prueba es por inducción sobre la complejidad de ϕ. Los detalles pueden encontrarse en [11]. ∎

Lema 5.4.5 *La función r_v tiene las siguientes propiedades:*

1. *Si $v(\bigwedge\Gamma \supset \bigvee\Delta) = 0$, entonces $r_v(\bigwedge\Gamma) \nvDash_{ST^+} r_v(\bigvee\Delta)$, y*

2. *Si $v(\bigwedge\Gamma \supset \bigvee\Delta) = 1$ o $\frac{1}{2}$, entonces $r_v(\bigwedge\Gamma) \vDash_{ST^+} r_v(\bigvee\Delta)$,*

Prueba Para *1.*, supongamos que $v(\bigwedge\Gamma \supset \bigvee\Delta) = 0$. Luego, $v(\bigwedge\Gamma) = 1$ y $v(\bigvee\Delta) = 0$. Esto quiere decir que $r_v(\bigwedge\Gamma) = \top$, y que $r_v(\bigvee\Delta) = \bot$. Por lo tanto, $r_v(\bigwedge\Gamma) \nvDash_{ST^+} r_v(\bigvee\Delta)$. Para *2.*, supongamos primero que $v(\bigwedge\Gamma \supset \bigvee\Delta) = 1$. Luego, o bien $v(\bigwedge\Gamma) = 0$ o $v(\bigvee\Delta) = 1$. De modo que o bien $r_v(\bigwedge\Gamma) = \bot$, o bien $r_v(\bigvee\Delta) = \top$. En ambos casos, $r_v(\bigwedge\Gamma) \vDash_{ST^+} r_v(\bigvee\Delta)$. Ahora supongamos que $v(\bigwedge\Gamma \supset \bigvee\Delta) = \frac{1}{2}$. Luego, o bien $v(\bigwedge\Gamma) = \frac{1}{2}$ o bien $v(\bigvee\Delta) = \frac{1}{2}$. De modo que o bien $r_v(\bigwedge\Gamma) = \lambda$ o bien $r_v(\bigvee\Delta) = \lambda$. En ambos casos, $r_v(\bigwedge\Gamma) \vDash_{ST^+} r_v(\bigvee\Delta)$ otra vez. ∎

Ahora estamos en condiciones de probar que *(a)* implica *(b)*.

Teorema 5.4.6 *(a) implica (b).*

Prueba Supongamos que *(b)* no se cumple. Esto quiere decir que $t(\Gamma_1 \vDash_{ST^+} \Delta_1), ..., t(\Gamma_n \vDash_{ST^+} \Delta_n) \nvDash_{LP^+} t(\Gamma \vDash_{ST^+} \Delta)$. De modo que hay una valuación v tal que para $0 \leq i \leq n$, $v(\bigwedge \Gamma_i \supset \bigvee \Delta_i) > 0$, y $v(\bigwedge \Gamma \supset \bigvee \Delta) = 0$. Por el lema previo, podemos inferir que para cada i tal que $0 \leq i \leq n$, $r_v(\bigwedge \Gamma_i) \vDash_{ST^+} r_v(\vee \Delta_i)$, pero $r_v(\bigwedge \Gamma) \nvDash_{ST^+} r_v(\vee \Delta)$. Por consiguiente, *(a)* no se cumple. ∎

El teorema 5.4.3 junto con el teorema 5.4.6 nos dan nuestro resultado principal, que informalmente dice que una metainferencia se cumple en ST^+ si y sólo si la correspondiente inferencia vale en LP^+.

Antes de pasar a otro asunto, me gustaría clarificar la idea general detrás de este resultado. Supongamos que estamos considerando la falla de transitividad en ST^+ y su relación con el condicional de LP^+. Este condicional no es transitivo. En otras palabras, hay fórmulas ϕ, ψ y χ tales que $\phi \supset \psi, \psi \supset \chi \nvDash_{LP^+} \phi \supset \chi$. Por ejemplo, cuando χ es p, ψ es q y χ es s, obtenemos un contraejemplo al principio de transitividad escogiendo una valuación apropiada.

Esta característica de LP^+ se corresponde con la falla de transitividad en ST^+. Para ver esto, consideremos una valuación v apropiada de LP^+. v es tal que $v(p) = 1$, $v(q) = \frac{1}{2}$, y $v(s) = 0$. Ahora bien, $r_v(p) = \top$, $r_v(q) = \lambda$, y $r_v(s) = \bot$. Como ya he señalado, $\top \vDash_{ST^+} \lambda$, y $\lambda \vDash_{ST^+} \bot$; pero $\top \nvDash_{ST^+} \bot$. En otras palabras, hay instancias de la metainferencia 'si $\phi \vDash_{ST^+} \psi$ y $\psi \vDash_{ST^+} \chi$, entonces $\phi \vDash_{ST^+} \chi$' que no se cumplen. La prueba que he ofrecido nos proporciona un método constructivo para obtener esas instancias. Esto parece suficiente para inferir que las características del condicional de LP^+ están íntimamente relacionadas con las metainferencias de ST^+.

5.4.2. LP^+ y la lógica externa de ST^+

En esta sección voy a comparar ST^+ con LP^+ haciendo uso de sus sistemas de prueba. Para refrescar la memoria del lector, repetiré las definiciones de validez sintáctica para ST^+ y LP^+

Definición (*Validez sintáctica para ST^+*) Diré que un argumento del conjunto Γ al conjunto Δ es *sintácticamente válido en ST^+* (en símbolos, $\Gamma \vdash_{ST^+} \Delta$) si el secuente $\Gamma|\Gamma, \Delta|\Delta$ tiene prueba en $\mathcal{S}^+$.

Definición (*Validez sintáctica para LP^+*) Diré que el argumento que va del conjunto Γ al conjunto Δ es *sintácticamente válido en LP^+* (en símbolos, $\Gamma \vdash_{LP^+} \Delta$) si el secuente $\Gamma|\Delta|\Delta$ tiene prueba en $\mathcal{S}^+$.

Nótese que no hay ninguna diferencia en lo que respecta a las reglas y los axiomas de ST^+ y LP^+. La única diferencia entre estas lógicas tiene que ver con el tipo de secuente que debemos probar para que una inferencia sea sintácticamente válida.

En este punto tenemos todo lo que necesitamos para introducir la noción de validez externa. Consideremos un cierto lenguaje $\mathcal{L}$ y una teoría $\mathcal{T}$ formulada por medio de un cálculo de secuentes de dos lados $\mathcal{SC}$. Sea Γ un conjunto de fórmulas de $\mathcal{L}$ sea ϕ una fórmula de $\mathcal{L}$, diré que Γ *implica externamente* ϕ en $\mathcal{T}$ siempre que el secuente $\Rightarrow \phi$ sea probable en el cálculo que obtenemos a partir de $\mathcal{SC}$ añadiéndole como secuentes iniciales todos los secuentes $\Rightarrow \gamma$, para cada $\gamma \in \Gamma$. Esta es la noción de validez externa para la teoría $\mathcal{T}$.[9]

El problema es que esta noción de lógica externa no es aplicable a la teoría ST^+ tal como la hemos presentado en esta sección. ST^+ fue presentada con la ayuda de un sistema de prueba $\mathcal{S}^+$ el cual, por un lado, trabaja con conclusiones múltiples y, por otro, usa secuentes de tres lados. Sin embargo, el problema puede ser esquivado fácilmente ajustando ligeramente la caracterización ofrecida más arriba. Esto puede hacerse del siguiente modo:

Definición (*Validez externa para ST^+*) Diré que un argumento que va del conjunto Γ al conjunto Δ es *externamente válido en ST^+* (en símbolos, $\Gamma \vdash_{ST^+_E} \Delta$) si el secuente $\varnothing|\Delta|\Delta$ tiene prueba en $\mathcal{S}^+$ junto con $\varnothing|\gamma|\gamma$ para cada γ en Γ (i.e. en el sistema que resulta de añadir todos estos secuentes como secuentes iniciales a $\mathcal{S}^+$)[10].

La razón para definir validez externa de este modo es que las fórmula probables en ST^+ deberían ser las fórmulas que reciben en todo modelo el valor 1 o el valor $\frac{1}{2}$. Como vimos, no hay ninguna diferencia entre ST^+ y LP^+ en cuanto al conjunto de *fórmulas* que cada teoría valida. Una consecuencia inmediata de la definición previa es que para las fórmulas (aunque no para las inferencias, como veremos en breve) la lógica externa de ST^+ es la misma

[9]Una noción similar puede encontrarse en [2]. Allí Avron introduce esta noción para estudiar las propiedades de ciertas lógicas lineales (la única diferencia importante es que Avron considera multiconjuntos, en lugar de conjuntos). Más recientemente, Mares and Paoli han utilizado esta noción en [55] para argumentar a favor de un enfoque subestructural (no contractivo y no monótono) a las paradojas. Por último, Paoli ha aplicado esta noción más específicamente para determinar la lógica de ST^+ cuando se la formula utilizando un cálculo de secuentes de dos lados.

[10]Gracias a Francesco Paoli por sugerir esta definición.

que su lógica interna, la cual, por supuesto, contiene a todas las fórmulas clásicamente válidas.

La definición previa es útil para comparar $\vdash_{ST_E^+}$ con $\vdash_{LP^+}$ de una forma distinta de la ya ofrecida en la sección anterior. Lo que el próximo teorema muestra es que $\vdash_{ST_E^+}$ y $\vdash_{LP^+}$ coinciden, un resultado análogo al que obtuvimos en la sección anterior.

Teorema 5.4.7 (Segundo resultado de coincidencia) $\Gamma \vdash_{ST_E^+} \Delta$ *si y sólo si* $\Gamma \vdash_{LP^+} \Delta$.

Esquema de prueba Sea Γ el conjunto $\{\gamma_1, ..., \gamma_n\}$. Primero voy a probar la direccion de izquierda a derecha. Supongamos que $\mathcal{S}^+$ junto con los secuentes iniciales $\varnothing|\gamma_i|\gamma_i$ para $1 \leq i \leq n$, prueban $\varnothing|\Delta|\Delta$. Luego, hay una prueba de $\varnothing|\Delta|\Delta$ que sólo utiliza las reglas y los axiomas de $\mathcal{S}^+$ más (posiblemente) los secuentes iniciales $\varnothing|\gamma_1|\gamma_1, ..., \varnothing|\gamma_n|\gamma_n$. Es sencillo transformar esta prueba en una prueba de $\gamma_1, ..., \gamma_n|\Delta|\Delta$ de la siguiente forma. Primero tomamos cada secuente $\Gamma'|\Sigma'|\Delta'$ de la prueba y añadimos γ_i del lado izquierdo del secuente para cada γ_i en Γ, obteniendo así $\gamma_1, ..., \gamma_n, \Gamma'|\Sigma'|\Delta'$. Ahora el secuente inferior ya no es $\varnothing|\Delta|\Delta$ sino $\gamma_1, ..., \gamma_n|\Delta|\Delta$, y está claro que cada paso de la prueba que involucra una regla operacional sigue siendo válido (el lector puede verificar esto por su cuenta), ya que ninguna de las reglas de $\mathcal{S}^+$ se vuelve inválida si cambiamos *uniformemente* su contexto. Esto también vale para las reglas para $\exists$, aunque necesitamos asegurarnos de cambiar las variables para evitar conflictos. El objeto resultante puede no ser aún una prueba de $\gamma_1, ..., \gamma_n|\Delta|\Delta$, ya que podría tener en sus extremos superiores secuentes de la forma $\gamma_1, ..., \gamma_n, \phi^{At}|\phi^{At}|\phi^{At}$, o de la forma $\gamma_1, ..., \gamma_n|\gamma_i|\gamma_i$, los cuales no son secuentes iniciales de $\mathcal{S}^+$. Sin embargo, dado que la regla de monotonía está disponible en $\mathcal{S}^+$, podemos extender hacia arriba esas ramas hasta llegar a secuentes que sí son secuentes iniciales de $\mathcal{S}^+$. El objeto resultante será una prueba en $\mathcal{S}^+$ del secuente $\gamma_1, ..., \gamma_n|\Delta|\Delta$.

Para probar la dirección de derecha a izquierda supongamos que $\Gamma \vdash_{LP^+} \Delta$. Luego hay una prueba en $\mathcal{S}^+$ de $\gamma_1, ..., \gamma_n|\Delta|\Delta$. Podemos transformar esta prueba en una prueba del secuente $\varnothing|\Delta|\Delta$ en $\mathcal{S}^+$ junto con los secuentes iniciales $\varnothing|\gamma_1|\gamma_1, ..., \varnothing|\gamma_n|\gamma_n$. La idea es cortar los γ_is de Γ uno por uno. Para γ_1 hacemos lo siguiente:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\varnothing|\gamma_1|\gamma_1}\ \text{axioma}}{\gamma_2, ..., \gamma_n|\gamma_1, \Delta|\gamma_1, \Delta}\ \text{monotonía} \qquad \dfrac{\dfrac{\vdots}{\gamma_1, ..., \gamma_n|\Delta|\Delta}}{\gamma_1, ..., \gamma_n|\gamma_1, \Delta|\Delta}\ \text{monotonía} \qquad \dfrac{\dfrac{\vdots}{\gamma_1, ..., \gamma_n|\Delta|\Delta}}{\gamma_1, ..., \gamma_n|\Delta|\gamma_1, \Delta}\ \text{monotonía}}{\gamma_2, ..., \gamma_n|\Delta|\Delta}\ \text{corte}$$

Una vez que tenemos el secuente $\gamma_2, ..., \gamma_n|\Delta|\Delta$, lo mismo puede hacerse para γ_2:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\varnothing|\gamma_2|\gamma_2}\,\text{axioma}}{\gamma_3,\ldots,\gamma_n|\gamma_2,\Delta|\gamma_2,\Delta}\,\text{monotonía} \qquad \dfrac{\dfrac{\vdots}{\gamma_2,\ldots,\gamma_n|\Delta|\Delta}}{\gamma_2,\ldots,\gamma_n|\gamma_2,\Delta|\Delta}\,\text{monotonía} \qquad \dfrac{\dfrac{\vdots}{\gamma_2,\ldots,\gamma_n|\Delta|\Delta}}{\gamma_2,\ldots,\gamma_n|\Delta|\gamma_2,\Delta}\,\text{monotonía}}{\gamma_3,\ldots,\gamma_n|\Delta|\Delta}\,\text{corte}$$

Debería quedar claro que este procedimiento puede llevarse a cabo para cada γ_i. La parte final de la prueba tiene esta forma:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\varnothing|\gamma_n|\gamma_n}\,\text{axioma}}{\varnothing|\gamma_n,\Delta|\gamma_n,\Delta}\,\text{monotonía} \qquad \dfrac{\dfrac{\vdots}{\gamma_n|\Delta|\Delta}}{\gamma_n|\gamma_n,\Delta|\Delta}\,\text{monotonía} \qquad \dfrac{\dfrac{\vdots}{\gamma_n|\Delta|\Delta}}{\gamma_n|\Delta|\gamma_n,\Delta}\,\text{monotonía}}{\varnothing|\Delta|\Delta}\,\text{corte}$$

$\blacksquare$

Así que, una vez más, resulta que la lógica externa de ST^+, esta vez entendida en términos sintácticos, coincide con la lógica de LP^+.

Hay un sentido en que este resultado no debería ser una sorpresa. Si la noción de validez externa es exactamente la misma para LP^+ y ST^+, entonces se sigue inmediatamente que la lógica externa de ST^+ es simplemente la lógica de LP^+, dado que, en general, el tipo de lógicas no subestructurales que hemos estado considerando son tales que validez externa y validez interna coinciden. En otras palabras, podría objetarse que la noción de validez externa que presentamos en esta sección está hecha a medida para que sea igual a LP^+.

Sin embargo, creo que esta objeción es incorrecta. Si bien es cierto que en principio hay otras formas de definir la noción de validez externa para ST^+, ninguna parece adecuada. En particular, podríamos considerar las siguientes tres caracterizaciones alternativas:

1. $\Gamma \vdash_{ST_E^+} \Delta$ si y sólo si el secuente $\varnothing|\varnothing|\Delta$ puede probarse a partir de $\mathcal{S}^+$ junto con $\varnothing|\varnothing|\gamma$ para cada γ en Γ; o

2. $\Gamma \vdash_{ST_E^+} \Delta$ si y sólo si el secuente $\varnothing|\varnothing|\Delta$ puede probarse a partir de $\mathcal{S}^+$ junto con $\varnothing|\gamma|\gamma$ para cada γ en Γ; o

3. $\Gamma \vdash_{ST_E^+} \Delta$ si y sólo si el secuente $\varnothing|\Delta|\Delta$ puede probarse a partir de $\mathcal{S}^+$ junto con $\varnothing|\varnothing|\gamma$ para cada γ en Γ.

En el primer caso, $\vdash_{ST^E}$ es simplemente la noción de validez de K_3^+ y en el segundo caso, $\vdash_{ST^E}$ es simplemente la noción de validez de TS^+[11]. El tercer caso es más interesante. Puede probarse que $\vdash_{ST^E}$ captura la noción de validez de ST^+, esto es, la noción de validez externa de ST^+ coincidiría con

[11]Decimos que $\Gamma \vdash_{TS^+} \Delta$ si y sólo si $\Gamma|\varnothing|\Delta$ tiene prueba en $\mathcal{S}^+$. Esta es la noción de validez tolerante-estricta

su noción interna. Las pruebas de estos hechos pueden obtenerse modificando ligeramente la prueba del teorema 5.4.7.

Sin embargo, en mi opinión ninguna de las caracterizaciones alternativas de validez externa son adecuadas para ST^+. La razón es que no logran capturar en qué consiste que una *fórmula* sea válida en ST^+. Recordemos que la noción de validez externa trabaja con fórmulas, no con argumentos, y que las fórmulas válidas de ST^+ son simplemente las fórmulas que tienen en todo modelo un valor mayor a 0.

La caracterización que he utilizado, por otra parte, captura esta idea. Más específicamente, la caracterización está basada en una generalización natural de la noción de validez externa para un cálculo de secuentes de dos lados junto con el hecho de que las fórmulas válidas de ST^+ pueden tomar el valor 1 o el valor $\frac{1}{2}$. Además, hay evidencias independientes de que esta es la noción adecuada. Como hemos visto, la lógica de las metainferencias de ST^+ también coincide con LP^+.

5.4.3. Los costos de rechazar transitividad

Parece *prima facie* deseable que todo lo que sea afirmado en la lógica interna sea afirmado también en la lógica externa. Los resultados de los apartados anteriores sugieren que los partidarios del enfoque no transitivo no se preocupan por este desiderátum. En ST^+ la noción interna y la noción externa de consecuencia no coinciden. Ya sea que entendamos 'externa' en el sentido de la sección anterior (es decir, sintácticamente), o en el sentido de la sección previa a esa (es decir, en términos de metainferencias), la lógica externa de ST^+ es más débil que su lógica interna. En [26], los autores afirman que todos los desiderata de Leitgeb en [56] para teorías de la verdad se satisfacen. Dicen (p. 864) que

> The argument that they cannot be jointly satisfied turns crucially on the assumption of transitivity, but transitivity is not among the eight desiderata, nor does it follow from them.

Por supuesto, tienen razón. Pero es razonable pensar que cuando de teorías subestructurales se trata, la teoría utópica de la verdad imaginada por Leitgeb debe incluir un requisito adicional, a saber, que su lógica interna coincida con su lógica externa. A partir de los argumentos de los dos apartados anteriores parece claro que este nuevo desiderátum no se satisface con ST^+. Si incumplir este requisito es más costoso que incumplir los demás es una cuestión que no vamos a decidir aquí.

Ahora bien, podría argumentarse que la falta de coincidencia entre la relación de consecuencia interna y la externa no es algo por lo que el defensor de ST^+ deba preocuparse. En particular, él podría afirmar que el acuerdo entre la lógica interna y la externa es sólo un desiderátum clásico (como, por ejemplo, la regla de explosión). Pero es importante ver que esto no es necesariamente así. Pues no sólo la lógica clásica, sino también algunas lógicas no clásicas tales como K_3 y LP cumplen con esta restricción. En otros términos, no es una cuestión de clásico *versus* no-clásico, sino de estructural *versus* subestructural. Y, como sabemos, la mayoría de los enfoques no clásicos a las paradojas son estructurales.

Aún así, el defensor de ST^+ podría continuar siendo escéptico en cuanto a la importancia de este problema para su proyecto principal, el de dar una teoría de la verdad. Pero quiero hacer hincapié en que la relación validez externa es muy relevante para la teoría de la verdad. Esto se debe a que el problema no se reduce a que hay una falta de coincidencia entre la relación de consecuencia interna y la externa. El problema también tiene que ver con la debilidad de la noción externa (que resultó ser equivalente a LP^+).

Por ejemplo, una de las características de ST^+ que es considerada por sus partidarios como una ventaja sobre otros enfoques es que su condicional es, en cierto modo, totalmente clásico. Pero sólo en cierto modo. El condicional no satisface una serie de metainferencias muy básicas. De hecho, todas las debilidades del condicional de LP^+ son heredadas por el condicional de ST^+ a nivel metainferencial. Así, por ejemplo, dado que el condicional de LP^+ no satisface la regla de *modus ponens*, el condicional de ST^+ no satisface la regla de *meta modus ponens*.

Además, por lo general se reconoce que uno de los papeles (quizás el único papel) cumplido por el predicado de verdad es el de permitir la expresión de cierto tipo de generalizaciones. Y, como hemos dicho en los capítulos anteriores, no queremos solamente expresar tales generalizaciones, sino también tener una teoría suficientemente potente como para razonar con ellas. Los partidarios de ST^+ han señalado que su teoría puede hacer esto, en virtud de su clasicidad. Las cuantificaciones restringidas que involucran al predicado de verdad pueden representarse usando el condicional material:

$$\forall x(\phi(x) \supset Tr(x))$$

Pero ya he sugerido que estas generalizaciones sólo pueden ser efectivas cuando la siguiente inferencia se cumple:

$$\forall x(\phi(x) \supset Tr(x)), \phi\langle\psi\rangle \vDash \psi.$$

Dada la falla de *modus ponens* en LP^+, LP^+ no valida esta inferencia. Por lo tanto, podemos decir que LP^+ no puede capturar una de las principales características del predicado veritativo[12]. En virtud de lo que hemos probado en las secciones anteriores, una dificultad análoga afecta a ST^+. La falla de *meta modus ponens* implica que hay enunciados tales que

$\vDash_{ST^+} \forall x(\phi(x) \supset Tr(x))$

y

$\vDash_{ST^+} \phi\langle\psi\rangle$

se cumplen, pero

$\vDash_{ST^+} \psi$

no se cumple. Es decir, hay situaciones donde los primeros dos enunciados son (tolerantemente) asertables, pero el tercero no lo es. De modo que hay casos en los que el predicado veritativo no puede cumplir con su función generalizadora, incluso siendo completamente transparente[13].

En suma, los partidarios de ST^+ afirman que su teoría respeta la lógica clásica, y que la única diferencia con la lógica clásica es que la relación de consecuencia que proponen no es transitiva. Hemos demostrado que, en cierto modo, esta relación de consecuencia no transitiva tiene un parecido sorprendente con el condicional de LP^+. Por lo tanto, por un lado, la adopción de ST^+ como una solución a las paradojas no supone una mejora sustantiva con respecto a LP^+, porque todos los problemas generalmente atribuidos a LP^+ afectarán a la noción de consecuencia externa de ST^+. Por otro lado, hay un sentido en el que LP^+ es mejor, porque no hay una falta de coincidencia entre sus nociones de consecuencia interna y externa.

5.5. Una teoría ingenua de la validez

Una 'teoría ingenua de la validez' es, como ya mencioné, una teoría capaz de hablar sobre su propia noción de validez. Como en el caso de las teorías ingenuas de la verdad, hay paradojas de la validez ingenua que necesitamos abordar. Recordemos la oración π de la sección 1.3. π es la oración $Val(\pi, \bot)$, i.e., una oración que dice de sí misma que implica $\bot$. Ya hemos visto que π

[12]Es precisamente en virtud de este tipo de problemas que quienes defienden teorías de la verdad basadas en la lógica LP introducen un nuevo condicional que sea capaz de validar *modus ponens*.

[13]Gracias a Lavinia Picollo y a Thomas Schindler por este argumento.

puede trivializar una teoría utilizando el siguiente razonamiento (lo reitero aquí para refrescar la memoria del lector):

$$\mathit{corte}\;\dfrac{\mathrm{R}Val\;\dfrac{\mathrm{L}C\;\dfrac{\mathrm{L}Val\;\dfrac{}{\pi, Val(\pi,\bot) \Rightarrow \bot}}{\pi \Rightarrow \bot}}{\Rightarrow \pi} \qquad \dfrac{\vdots}{\pi \Rightarrow \bot}}{\Rightarrow \bot}$$

Además de las reglas RVal, LVal y la definición de π, dos reglas estructurales fueron utilizadas en la prueba: LC (contracción estructural a la izquierda) y corte. Por lo tanto, el uso de lógicas subestructurales parece prometedor para hacer frente a esta paradoja. Según Ripley ([88], p.157):

> Beall and Murzi point out that most non-classical truth theories must treat this paradox differently from the ordinary Curry paradox, despite the apparent similarity. ST, of course, has no such obligation (...) Because this paradox is already accounted for, there is no difficulty in introducing a validity predicate of this sort into a system governed by ST.

Lo que haré aquí será poner en duda esta última afirmación. Pues una vez que tenemos un predicado de validez disponible en el lenguaje, podemos notar algo interesante acerca de este enfoque: es posible expresar, en el lenguaje objeto, no sólo hechos acerca de las oraciones e inferencias válidas (o inválidas) en ST, sino también hechos acerca de las metainferencias que valen (o no valen) en ST. Por ejemplo, podemos afirmar no sólo que, por ejemplo, la regla de *modus ponens* es válida ($Val((\phi \supset \psi) \wedge \phi, \psi)$), pero también que (una versión simplificada de) la (meta)regla de *modus ponens* vale también: $Val(\top, \phi \supset \psi) \wedge Val(\top, \phi) \supset Val(\top, \psi)$.

De modo que una pregunta natural en este contexto es si ST más un predicado validez que satisfaga LVal y RVal es capaz de representar con veracidad las metarreglas que se cumplen en ST. En lo que queda de este capítulo voy a sugerir tres cosas. En primer lugar, en la siguiente subsección demostraré que si añadimos un predicado de validez que satisfaga LVal y RVal a ST, esto no es suficiente para obtener una caracterización correcta de la noción de validez en ST. La dificultad, en este caso, no es que las reglas LVal y RVal vuelvan trivial a la teoría, sino que son demasiado débiles para probar algunas afirmaciones sobre metarreglas que nos gustaría hacer. Más precisamente, hay ciertas metarreglas que se cumplen en esta teoría, pero no es posible dar una prueba del enunciado que expresa que se cumplen, a pesar de que dichos enunciados pueden expresarse en el lenguaje de la teoría. En segundo lugar, voy a sugerir que este problema puede resolverse usando versiones más fuertes de LVal y RVal. Sin embargo, el sistema resultante se enfrenta a una dificultad que, hasta donde sé, ha pasado desapercibida en la bibliografía. El fortalecimiento propuesto trae consigo algunas consecuencias no deseadas. En particular, voy a mostrar que la manera más obvia para fortalecer LVal y RVal hace que sea posible probar una versión internalizada de la regla de corte. Para finalizar, consideraré algunas formas en las que el defensor de ST podría intentar evitar este problema.

5.5.1. La internalización de las metarreglas

Sin la regla de corte es imposible llevar a cabo la derivación de la paradoja de la validez. Por lo tanto, podemos añadir a ST un predicado de validez que satisfaga LVal y RVal sin correr el riesgo de que la teoría resultante sea trivial. Llamaré a esta teoría STV[14].

Definición El sistema STV contiene los siguientes secuentes iniciales y reglas (donde Γ y Δ son conjuntos (finitos), de modo que las reglas de contracción estructural se cumplen):

$$\text{Ax}\,\frac{}{\phi \Rightarrow \phi}$$

$$\text{L}W\,\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \phi \Rightarrow \Delta} \qquad \text{R}W\,\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \phi, \Delta}$$

$$\text{L}\neg\,\frac{\Gamma \Rightarrow \phi, \Delta}{\Gamma, \neg\phi \Rightarrow \Delta} \qquad \text{R}\neg\,\frac{\Gamma, \phi \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \neg\phi, \Delta}$$

$$\text{L}\wedge\,\frac{\Gamma, \phi \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \phi \wedge \psi \Rightarrow \Delta} \qquad \text{R}\wedge\,\frac{\Gamma \Rightarrow \phi, \Delta \qquad \Gamma \Rightarrow \psi, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \phi \wedge \psi, \Delta}$$

$$\text{L}\wedge\,\frac{\Gamma, \psi \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \phi \wedge \psi \Rightarrow \Delta} \qquad \text{R}\vee\,\frac{\Gamma \Rightarrow \phi, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \phi \vee \psi, \Delta}$$

$$\text{L}\vee\,\frac{\Gamma, \phi \Rightarrow \Delta \qquad \Gamma, \psi \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \phi \vee \psi \Rightarrow \Delta} \qquad \text{R}\vee\,\frac{\Gamma \Rightarrow \psi, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \phi \vee \psi, \Delta}$$

$$\text{L}\supset\,\frac{\Gamma \Rightarrow \phi, \Delta \qquad \Gamma, \psi \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \phi \supset \psi \Rightarrow \Delta} \qquad \text{R}\supset\,\frac{\Gamma, \phi \Rightarrow \psi, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \phi \supset \psi, \Delta}$$

$$\text{L}Val\,\frac{}{\phi, Val(\langle\phi\rangle, \langle\psi\rangle) \Rightarrow \psi} \qquad \text{R}Val\,\frac{\phi \Rightarrow \psi}{\Rightarrow Val(\langle\phi\rangle, \langle\psi\rangle)}$$

[14] Anteriormente, hemos presentado ST utilizando un sistema trivalente basado en el esquema de valuación de Kleene fuerte. Pero como no está claro de qué forma aplicar esta caracterización semántica a ciertas extensiones de ST, como STV, en esta sección ofreceré una presentación sintáctica de STV. Asimismo, para simplificar las cosas, me concentraré en el fragmento de ST libre de cuantificadores.

En este sistema es posible expresar (y probar) varios hechos acerca de los argumentos válidos de STV. Por ejemplo, es posible expresar reglas como las siguientes[15]:

- $Val(\phi \wedge \psi, \psi)$ *(conj. elim.)*
- $Val(\top, \phi \vee \neg\phi)$ *(tercero excluído)*
- $Val(\phi \wedge (\phi \supset \psi), \psi)$ *(modus ponens)*
- $Val(\neg\neg\phi, \phi)$ *(doble negación)*

Nótese que estas fórmulas son versiones internalizadas de ciertas *reglas* que se cumplen en STV. Pero, curiosamente, la presencia de un predicado de validez en el lenguaje objeto hace que sea posible expresar *metarreglas* también. A la luz de esto, es razonable exigir que un predicado ingenuo de validez satisfaga no sólo las reglas correspondientes, sino también las metarreglas correspondientes. Por ejemplo, podemos expresar metarreglas como:

- $Val(\phi, \psi) \wedge Val(\phi, \phi_1) \supset Val(\phi, \psi \wedge \phi_1)$ *(R∧)*
- $Val(\phi, \psi) \supset Val(\phi, \psi \vee \phi_1)$ *(R∨)*
- $Val(\phi \wedge \psi, \phi_1) \supset Val(\phi, \psi \supset \phi_1)$ *(R⊃)*
- $Val(\phi, \psi \vee \phi_1) \supset Val(\phi \wedge \neg\phi_1, \psi)$ *(L¬)*

La cuestión que quiero abordar en este punto es si STV es capaz de *probar* estas fórmulas. En cuanto a las fórmulas del primer grupo, está claro que todo secuente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ que tenga una prueba en STV es tal que podemos probar en STV también la afirmación que expresa este hecho, esto es: $\Rightarrow Val(\bigwedge \Gamma, \bigvee \Delta)$. En otras palabras, el llamado *esquema V* se cumple[16]:

$$\Gamma \Rightarrow \Delta \text{ si y sólo si } \Rightarrow Val(\bigwedge \Gamma, \bigvee \Delta).$$

[15] A continuación ofrezco versiones simplificadas de ciertas reglas. Estrictamente hablando, las reglas deberían mencionar a Γ y a Δ; lo mismo se aplica a los ejemplos que involucran metarreglas, que introduciré más abajo. Ignoraré estas complicaciones para mejorar la legibilidad de las fórmulas. Por el mismo motivo, también omitiré los símbolos $\langle\rangle$. De modo que en lugar de escribir $Val(\langle\phi\rangle, \langle\psi\rangle)$ usaré $Val(\phi, \psi)$, aunque Val sea un predicado, y no un operador.

[16] Por supuesto, habrá secuentes *inválidos* para los cuales no hay en STV una prueba de la afirmación que expresa este hecho, pero ese es otro asunto. Diré algo más sobre esto (aunque en relación al enfoque no contractivo) en el último capítulo.

¿Qué ocurre con las metarreglas? ¿Es STV capaz de internalizar sus propias metarreglas? La respuesta es 'no'. Seré un poco más preciso.

Definición Diré que una teoría $\mathcal{T}$ *internaliza* una metarregla $\mathcal{R}$ de la forma

$$\mathcal{R}\,\frac{\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1 \qquad \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2}{\Gamma \Rightarrow \Delta}$$

si $\mathcal{T}$ prueba

$$Val(\bigwedge \Gamma_1, \bigvee \Delta_1), Val(\bigwedge \Gamma_2, \bigvee \Delta_2) \Rightarrow Val(\bigwedge \Gamma, \bigvee \Delta).$$ [17]

La idea detrás de esta definición debería ser clara. Podemos exigir que STV sea capaz de internalizar todas las metarreglas (y sólo ellas) que se cumplen de acuerdo con su propio estándar de validez. Por ejemplo, debería haber pruebas en STV de (versiones internalizadas de) las (metar)reglas $R\neg$, $L\wedge$, LW, etc. pero no debería haber una prueba de (una versión internalizada de) la (metar)regla de corte.

Desgraciadamente, es posible mostrar lo siguiente:

Proposición 5.5.1 *STV no puede internalizar algunas de sus metarreglas.*

Daré un ejemplo para convencer al lector de que esto es así. Consideremos nuevamente (una versión simplificada de) $L\neg$:

$$\Rightarrow Val(\phi, \psi \vee \chi) \supset Val(\phi \wedge \neg\chi, \psi).$$

Ya que corte no está disponible en STV, sólo necesitamos analizar sus reglas de introducción (operacionales y estructurales). Pero está claro que no será posible obtener una derivación de este secuente si las única reglas para introducir Val son LVal y RVal. En particular, necesitamos una versión más fuerte de RVal. Más precisamente, RVal no puede usarse para derivar este secuente porque es una regla libre de contexto. Es libre de contexto porque así evitamos que ciertos secuentes indeseables tengan prueba, como $\phi \supset \psi \Rightarrow Val(\phi, \psi)$. Si tuviera contexto, la regla luciría así:

$$\frac{\Gamma, \phi \Rightarrow \psi, \Delta}{\Gamma \Rightarrow Val(\phi, \psi), \Delta}$$

[17] También podria pedirse aquí que:

$$\Rightarrow Val(\bigwedge \Gamma_1, \bigvee \Delta_1) \wedge Val(\bigwedge \Gamma_2, \bigvee \Delta_2) \supset Val(\bigwedge \Gamma, \bigvee \Delta).$$

Y, de hecho, si STV prueba lo primero también probará lo segundo en virtud de las reglas L$\wedge$ y R$\supset$. Pero por razones que se aclararán en el capítulo 7, usaré la primera formulación.

Pero entonces estaríamos en condiciones de construir la siguiente derivación:

$$\dfrac{\mathrm{L}\supset \dfrac{\phi \Rightarrow \phi \qquad \psi \Rightarrow \psi}{\phi \supset \psi, \phi \Rightarrow \psi}}{\phi \supset \psi \Rightarrow Val(\phi, \psi)}$$

Sin embargo, hay una forma de evitar este tipo de secuentes indeseables sin hacer que RVal sea una regla completamente libre de contexto, como veremos en la sección siguiente:

5.5.2. Fortalecer las reglas

Como ya anticipé, es posible fortalecer las reglas RVal y LVal de tal modo que toda metarregla sea internalizable. Comenzaré con RVal[18].

$$\mathrm{R}Val^{+}\ \dfrac{Val(\bigwedge \Gamma, \bigvee \Delta), \Pi \Rightarrow \Sigma}{Val(\bigwedge \Gamma, \bigvee \Delta) \Rightarrow Val(\bigwedge \Pi, \bigvee \Sigma)}$$

Aunque en lo que sigue discutiremos esta versión reforzada de RVal, en realidad, siendo estrictos, necesitamos la siguiente versión más general de esta regla:

$$\mathrm{R}Val^{+}\ \dfrac{Val(\bigwedge \Gamma_1, \bigvee \Delta_1), ..., Val(\bigwedge \Gamma_n, \bigvee \Delta_n), \Gamma \Rightarrow \Delta}{Val(\bigwedge \Gamma_1, \bigvee \Delta_1), ..., Val(\bigwedge \Gamma_n, \bigvee \Delta_n) \Rightarrow Val(\bigwedge \Gamma, \bigvee \Delta)}$$

En cuanto a LVal, simplemente la generalizaré a conjuntos:

$$\mathrm{L}Val^{+}\ \dfrac{}{Val(\bigwedge \Gamma, \bigvee \Delta), \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

Por supuesto, RVal^{+} implica RVal y LVal^{+} implica LVal. Utilizaré el nombre STV^{+} para referirme al sistema obtenido al reemplazar en STV la regla LVal por LVal^{+} y la regla RVal por RVal^{+}[19]. STV^{+} es más fuerte que STV. ¿Pero qué tanto más fuerte? La buena noticia es que es sencillo mostrar que STV^{+} puede internalizar sus propias metarreglas, incluyendo las metarreglas LVal^{+} y RVal^{+}, que gobiernan el predicado de validez.

[18] Esta metarregla debería resultarle familiar a aquellos que están habituados a presentar la lógica modal $S4$ por medio de un cálculo de secuentes.

[19] Es interesante notar que podríamos utilizar un sistema aún más general añadiendo la siguiente versión (más fuerte) de RVal (aquí sigo parcialmente a [112]):

Proposición 5.5.2 *STV^+ internaliza todas sus metarreglas.*

Prueba Daré un ejemplo de una regla operacional (R$\wedge$) y otro de una de las regla para el predicado de validez (RVal). La prueba de la internalización de $R\wedge$ es como sigue:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{Val(\bigwedge\Gamma,\phi\vee\bigvee\Delta),\Gamma\Rightarrow\phi,\Delta}\,\mathrm{L}Val^+}{Val(\bigwedge\Gamma,\phi\vee\bigvee\Delta),Val(\bigwedge\Gamma,\psi\vee\bigvee\Delta),\Gamma\Rightarrow\phi,\Delta}\,\mathrm{L}W \qquad \dfrac{\dfrac{}{Val(\bigwedge\Gamma,\psi\vee\bigvee\Delta),\Gamma\Rightarrow\psi,\Delta}\,\mathrm{L}Val^+}{Val(\bigwedge\Gamma,\phi\vee\bigvee\Delta),Val(\bigwedge\Gamma,\psi\vee\bigvee\Delta),\Gamma\Rightarrow\psi,\Delta}\,\mathrm{L}W}{\dfrac{Val(\bigwedge\Gamma,\phi\vee\bigvee\Delta),Val(\bigwedge\Gamma,\psi\vee\bigvee\Delta),\Gamma\Rightarrow\phi\wedge\psi,\Delta}{Val(\bigwedge\Gamma,\phi\vee\bigvee\Delta),Val(\bigwedge\Gamma,\psi\vee\bigvee\Delta)\Rightarrow Val(\bigwedge\Gamma,(\phi\wedge\psi)\vee\bigvee\Delta)}\,\mathrm{R}Val^+}\,\mathrm{R}\wedge$$

Para RVal^+, tenemos:

$$\mathrm{R}Val^+\,\dfrac{\mathrm{R}Val^+\,\dfrac{\mathrm{L}Val^+\,\dfrac{}{Val(Val(\bigwedge\Gamma,\bigvee\Delta)\wedge\bigwedge\Pi,\bigvee\Sigma),Val(\bigwedge\Gamma,\bigvee\Delta),\Pi\Rightarrow\Sigma}}{Val(Val(\bigwedge\Gamma,\bigvee\Delta)\wedge\bigwedge\Pi,\bigvee\Sigma),Val(\bigwedge\Gamma,\bigvee\Delta)\Rightarrow Val(\bigwedge\Pi,\bigvee\Sigma)}}{Val(Val(\bigwedge\Gamma,\bigvee\Delta)\wedge\bigwedge\Pi,\bigvee\Sigma)\Rightarrow Val(Val(\bigwedge\Gamma,\bigvee\Delta),Val(\bigwedge\Pi,\bigvee\Sigma)}$$

∎

Este resultado es particularmente atractivo para aquellos interesados en el proyecto de internalizar la noción de validez dentro de una teoría, esto es, sin apelar a recursos metateóricos. Más aún, LVal^+ y RVal^+ parecen reglas plausibles en sí mismas, esto es, independientemente de su rol en la internalización de las metarreglas. De hecho, podría argumentarse que cualquiera interesado en el proyecto de construir teorías capaces de representar su propio concepto de validez debería mirar con buenos ojos la idea de incorporar reglas como éstas.

5.5.3. Internalizar corte

Aunque este enfoque parece prometedor, resulta que RVal^+ junto con algunas de las otras reglas de STV son suficientes para dar una prueba de una versión internalizada de una instancia indeseable de la regla de corte. Consideremos otra vez la oración π y recordemos que siempre que la regla LVal y la regla de contracción estén disponibles hay una prueba de $Val(\pi,\bot)\Rightarrow\bot$. Luego, razonamos del siguiente modo:

$$\dfrac{\Gamma,\Pi\Rightarrow\Sigma,\Delta}{\Gamma\Rightarrow Val(\bigwedge\Pi,\bigvee\Sigma),\Delta}\ \text{donde } \Gamma \text{ y } \Delta \text{ son puramente lógicos}$$

(Diré que una fórmula es puramente lógica si es de la forma $Val(\phi,\psi)$ o se obtiene de fórmulas de ese tipo aplicando las operaciones lógicas usuales; por supuesto, esto puede definirse recursivamente). Sin embargo, para el propósito de internalizar reglas y metarreglas, la versión que ofrecí en el cuerpo principal del texto es suficiente.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{Val(\pi,\bot)\Rightarrow\bot}}{Val(\top,\pi),Val(\pi,\bot),\top\Rightarrow\bot}\ \mathrm{L}W}{Val(\top,\pi),Val(\pi,\bot)\Rightarrow Val(\top,\bot)}\ \mathrm{R}Val^{+}
$$

Lo que esta breve derivación muestra es que hay una instancia de la regla de corte que puede ser internalizada. Pero obsérvese que es precisamente π, una instancia particularmente problemática para la cual corte no debería cumplirse. De modo que, al menos *prima facie*, esto es un problema para el enfoque que rechaza la regla de corte[20].

Es más, si utilizamos una versión más fuerte de $\mathrm{L}Val^+$, *corte* puede internalizarse de forma irrestricta (esto es, se internalizan todas las instancias de la regla y no solamente la instancia que involucra a π). Pues consideremos ahora la siguiente regla para introducir el predicado de validez a la izquierda de un secuente (la regla es de [112], aunque la he modificado mínimamente):

$$
\dfrac{\Gamma\Rightarrow\Phi,\Delta \qquad \Pi,\Psi\Rightarrow\Sigma}{\Gamma,\Pi,Val(\bigwedge\Phi,\bigvee\Psi)\Rightarrow\Delta,\Sigma}
$$

Con esta regla es posible internalizar *corte* en STV^+ (sin usar la regla de corte) como sigue:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\phi\Rightarrow\phi}{\Delta,\phi\Rightarrow\phi,\Delta}\ LW,RW \qquad \Gamma\Rightarrow\Gamma}{\Gamma,Val(\bigwedge\Gamma,\phi\vee\bigvee\Delta)\Rightarrow\phi,\Delta}}{\Gamma,\Pi,Val(\bigwedge\Gamma,\phi\vee\bigvee\Delta)\Rightarrow\phi,\Pi,\Delta}\ LW,RW \qquad \Sigma\Rightarrow\Sigma}{\Gamma,\Pi,Val(\bigwedge\Gamma,\phi\vee\bigvee\Delta),Val(\bigwedge\Pi\wedge\phi,\bigvee\Sigma)\Rightarrow\Delta,\Sigma}}{Val(\bigwedge\Gamma,\phi\vee\bigvee\Delta),Val(\bigwedge\Pi\wedge\phi,\bigvee\Sigma)\Rightarrow Val(\bigwedge\Gamma\wedge\bigwedge\Pi,\bigvee\Delta\vee\bigvee\Sigma)}\ VP^{+}
$$

De modo que, de una forma u otra, STV internaliza la regla de corte, a pesar de declararla inválida.

¿Cómo puede responder el partidario del enfoque no transitivo? En lo que queda de esta subsección consideraré varias opciones diferentes, aunque no

[20] Un problema similar ocurre si introducimos un predicado de verdad ingenuo a la teoría. Ripley [88] ha notado que si tenemos un predicado de verdad en STV es posible probar que los argumentos válidos preservan verdad, es decir:

$$\Rightarrow Val(\phi,\psi)\supset(Tr(\phi)\supset Tr(\psi)).$$

Pero nótese que esto es un problema en este enfoque, ya que la noción de validez de ST es una que no debe identificarse con la preservación de algún valor.

pretendo ser exhaustivo. Mi posición al respecto es que, en última instancia, ninguna de las respuestas es del todo satisfactoria.

La primera consiste simplemente en rechazar RVal^+. Después de todo, si sólo vale RVal, únicamente podemos probar $Val(\top, \pi), Val(\pi, \bot), \top \Rightarrow \bot$, y eso no parece tan grave. Téngase en cuenta, de todas formas, que si no ponemos nada en lugar de RVal^+[21] estaríamos condenando al fracaso el proyecto de internalizar las metarreglas. Como hemos visto, adoptar STV no es suficiente, en este sentido, para llevar a cabo al proyecto de representar la noción de validez dentro de nuestras teorías. Por ende, pareciera que la opción de volver a STV no es satisfactoria.

La segunda opción consiste en aceptar la objeción pero sugerir que no es tan problemática. La idea es que la regla RVal^+ es correcta y, por tanto, la derivación de la instancia internalizada de corte puede llevarse a cabo. Sin embargo, dado que $\Rightarrow$ no satisface corte, no podemos pasar de $Val(\top, \pi) \wedge Val(\pi, \bot) \Rightarrow Val(\top, \bot)$ y $\Rightarrow Val(\top, \pi) \wedge Val(\pi, \bot)$ a $\Rightarrow Val(\top, \bot)$. Esto no debería ser una sorpresa en el contexto de una teoría como STV^+, ya que ciertas oraciones tales como π son precisamente la razón por la cual la regla de corte falla para $\Rightarrow$[22]. Más aún, no es difícil ver que, al menos con la primera versión de LVal, la regla de corte no puede internalizarse de manera irrestricta, por lo que no hemos internalizado esta regla en el sentido de la definición de internalización que ofrecí más arriba.

Por supuesto, podría objetarse a esto que, por una parte, la segunda versión de LVal sí es suficiente para internalizar corte de manera irrestricta. Y, por otra parte, que el tener una prueba de $\Rightarrow Val(\top, \pi) \wedge Val(\pi, \bot) \supset Val(\top, \bot)$ ya es inaceptable, puesto que la teoría internaliza una instancia de corte que debería rechazar. De hecho, no habría ningún problema si la instancia de corte que está siendo internalizada es una que no es paradójica, pero el punto es que la instancia es precisamente π, la oración que motiva el rechazo de la regla de corte en primer lugar.

La tercera opción es más radical. Consiste en debilitar más aún la lógica rechazando la(s) regla(s) de monotonía. Esto evitaría la internalización de la instancia problemática de corte en STV^+. Esta opción podría recibir respaldo de aquellos que creen que hay motivos independientes para rechazar esta(s) regla(s). El costo es sin embargo muy alto. Por un lado, al rechazar monotonía la potencia deductiva del sistema resultante se disminuye sustancialmente.

[21] En cualquier caso, es interesante preguntarse si hay una versión más débil de RVal^+ que pueda usarse para internalizar las metarreglas y que al mismo tiempo evite la internalización de la instancia problemática de corte. Pues todo lo que he mostrado aquí es que la forma más obvia de fortalecer RVal genera problemas.

[22] Por supuesto, $\Rightarrow$ *es* transitiva en el sentido de que $\phi_1 \supset \phi_2, \phi_2 \supset \phi_3 \Rightarrow \phi_1 \supset \phi_3$ tiene prueba, pero es la metarregla de transitividad la que no se cumple.

Ya no será el caso de que toda inferencia clásicamente válida es válida, lo cual es una de las principales motivaciones detrás del enfoque no transitivo. Por otro lado, y esto es más importante aún, ya no será posible internalizar todas las metarreglas como lo hicimos antes. En particular, el uso de las reglas de monotonía parece necesario en la internalización de las metarreglas que involucran dos premisas.

En resumen, en esta subsección analicé la posibilidad de representar la noción de validez en una dimensión que hasta ahora ha sido ignorada en la bibliografía: las metarreglas, es decir, enunciados que establecen que si ciertos argumentos son válidos, otro argumento es válido también. He demostrado que STV, si bien puede ofrecer un tratamiento adecuado de la paradoja de validez, es incapaz de internalizar sus propias metarreglas. Propuse una extensión de STV a la que llamé STV^+. Esta teoría sí internaliza todas sus metarreglas. Sin embargo, STV^+ también internaliza algunas instancias de metarreglas inválidas, como corte. Exploré tres alternativas para hacer frente a este problema. En primer lugar, es posible volver a STV y rechazar el proyecto de internalizar las metarreglas. En segundo lugar, exploré la idea de aceptar el argumento pero minimizar su importancia, sugiriendo que la internalización de algunas instancias de corte no es algo tan malo. Por último, es posible restringir la lógica aún más, al rechazar las reglas de monotonía. Aunque creo que ninguna de estas alternativas es demasiado atractiva, dejaré esta cuestión -y la posibilidad de encontrar diferentes alternativas- para otra ocasión.

Capítulo 6

Teorías no contractivas

6.1. Las reglas de contracción estructural y las paradojas

Hay varias teorías que escapan a las paradojas rechazando las reglas estructurales de contracción. Cada una de estas teorías ofrece una justificación diferente de la falla de contracción. En este capítulo analizaré tres teorías no contractivas: la primera está basada en un sistema de lógica lineal, que llamaré LL; la segunda se basa en el fragmento multiplicativo de la lógica afín, y recibirá el nombre de MLA; la tercera se basa en un cálculo en el que disponemos de dos formas de juntar premisas, y será llamada DM[1]. En El capítulo siguiente voy a explorar un enfoque algo diferente en el que el rechazo de las reglas de contracción se combina con el rechazo de alguna(s) regla(s) operacional(es).

La estructura de este capítulo difiere de la de los capítulos anteriores. En lugar de ofrecer una presentación semántica junto con un procedimiento de prueba para las teorías no contractivas, lo que haré será emplear un enfoque puramente sintáctico. Esto se debe a que algunas de las teorías no contractivas carecen de una formulación semántica conceptualmente esclarecedora[2]. Además, en este capítulo ignoraré mayormente la parte cuantificacional del lenguaje, de modo que los sistemas que presentaré carecen de reglas para los cuantificadores[3]. Esto es así por un par de razones. En primer lugar, la

[1]Por razones de espacio, estoy dejando de lado otras teorías no contractivas. Por ejemplo, la que propone Lionel Shapiro en [96] y la que propone Zach Weber en [107].

[2]Todas ellas poseen semánticas algebraicas, pero no investigaremos ese tipo de enfoque semántico aquí.

[3]Esto no quiere decir que los sistemas sean puramente proposicionales, ya que utilizaremos predicados, nombres, variables, etc. Pues necesitamos alguna forma de construir

presentación y la posterior evaluación de estas teorías se simplificará en gran medida, y en segundo lugar, no hay consenso acerca de cómo tratar a los cuantificadores en las lógicas no contractivas. Diré más sobre este asunto más adelante.

6.2. Las paradojas como falacias de equívoco

La primera teoría que voy a considerar es la que se basa en la lógica lineal. La lógica lineal no sólo rechaza las reglas de contracción estructural sino también las reglas de monotonía[4]. Recordemos el sistema CL de la sección 1.3. CL es un cálculo de secuentes que captura la relación clásica de consecuencia: un secuente tiene una prueba en CL si y sólo si es clásicamente válido. El cálculo LL (por 'lógica lineal') puede obtenerse a partir de CL de la siguiente forma:

Definición (*El sistema LL*) Sean Γ, Δ, Π y Σ multiconjuntos (finitos) de fórmulas, sean ϕ y ψ fórmulas. El sistema LL está dado por los siguientes secuentes iniciales y reglas:

Secuentes iniciales

$$\text{Ax}\,\frac{}{\phi \Rightarrow \phi}$$

Reglas estructurales

$$\mathit{corte}\,\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \phi \qquad \phi, \Pi \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}$$

Reglas operacionales

oraciones autorreferenciales para analizar qué ocurre con las oraciones paradójicas en este enfoque. Hay formas conocidas de hacer esto sin introducir cuantificadores (véase, por ejemplo [37], cap. 4).

[4]Hay muchas razones para cuestionar las reglas de monotonía. Por ejemplo, podrían ser cuestionadas por razones vinculadas a la relevancia que las premisas deben tener con respecto a la conclusión, ya que una lógica sin las reglas de monotonía evita las paradojas de la implicación material. También podrían ser cuestionadas por motivos vinculados a la paraconsistencia, ya que sin las reglas de monotonía no hay manera de probar cualquier oración a partir de una contradicción. Finalmente, también podrían ser cuestionadas por razones vinculadas a la preservación de información, ya que las reglas de monotonía hacen que siempre sea posible añadir información, y esto puede no ser adecuado en ciertos contextos. Voy a ignorar todas estas cuestiones aquí. Ya hemos visto que el papel de las reglas de monotonía en la derivación de las paradojas es mínimo. En consecuencia, aquí solo discutiré la falla de contracción, que desempeña un papel más fundamental.

$$\text{L}\neg\,\frac{\Gamma \Rightarrow \phi, \Delta}{\Gamma, \neg\phi \Rightarrow \Delta} \qquad \text{R}\neg\,\frac{\Gamma, \phi \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \neg\phi, \Delta}$$

$$\text{L}\wedge\,\frac{\Gamma, \phi \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \phi \wedge \psi \Rightarrow \Delta} \qquad \text{R}\wedge\,\frac{\Gamma \Rightarrow \phi, \Delta \qquad \Gamma \Rightarrow \psi, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \phi \wedge \psi, \Delta}$$

$$\text{L}\wedge\,\frac{\Gamma, \psi \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \phi \wedge \psi \Rightarrow \Delta} \qquad \text{R}\vee\,\frac{\Gamma \Rightarrow \phi, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \phi \vee \psi, \Delta}$$

$$\text{L}\vee\,\frac{\Gamma, \phi \Rightarrow \Delta \qquad \Gamma, \psi \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \phi \vee \psi \Rightarrow \Delta} \qquad \text{R}\vee\,\frac{\Gamma \Rightarrow \psi, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \phi \vee \psi, \Delta}$$

$$\text{L}\otimes\,\frac{\Gamma, \phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \phi \otimes \psi \Rightarrow \Delta} \qquad \text{R}\otimes\,\frac{\Gamma \Rightarrow \phi, \Delta \qquad \Pi \Rightarrow \psi, \Sigma}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \phi \otimes \psi, \Delta, \Sigma}$$

$$\text{L}\oplus\,\frac{\Gamma, \phi \Rightarrow \Delta \qquad \Pi, \psi \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \Pi, \phi \oplus \psi \Rightarrow \Delta, \Sigma} \qquad \text{R}\oplus\,\frac{\Gamma \Rightarrow \phi, \psi, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \phi \oplus \psi, \Delta}$$

$$\text{L}\!\to\,\frac{\Gamma \Rightarrow \phi, \Delta \qquad \Pi, \psi \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \Pi, \phi \to \psi \Rightarrow \Delta, \Sigma} \qquad \text{R}\!\to\,\frac{\Gamma, \phi \Rightarrow \psi, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \phi \to \psi, \Delta}$$

Para simplificar la presentación he omitido los así llamados 'exponenciales' y también he omitido las constantes multiplicativas de verdad y falsedad (más abajo explicaré estos conceptos). Para obtener el sistema LL^+ introducimos las ya familiares reglas LTr y RTr que gobiernan el comportamiento del predicado veritativo $Tr(x)$.

LL es una teoría sumamente interesante.

Proposición 6.2.1 (Hechos sobre LL) *Los siguientes secuentes tienen prueba en LL:*

- $\Rightarrow \phi \to \phi$
- $\Rightarrow (\phi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\phi \to \chi))$
- $\Rightarrow (\phi \to (\psi \to \chi)) \to (\psi \to (\phi \to \chi))$
- $\Rightarrow \neg\neg\phi \to \phi$
- $\Rightarrow (\phi \to \neg\psi) \to (\psi \to \neg\phi)$
- $\Rightarrow (\phi \wedge \psi) \to \phi$
- $\Rightarrow (\phi \wedge \psi) \to \psi$
- $\Rightarrow (\phi \to \psi) \wedge (\phi \to \chi) \to (\phi \to \psi \wedge \chi)$
- $\Rightarrow (\phi \vee \psi) \leftrightarrow \neg(\neg\phi \wedge \neg\psi)$

- $\Rightarrow (\phi \oplus \psi) \leftrightarrow (\neg\phi \rightarrow \psi)$
- $\Rightarrow (\phi \otimes \psi) \leftrightarrow \neg(\neg\phi \oplus \neg\psi)$

De hecho, estos secuentes, junto con las reglas de *modus ponens* y la regla de adjunción (de ϕ y ψ, infiera $\phi \wedge \psi$) pueden usarse para proporcionar un cálculo axiomático para LL (véase [64]).

Proposición 6.2.2 (Más hechos sobre LL) *Los siguientes secuentes no tienen prueba en LL:*
$\phi \Rightarrow \psi \rightarrow \phi$
$\phi \rightarrow (\phi \rightarrow \psi) \Rightarrow \phi \rightarrow \psi$

Prueba Véase [64]. ∎

No es difícil ver que para probar $\phi \rightarrow (\phi \rightarrow \psi) \Rightarrow \phi \rightarrow \psi$ necesitamos una de las reglas de contracción y que para probar $\phi \Rightarrow \psi \rightarrow \phi$ necesitamos una de las reglas de monotonía. Por ende, hay una conexión clara entre estos secuentes y las correspondientes reglas estructurales.

LL ha sido defendida por Mares y Paoli en [55] como una teoría ingenua de la verdad (y de la validez). Lo primero que debemos notar es que la ausencia de reglas de contracción y monotonía en LL (y en LL^+) nos proporciona una nueva manera de entender su relación de consecuencia. Mares and Paoli [55], p.454 explican la situación del siguiente modo:

> In general, when we say that some conclusion A follows from the premisses in Γ, we can mean either of two different things (at least):
>
> - given the rules of the logic at issue, we can extract the information that A from the combined information provided by the sentences in Γ;
> - Γ yields grounds for asserting A; i.e. whenever we accept Γ we are committed to accepting A.

La segunda idea es familiar. La primera idea se basa en el concepto de extracción de información, y es por lo menos discutible si dicho concepto posee las propiedades habituales de la relación de consecuencia. En particular, se podría argumentar que la noción de extracción de información no es monótona ni contractiva. La falla de monotonía puede explicarse diciendo que sólo podemos extraer la información transmitida por ψ de la información transmitida por ϕ si este último es relevante para el primero. La regla de monotonía nos permite agregar información irrelevante, por lo que no debería cumplirse. La idea detrás de la falla de contracción es que las premisas deben entenderse como recursos concretos o como piezas de información que pueden utilizarse un número específico de veces en el transcurso de una derivación, debido a que podrían agotarse. Existen numerosas situaciones ordinarias donde es importante tener en cuenta los recursos disponibles. Por ejemplo, en un juicio no es lo mismo tener dos testigos que sitúan al sospechoso en la escena del crimen que tener solamente un testigo que lo hace. El juez podría inferir que el sospechoso es culpable en el primer escenario, pero tal vez considere que el tener sólo un testigo no es suficiente para condenar al acusado, por lo que en el segundo escenario podría declararlo inocente. Esto motiva el rechazo de la regla de contracción, ya que dos ocurrencias de la oración 'el sospechoso estaba en la escena del crimen' podrían ser suficientes para inferir 'el sospechoso es culpable', pero quizás una sola ocurrencia podría no serlo.

La ausencia de estas reglas estructurales hace que sea posible definir nuevas conectivas, éstas son $\otimes$ y $\oplus$. La primera es la conjunción multiplicativa (a veces también llamada 'fusión') y la segunda es la disyunción multiplicativa (a veces llamada 'fisión'). Estas expresiones son diferentes de la conjunción y disyunción aditivas $\wedge$ y $\vee$, respectivamente[5]. De modo que en LL tenemos que tener cuidado al formular las reglas para la conjunción y la disyunción[6].

Una forma de entender la distinción aditivo/multiplicativo es señalar que ciertas conectivas, como la conjunción y la disyunción, representan expresiones ambiguas del lenguaje natural. Es decir, para estas expresiones, hay dos lecturas posibles, una lectura extensional o aditiva, y una lectura intensional o multiplicativa. El problema con la lógica clásica es que es incapaz de hacer esta distinción, por lo que confunde las dos lecturas. Por ejemplo, en el sistema CL que presenté en el capítulo 1, la regla para introducir una conjunción a la izquierda podría tener la forma de L$\wedge$ o la forma de L$\otimes$, pues ambas reglas son interderivables. Análogamente, la regla para la introducción de una conjunción a la derecha podría tener la forma de R$\wedge$ (es decir, una forma donde el contexto debe ser compartido) o la forma de R$\otimes$ (es decir, una forma en la que el contexto puede no ser compartido). Una vez más,

[5] La terminología aquí varía. En ocasiones, en lugar de utilizar la distinción aditivo/multiplicativo, es común el uso de la distinción extensional/intensional, o reticular/grupoide (*lattice-theoretic/group-theoretic*). Esto no será importante en lo que sigue.

[6] De hecho, como ya señalé en el capítulo 1, lo mismo es cierto para el condicional. En mi formulación de LL, no obstante, he dejado de lado el condicional aditivo $\supset$ y sólo he dado reglas para el condicional multiplicativo $\to$ (la razón es que es posible usar $\to$ para dar una elegante axiomatización de LL). De hecho, no es necesario tratar a la expresión $\to$ como primitiva, ya que es definible mediante $\neg$ y alguna de las otras conectivas multiplicativas (al igual que $\supset$ puede definirse a partir de $\neg$ y alguna de las otras conectivas aditivas).

no importa, ya que ambas son interderivables. De hecho, en toda lógica que contenga las dos reglas de monotonía y las dos reglas de contracción, los siguientes cuatro pares de reglas son interderivables: L$\wedge$ y L$\otimes$, R$\wedge$ y R$\otimes$, L$\vee$ y L$\oplus$, y R$\vee$ y R$\oplus$. A modo de ilustración, mostraré la interderivabilidad del primer par (los casos restantes son similares):

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma, \phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \phi \wedge \psi, \psi \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{L}\wedge}{\Gamma, \phi \wedge \psi, \phi \wedge \psi \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{L}\wedge}{\Gamma, \phi \wedge \psi \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{L}C \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma, \phi \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \phi, \psi \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{L}W}{\Gamma, \phi \otimes \psi \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{L}\otimes$$

Visto de una forma ligeramente distinta, lo que esto muestra es que si la lógica es monótona y contractiva, podemos probar los siguientes secuentes: $\phi \wedge \psi \Leftrightarrow \phi \otimes \psi$ y $\phi \vee \psi \Leftrightarrow \phi \oplus \psi$. Por otra parte, si rechazamos las reglas de contracción, ya no tenemos $\phi \wedge \psi \Rightarrow \phi \otimes \psi$ ni $\phi \oplus \psi \Rightarrow \phi \vee \psi$. Y, por último, si rechazamos las reglas de monotonía, no es posible probar $\phi \otimes \psi \Rightarrow \phi \wedge \psi$ ni $\phi \vee \psi \Rightarrow \phi \oplus \psi$.

Un hecho interesante es que aunque ninguna de las dos disyunciones tiene todas las propiedades de la disyunción clásica, muchos teoremas clásicos valen para al menos una de ellas (consideraciones similares se aplican a las dos conjunciones). Por ejemplo, sabemos que
$\phi \oplus \phi \Rightarrow \phi$
no se cumple, ya que $\oplus$ es una conectiva no idempotente, mientras que, por supuesto, esto se cumple para $\vee$, la cual sí es idempotente. Análogamente, no es posible probar
$\Rightarrow \phi \vee \neg\phi$,
porque sin contracción la ley de tercero excluido no vale para $\vee$. Pero esta ley sí se cumple para $\oplus$.

Una desambiguación similar es necesaria en el caso de la relación de consecuencia: hay una relación de consecuencia interna y una relación de consecuencia externa. Ya he explicado esta distinción en el capítulo anterior, en el contexto del enfoque no-transitivo. La distinción se aplica también aquí, y es muy importante. Mientras que la relación de consecuencia interna $\Rightarrow$ no es contractiva ni monótona, la relación de consecuencia externa sí lo es.

En la terminología de Mares y Paoli, la idea de fondo en este enfoque no es debilitar la lógica clásica, sino eliminar la ambigüedad presente en la lógica clásica. Es decir, no se afirma que ciertos principios clásicos deben ser rechazados porque son inválidos, sino que deben ser desambiguados porque son ambiguos. Esta es, creo, la principal diferencia filosófica con los enfoques operacionales que consideré en los capítulos 2, 3 y 4.

Mares y Paoli señalan que en el contexto de LL podemos ver que las paradojas autorreferenciales no son más que falacias de equívoco (o ambigüedad). Surgen simplemente debido a esta ambigüedad que afecta a la lógica clásica. Por un lado, las paradojas operacionales (i.e. las que involucran constantes lógicas) surgen porque no hacemos la distinción entre expresiones aditivas y multiplicativas. Por otro lado, las paradojas puramente estructurales (es decir, las paradojas que no involucran ninguna constante lógica pero que usan, en cambio, un predicado validez o algún otro predicado lógico) se producen porque no hacemos la distinción entre validez interna y validez externa.

Daré un par de ejemplos. Hemos visto que, a grandes rasgos, la paradoja del mentiroso requiere la ley de tercero excluido, la regla de explosión, las reglas de contracción y la regla de corte. Sin embargo, en LL la ley de tercero excluido no vale para $\vee$, sino sólo para $\oplus$. Y $\oplus$ es una conectiva no idempotente, debido a que la regla de contracción a la derecha falla. De modo que no es posible obtener λ a partir de $\lambda \oplus \lambda$. Por lo tanto, gracias a la posibilidad de trazar una distinción entre $\wedge$ y $\otimes$ en LL, estamos a salvo de la paradoja del mentiroso. De modo similar, la regla de explosión no se cumple para $\wedge$ en LL, sino sólo para $\otimes$. Y $\otimes$ es no idempotente ya que la regla de contracción a la izquierda falla. De modo que no es posible obtener $\lambda \otimes \lambda$ a partir de λ. Por lo tanto, nuevamente estamos a salvo, esta vez gracias a la distinción entre $\vee$ y $\oplus$.

Mi segundo ejemplo es la paradoja de la validez. Aquí podemos utilizar la distinción entre validez interna y externa. Mientras que las reglas de contracción no se cumplen para la noción de validez interna, evitando así el paso en que contraemos las dos ocurrencias de la oración π, la regla RVal falla para la noción de validez externa, ya que del hecho de que una oración ϕ implica *externamente* una oración ψ no podemos inferir que $Val(\langle\phi\rangle, \langle\psi\rangle)$, donde Val representa la noción interna de validez. Así, una vez más, estamos a salvo.

6.2.1. ¿Problemas?

No tengo muchas objeciones en contra de la teoría de la verdad (y la validez) basada en LL. De hecho, en el capítulo 7 voy a defender una teoría similar. Con todo, hay un par de cuestiones sutiles que me gustaría mencionar. Comenzaré señalando la que, según creo, es la dificultad más evidente de este tipo de enfoque. Aunque la explicación de la noción de consecuencia en términos de extracción de información parece una razón al menos sensata para rechazar las reglas de contracción en los contextos en los que se están evaluando testimonios o en escenarios similares, es difícil ver cómo esta explicación podría dar cuenta de la falla de contracción para oraciones paradójicas. Mares y Paoli sugieren que las paradojas son resueltas de forma gratuita, en el sentido siguiente: dado que hay razones independientes para rechazar contracción, no necesitamos ningún hecho adicional vinculado con las oraciones paradójicas para motivar ese rechazo. Sin embargo, esto parece poco convincente. Deja sin explicar por qué el paso inferencial de $\lambda, \lambda \Rightarrow$ a $\lambda \Rightarrow$ no se cumple (o, de forma similar, por qué el paso inferencial de $\Rightarrow \lambda, \lambda$ a $\Rightarrow \lambda$ no se cumple). Idealmente, los defensores de este enfoque deberían extender su explicación de la relación de consecuencia en términos de extracción de información a oraciones como λ.

Una segunda cuestión tiene que ver con la posibilidad de definir cuantificadores multiplicativos en LL. Por supuesto, podemos definir cuantificadores aditivos de la forma usual en este marco, pero como la cuantificación universal (existencial) es habitualmente entendida como una especie de conjunción (disyunción) generalizada, la presencia de dos conjunciones (disyunciones) parece exigir la presencia de dos cuantificadores universales (existenciales). Esto es particularmente preocupante para los interesados en el concepto de verdad. Si la verdad ha de servir como un dispositivo lingüístico que (quizás entre otras cosas) posibilita la expresión de cuantificaciones universales (existenciales) restringidas, entonces debemos tener los recursos apropiados en nuestra teoría de la verdad para que esto pueda llevarse a cabo.

6.3. El fragmento multiplicativo

En esta sección presentaré un sistema no contractivo que incorpora las reglas de monotonía. Si tomamos LL y le añadimos las reglas LW y RW obtenemos lo que usualmente se conoce como 'lógica afín'.

Definición (*El sistema* LA) El sistema LA es idéntico a LL excepto porque le añadimos las reglas LW y RW.

Nótese que ahora el secuente 'irrelevante' $\phi \Rightarrow \psi \rightarrow \phi$ tiene ahora una prueba (por supuesto, $\phi \rightarrow (\phi \rightarrow \psi) \Rightarrow \phi \rightarrow \psi$ aún no tiene prueba), de modo que podemos obtener una axiomatización para LA tomando la axiomatización que ofrecí en la sección anterior para LL y añadiéndole la oración $\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \phi)$ como axioma.

LA nos ofrece un enfoque alternativo a LL para lidiar con las paradojas de la verdad y la validez. En particular, resulta interesante considerar una sublógica de LA.

Definición (*El sistema* MLA) Este sistema está dado por el fragmento *multiplicativo* de la lógica afín. Esto es, MLA se obtiene de LA eliminando las reglas para $\wedge$ y $\vee$[7].

Como es habitual, podemos agregar reglas para la noción de verdad a MLA, obteniendo así el sistema MLA^+. Este sistema ha sido defendido por Elia Zardini en [111] y en otros trabajos como una lógica adecuada para la noción de verdad y para otros conceptos semánticos[8].

A diferencia de Mares y Paoli, Zardini explica la falla de contracción sin apelar a la idea de extracción de información. Esto es, desde mi punto de vista, una buena decisión, ya que la explicación basada en la idea de extracción de información no era de utilidad para explicar por qué la regla de contracción no se cumple para oraciones paradójicas. En su lugar, ofrece una explicación metafísica de la falla de contracción. La explicación está diseñada específicamente para dar cuenta de la falla de esta regla para oraciones paradójicas. A grandes rasgos, su idea es la siguiente. Las oraciones paradójicas expresan estados de cosas inestables. La inestabilidad se entiende aquí como una propiedad metafísica que poseen ciertos estados de cosas. El estado de cosas expresado por $\neg Tr\langle\lambda\rangle$ lleva al estado de cosas expresado por $Tr\langle\lambda\rangle$, el cual, a su vez, conduce al estado de cosas expresado por $\neg Tr\langle\lambda\rangle$, el cual, a su vez,... etc. Según Zardini ([111], p. 504):

> The instability of the former state-of-affairs consists in the fact that, since the state-of-affairs it would lead to is incompatible with it, to the extent that the latter obtained the former would not -although it is precisely the obtaining of the former that would lead to the obtaining of the latter.

Es precisamente esta inestabilidad lo que produce la falla de contracción, ya que la regla de contracción involucra en este caso la idea de que $Tr\langle\lambda\rangle$ implica tanto $Tr\langle\lambda\rangle$ como $\neg Tr\langle\lambda\rangle$. Pero entonces, el estado de cosas expresado por $Tr\langle\lambda\rangle$ conduce al estado de cosas expresado por $Tr\langle\lambda\rangle$ y al estado de cosas expresado por $\neg Tr\langle\lambda\rangle$, pero estos dos estados de cosas no pueden darse conjuntamente.

Otra diferencia importante entre la explicación de Zardini y la de Mares y Paoli es que en la primera no se postula ninguna ambigüedad en el lenguaje natural que afecte a la conjunción y a la disyunción. Dado que sólo tenemos disponible el fragmento multiplicativo del lenguaje, la conjunción y la disyunción se representan por medio de las conectivas multiplicativas $\otimes$ y $\oplus$, respectivamente. En otras palabras, el lenguaje carece de las conectivas

[7] Y, si hay reglas para $\supset$, debemos eliminarlas también.

[8] En realidad, Zardini propone un sistema que extiende MLA con cuantificadores multiplicativos. Tendré la oportunidad de decir algo sobre esta idea en un momento, pero por ahora, como anticipé, me abocaré a la parte libre de cuantificadores.

$\wedge$ y $\vee$ simplemente porque $\oplus$ y $\otimes$ son mejores candidatas a representar adecuadamente nuestras nociones informales de conjunción y disyunción[9]. Esta idea obtiene cierto apoyo del hecho de que MLA tiene varias propiedades interesantes. Por caso, al igual que las teorías paracompletas y paraconsistentes, MLA prueba todas las leyes de De Morgan para $\otimes$ y $\oplus$. Además, la teoría valida los principios de simplificación y adición, así como adjunción y abjunción[10].

Por otra parte, MLA tiene características que la separan de los enfoques operacionales usuales. Por ejemplo, en cierto sentido no es una teoría paracompleta ni paraconsistente. Esto es, $\Rightarrow \phi \oplus \neg\phi$ (y $\Rightarrow \phi, \neg\phi$), pero también $\phi \otimes \neg\phi \Rightarrow$ (y $\phi, \neg\phi \Rightarrow$).

Asimismo, no hay ninguna necesidad de introducir un condicional primitivo a MLA, dado que ya contiene un condicional fuerte que puede definirse en términos de la negación y $\oplus$ de la forma habitual: $\phi \to \psi =_{df} \neg\phi \oplus \psi$ (por supuesto, también es posible utilizar la negación junto con $\otimes$ para esto). Es más, además de ser un condicional fuerte en varios aspectos[11], el condicional de MLA satisface el teorema de la deducción (en esto, no difiere del enfoque no transitivo):

$$\Gamma, \phi \Rightarrow \psi, \Delta \text{ si y sólo si } \Gamma \Rightarrow \phi \to \psi, \Delta.$$

Puede argumentarse que esta es una de las ventajas más importantes de este enfoque (y de los enfoques subestructurales en general) sobre los enfoques operacionales. Por ejemplo, en un enfoque operacional, si el condicional satisface la regla de *modus ponens* no puede validar, so pena de ser trivial, la ley de *pseudo modus ponens*. MLA, sin embargo, valida ambos principios, aunque el segundo tiene la forma $((\phi \to \psi) \otimes \phi) \to \psi$.

MLA también valida varias versiones de ciertas metarreglas que a veces se rechazan en otras teorías para evitar las paradojas (e.g. ciertas versiones (débiles) de *reductio* y razonamiento por casos; véase [111] para los detalles).

En lo que respecta a la noción de verdad, MLA^+ tiene las propiedades esperadas. El predicado veritativo es transparente (i.e. sustituir $Tr\langle\phi\rangle$ por ϕ y viceversa preserva la derivabilidad del secuente en el cual se realizó la sustitución), ingenuo (i.e. $\Rightarrow Tr\langle\phi\rangle \leftrightarrow \phi$ es un teorema) y completamente composicional (i.e. secuentes tales como $Tr\langle\neg\phi\rangle \Leftrightarrow \neg Tr\langle\phi\rangle$ y

[9] Como señala Zardini, esta idea no está disponible si las reglas de monotonía también están ausentes, ya que, por ejemplo, ni siquiera podríamos probar $\phi \otimes \psi \Rightarrow \psi$ o $\phi \Rightarrow \phi \oplus \psi$.

[10] Con 'adjunción' me refiero al secuente $\phi, \psi \Rightarrow \phi \otimes \psi$, y con 'abjunción' me refiero al secuente $\phi \oplus \psi \Rightarrow \phi, \psi$.

[11] Además de todos los secuentes probables en el fragmento multiplicativo de LL (véase la proposición 6.2.1), los siguientes secuentes tiene una prueba en MLA: $\phi \Rightarrow \psi \to \phi$ y $\neg\phi \Rightarrow \phi \to \psi$. Por supuesto, para un lógico paraconsistente con inclinaciones relevantistas, esto puede ser visto como un defecto.

$Tr\langle\phi \oplus \psi\rangle \Leftrightarrow Tr\langle\phi\rangle \oplus Tr\langle\psi\rangle$ son teoremas). Que la teoría enriquecida con el predicado veritativo es no sólo no trivial sino también consistente puede probarse utilizando un argumento de eliminación de corte (véase nuevamente [111] para la prueba).

Antes de señalar potenciales problemas con MLA, quisiera mencionar una característica muy atractiva de esta teoría que ha sido explorada recientemente. Es en principio posible añadir un predicado de validez ingenuo a MLA (esto se lleva cabo en [112]). De hecho, incluso si las reglas para el predicado de validez se fortalecen como hicimos en el capítulo anterior, no es posible trivializar el sistema ni probar una versión internalizada de contracción. Más aún, de acuerdo con Priest and Wansing (véase [76]) podemos incluso definir un predicado de validez *externa* sin hacer que la teoría sea trivial.

6.3.1. ¿Problemas?

Al igual que con la teoría de la verdad basada en LL, hay algunas cuestiones interesantes con esta teoría que me gustaría mencionar aquí. En primer lugar, la explicación metafísica proporcionada por Zardini es difícil de aceptar. ¿Cuál es el estatus semántico de las oraciones paradójicas? ¿Habrá que decir que la oración del mentiroso es verdadera, que es falsa, que no es verdadera ni falsa, que es verdadera y falsa a la vez, o habrá que decir alguna otra cosa? Uno de los aspectos más atractivos de las teorías paracompletas y paraconsistentes es que ofrecen un diagnóstico razonable para la oración del mentiroso. Zardini señala que λ será o bien sólo verdadera o bien sólo falsa. De hecho, en MLA^+ no hay vacíos de verdad, ya que el secuente $\Rightarrow Tr\langle\phi\rangle \oplus \neg Tr\langle\phi\rangle$ es demostrable (tampoco hay, en principio, cúmulo de verdad). Así que, o bien el estado de cosas expresados por $\neg Tr\langle\lambda\rangle$ se da o bien el estado de cosas expresado por $Tr\langle\lambda\rangle$ se da, ya que no hay, al parecer, ningún estatus semántico intermedio. Sin embargo, sea cual fuere el estado de cosas que se da, sólo se da de forma inestable, es decir, se da pero conduce al otro estado de cosas. De modo que (*pace* Zardini) hay un sentido en que la teoría es paracompleta, pues ninguno de los dos estados de cosas se da *de forma estable*, mientras que, en otro sentido, la teoría es paraconsistente, pues ambos estados de cosas se dan *de forma inestable*. Por lo tanto, la idea de que no hay estatus semánticos intermedios es, en este contexto, difícil de sostener[12].

[12] Zardini [111] añade dos aspectos más en los que esta explicación podría ser incompleta. En primer lugar, no se extiende trivialmente a otros casos en los que falla contracción, y segundo, nos obliga a darle sentido a la idea de inestabilidad, una idea *prima facie* dinámica, en términos atemporales.

Una segunda cuestión que quiero mencionar es, una vez más, la cuestión de los cuantificadores. Aquí las cosas se complican, pero, al mismo tiempo, se ponen interesantes. Es bien sabido cómo agregar cuantificadores aditivos a una lógica sin contracción. Sin embargo, la lógica de Zardini es una lógica puramente multiplicativa, por lo que requiere cuantificadores multiplicativos. Si bien no hay demasiado consenso en lo que respecta a la cuestión de cómo deben definirse estos cuantificadores, Zardini proporciona la siguiente caracterización *infinitaria* para $\forall$ (hay reglas similares para $\exists$, pero las omitiré):

$$\mathrm{L}\forall\,\frac{\Gamma, \phi(t_1), \phi(t_2), \phi(t_3), ... \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \forall x\phi \Rightarrow \Delta}$$

$$\mathrm{R}\forall\,\frac{\Gamma \Rightarrow \phi(t_1), \Delta \qquad \Gamma' \Rightarrow \phi(t_2), \Delta' \qquad \Gamma'' \Rightarrow \phi(t_3), \Delta'' \qquad ......}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \Rightarrow \forall x\phi, \Delta, \Delta', \Delta''}$$

La regla R$\forall$ es familiar: es una versión de la regla ω. Como señala Zardini, estas reglas son correctas sólo si para todo objeto hay en el lenguaje un nombre que lo denota, y esto quiere decir que los objetos sobre los cuales cuantificamos deben ser siempre contables, dado el modo en que hemos definido nuestro lenguaje.

A pesar de sus características infinitarias poco habituales, estos cuantificadores satisfacen varios principios interesantes. Por ejemplo, cumplen con las reglas de instanciación universal (i.e. $\forall x\phi \Rightarrow \phi(t)$) y generalización particular (i.e. $\phi(t) \Rightarrow \exists x\phi$), cumplen con las reglas de De Morgan cuantificacionales (es decir, $\forall x\phi \Leftrightarrow \neg\exists x\neg\phi$, $\exists x\phi \Leftrightarrow \neg\forall x\neg\phi$, $\neg\forall x\phi \Leftrightarrow \exists x\neg\phi$ y $\neg\exists x\phi \Leftrightarrow \forall x\neg\phi$), cumplen con adjunción universal y abjunción existencial (i.e. $\phi(t_1), \phi(t_2), \phi(t_3), ... \Leftrightarrow \forall x\phi$ y $\exists x\phi \Leftrightarrow \phi(t_1), \phi(t_2), \phi(t_3), ...$), entre otras cosas.

Sin embargo, lo que es difícil de aceptar acerca de estos cuantificadores es que sus reglas no son clásicamente válidas. Como mencioné, R$\forall$ es la regla ω, una regla que no es clásicamente válida. Así que, en cierto modo, MLA extiende la lógica clásica, ya que acepta algunos patrones de inferencia que el lógico clásico consideraría incorrectos. Nótese que nada similar sucede en el fragmento proposicional de MLA. Tanto las reglas para la conjunción (disyunción) aditiva como las reglas para la conjunción (disyunción) multiplicativa son clásicamente válidas. Los cuantificadores multiplicativos introducidos por Zardini no lo son[13].

[13]Otro punto a destacar es que no está claro en qué medida es posible dar una teoría de la cuantificación restringida utilizando sólo los cuantificadores multiplicativos o aditivos, y el condicional multiplicativo (véase [85] para una objeción de este tipo).

6.4. Dos formas de combinar premisas

En esta sección consideraré un tipo diferente de lógica no contractiva. Una cuestión difícil que aún no he tocado (véase la sección 7.4) es que en lógicas como LL, LA y MLA, las leyes de distribución no se cumplen.

Si ϕ y (ψ o χ), entonces (ϕ y ψ) o (ϕ y χ)
Si ϕ o (ψ y χ), entonces (ϕ o ψ) y (ϕ o χ)

Estas oraciones no tienen prueba ni para las conectivas aditivas ni para las multiplicativas. Para probar estas leyes necesitamos las reglas de contracción y las reglas de monotonía.

Tanto en LL como en MLA hay una sola forma de combinar premisas (y conclusiones): la coma. Para construir un sistema donde las leyes de distribución se cumplan, necesitamos introducir una segunda forma de combinar premisas (conclusiones) y estipular que las reglas de contracción y monotonía valen para esta otra forma de combinar premisas (conclusiones)[14]. Hay distintas presentaciones de esta idea en [81], [64] y en [74]. Aquí seguiré mayormente a [64], aunque haré algunas modificaciones menores. Primero, necesitamos la siguiente definición:

Definición (*Estructuras*) Una estructura puede definirse recursivamente de la siguiente forma:

- El conjunto vacío $\varnothing$ es una estructura.
- Cualquier fórmula del lenguaje es una estructura.
- Si Γ y Δ son estructuras, entonces Γ, Δ es una estructura.
- Si Γ y Δ son estructuras, entonces $\Gamma; \Delta$ es una estructura.

Obsérvese que ahora hay dos formas diferentes de combinar premisas, una dada por la coma (,) y la otra dada por el punto y coma (;). Asimismo, nótese que las estructuras pueden ser no conmutativas y no asociativas.

También es posible definir recursivamente la idea de una *subestructura* de una estructura: Γ es una subestructura de sí misma y toda subestructura de

[14]El problema causado por las leyes de distribución surgió en el contexto de la conocida lógica de la relevancia R (véase [1]). No es una tarea sencilla construir un cálculo de secuentes que capture la lógica relevante R, dado que si dejamos de lado las reglas de monotonía no sólo nos deshacemos de secuentes irrelevantes como $\phi \Rightarrow \psi \rightarrow \psi$, sino también de las leyes de distribución. Sin embargo, las conectivas de R se distribuyen. El problema fue resuelto, de forma independiente, por Dunn y por Mints (véase por ejemplo [32]).

Γ y de Δ es también una subestructura de Γ, Δ y de $\Gamma; \Delta$. Un secuente, en este marco, es una expresión de la forma $\Gamma \Rightarrow \phi$, donde Γ es una estructura y ϕ es una fórmula[15]. Más abajo usaré la notación $\Gamma[\Sigma/\Delta]$ (o, más sencillamente $\Gamma[\Delta]$) para representar la estructura obtenida reemplazando en Γ una ocurrencia de la subestructura Σ por una ocurrencia de Δ. El sistema que consideraremos puede definirse como sigue:[16]:

Definición (*El sistema DM (Dunn-Mints)*) El sistema *DM* está dado por las siguientes reglas:

Secuentes iniciales

$$\text{Ax}\ \frac{}{\phi \Rightarrow \phi}$$

Reglas estructurales

$$\mathit{corte}\ \frac{\Gamma \Rightarrow \phi \qquad \Delta[\phi] \Rightarrow \psi}{\Delta[\Gamma] \Rightarrow \psi}$$

$$\text{L}E,\ \frac{\Gamma[\Delta, \Sigma] \Rightarrow \phi}{\Gamma[\Sigma, \Delta] \Rightarrow \phi} \qquad \text{L}A,\ \frac{\Gamma[(\Delta, \Sigma), \Pi] \Rightarrow \phi}{\Gamma[\Delta, (\Sigma, \Pi)] \Rightarrow \phi}$$

$$\text{L}W,\ \frac{\Gamma[\Delta] \Rightarrow \phi}{\Gamma[\Delta, \Sigma] \Rightarrow \phi} \qquad \text{L}C,\ \frac{\Gamma[\Delta, \Delta] \Rightarrow \phi}{\Gamma[\Delta] \Rightarrow \phi}$$

Reglas operacionales

$$\text{L}\wedge\ \frac{\Gamma[\phi, \psi] \Rightarrow \chi}{\Gamma[\phi \wedge \psi] \Rightarrow \chi} \qquad \text{R}\wedge\ \frac{\Gamma \Rightarrow \phi \qquad \Delta \Rightarrow \psi}{\Gamma, \Delta \Rightarrow \phi \wedge \psi}$$

$$\text{L}\vee\ \frac{\Gamma[\phi] \Rightarrow \chi \qquad \Gamma[\psi] \Rightarrow \chi}{\Gamma[\phi \vee \psi] \Rightarrow \chi} \qquad \text{R}\vee\ \frac{\Gamma \Rightarrow \phi}{\Gamma \Rightarrow \phi \vee \psi}$$

$$\text{R}\vee\ \frac{\Gamma \Rightarrow \psi}{\Gamma \Rightarrow \phi \vee \psi}$$

$$\text{L}\otimes\ \frac{\Gamma[\phi; \psi] \Rightarrow \chi}{\Gamma[\phi \otimes \psi] \Rightarrow \chi} \qquad \text{R}\otimes\ \frac{\Gamma \Rightarrow \phi \qquad \Delta \Rightarrow \psi}{\Gamma; \Delta \Rightarrow \phi \otimes \psi}$$

$$\text{L}{\rightarrow}\ \frac{\Gamma \Rightarrow \phi \qquad \Delta[\psi] \Rightarrow \chi}{\Delta[\Gamma; \phi \rightarrow \psi] \Rightarrow \chi} \qquad \text{R}{\rightarrow}\ \frac{\Gamma; \phi \Rightarrow \psi}{\Gamma \Rightarrow \phi \rightarrow \psi}$$

$$\text{L}\mathbf{1}\ \frac{\Gamma[\phi] \Rightarrow \psi}{\Gamma[\phi; \mathbf{1}] \Rightarrow \psi} \qquad \text{R}\mathbf{1}\ \frac{}{\Rightarrow \mathbf{1}}$$

[15]Dado que en general esta lógica se presenta por medio de un cálculo que no admite conclusiones múltiples, seguiré esa estipulación aquí. Sin embargo, no debería ser difícil extender esta lógica a una donde los argumentos puedan tener múltiples conclusiones.

[16]Nuevamente, para simplificar, me restringiré la fragmento sin cuantificadores y, en este caso, para simplificar aún más, omitiré las reglas para $\oplus$

Es crucial notar que todas las reglas estructurales valen para la coma, pero no para el punto y coma (excepto aquellas que involucran a la constante **1**). En particular, las paradojas se evitan porque el sistema no incluye la regla:

$$\mathrm{L}C; \frac{\Gamma[\Delta;\Delta] \Rightarrow \phi}{\Gamma[\Delta] \Rightarrow \phi}$$

Más aún, este sistema es muy débil en lo que respeta al comportamiento del punto y coma, pero es posible obtener sistemas más fuertes añadiendo reglas estructurales que condicionen su comportamiento. Es de especial interés el sistema que se obtiene agregando a DM todas las reglas estructurales para el punto y coma excepto por contracción.

Otra característica interesante de este sistema que debo mencionar es que, hasta ahora, es un sistema puramente positivo y libre de verdad. No he introducido reglas para la negación ni para el predicado veritativo. Como veremos brevemente, introducir la negación complica un poco las cosas, tanto a nivel sintáctico como a nivel semántico. Y algo similar puede decirse acerca del predicado veritativo.

Asimismo, necesitamos una constante (multiplicativa) de verdad **1**. La razón es la siguiente. En la regla de monotonía para la coma, exigimos que $\Gamma[\Delta]$ sea no vacío, pues de lo contrario, esta regla posibilitaría probar como teoremas secuentes irrelevantes tales como $\phi \Rightarrow \psi \to \psi$ (aún si la regla de monotonía no vale para el punto y coma). Además, en la regla de corte, $\Delta[\Gamma]$ es el resultado de reemplazar una ocurrencia de ϕ por Γ *si* Γ no es vacío, pero por **1** si Γ es vacío. Pues de lo contrario, el mismo secuente irrelevante podría probarse (véase [64], p.129). La presencia de **1** junto con estas restricciones nos garantiza que sólo sea posible probar $\mathbf{1}, \phi \Rightarrow \psi \to \psi$.

Una característica atractiva de DM que no he mencionado hasta aquí es que esta lógica tiene modelos interesantes. En esto se opone a las lógicas no-distributivas de las secciones anteriores. Aunque existen semánticas algebraicas disponibles para éstas últimas, aquellas no son muy esclarecedoras desde un punto de vista conceptual[17]. DM, en cambio, posee una semántica de mundos posibles muy similar a la que presentamos en el capítulo 3 para ciertas lógicas paraconsistentes (los detalles se pueden encontrar en [81]).

6.4.1. ¿Problemas?

Hay un aspecto algo incómodo de DM. No está claro cómo introducir una negación a esta lógica. Desde un punto de vista semántico, la estrategia

[17]El lector puede ver [64] o [82] para obtener más información sobre las semánticas algebraicas para lógicas subestructurales.

habitual es usar la estrella de Routley (véase el capítulo 3). La interpretación filosófica de la estrella Routley ha sido cuestionada en varias ocasiones, y no ahondaremos en eso aquí. Desde un punto de vista sintáctico, ya no es posible introducir la negación usando las reglas habituales L$\neg$ y R$\neg$. Dado que hay dos formas de combinar premisas, tenemos que escoger una para las reglas de la negación. Si escogemos formular estas reglas utilizando la coma, será posible derivar la paradoja del mentiroso (por supuesto, siempre que el predicado veritativo sea transparente), pues la coma obedece la regla de contracción. Si escogemos formular estas reglas utilizando el punto y coma, el problema es que habrá ciertos secuentes clásicamente válidos que involucran a $\wedge$ y a $\vee$ que no tendrán prueba, a pesar de que $\wedge$ y $\vee$ están diseñados para comportarse clásicamente (e.g. no será posible probar $\Rightarrow \phi \vee \neg\phi$ ni $\phi \wedge \psi \Rightarrow \neg(\neg\phi \vee \neg\psi)$).

Hay otras maneras (menos habituales) de introducir la negación. Entre ellas, el uso de fórmulas etiquetadas o el uso de un sistema de deducción natural, pero esto no es una solución óptima en este contexto. Otra alternativa es utilizar un cálculo 'display' (véase [21]), donde, además de la coma y el punto y coma, tenemos un símbolo estructural correspondiente a la negación. En cualquier caso, hasta donde sé, estas alternativas no se han explorado en la bibliografía sobre teorías de la verdad. Sea como fuere, la dificultad con la negación es, creo, una clara desventaja de este enfoque, ya que la negación se puede acomodar sin problemas en las otras lógicas no contractivas.

Por otra parte, tampoco está claro cómo introducir reglas para el predicado veritativo. Nuevamente, ya no es posible introducir dicho predicado utilizando las reglas habituales LTr y RTr, porque hay dos formas de combinar premisas. Esto hace que tengamos que escoger una. Pero ninguna elección será del todo satisfactoria, por motivos análogos a los que di para la negación.

Capítulo 7

Una paralógica no contractiva

7.1. Introducción

En este capítulo mi objetivo principal es dar cierto apoyo a la idea de que no deberíamos ver el enfoque no contractivo como rival de los enfoques operacionales o, al menos, que no hay necesidad de hacerlo. Para eso, presentaré una teoría basada en un cálculo de secuentes que rechaza las reglas de contracción pero que, al mismo tiempo, rechaza alguna de las reglas operacionales para la negación (me concentraré en una teoría paracompleta, aunque sería igual de interesante considerar una teoría paraconsistente, o paracompleta *y* paraconsistente). La estructura del capítulo será la siguiente. En la próxima sección (7.2) presentaré el sistema de prueba. En la sección posterior (7.3), discutiré algunas de sus propiedades formales más importantes, como la consistencia y el modo en que representa los conceptos de verdad y validez. Luego, en la sección 7.4, compararé esta teoría con las teorías no contractivas presentadas en el capítulo anterior. La sección final (7.5) considera una serie de posibles problemas a los que esta teoría debe enfrentarse. El capítulo también incluye dos apéndices. En uno de ellos (C) se prueba que la regla de corte es eliminable del cálculo de secuentes presentado en 7.2, y en el otro (C) se prueba que dicho cálculo es capaz de internalizar todas sus metarreglas.

7.2. El sistema

Consideremos un lenguaje $\mathcal{L}$ donde sea posible construir oraciones autorreferenciales. Supongamos, además, que $\mathcal{L}^+$ puede obtenerse a partir de $\mathcal{L}$ añadiendo un predicado veritativo $Tr(x)$ y un operador de validez Val[1],

[1] En esta sección usaré un operador en lugar de un predicado para simplificar la presentación y las pruebas que ofreceré más abajo. No se produce ninguna pérdida expresiva al

pero recuérdese que (por ahora) el lenguaje carece de cuantificadores. La aridad de Val no será fija. Para cualesquiera enteros positivos n y m, Val puede funcionar como un operador de aridad $n + m$, donde n es el número de premisas y m es el número de conclusiones del argumento al cual estamos atribuyendo validez. Para simplificar la notación, a veces usaré $Val(\Phi, \Psi)$ para representar la afirmación de que el argumento con premisas $\phi_1, ..., \phi_n$ para cada $\phi \in \Phi$, y con conclusiones $\psi_1, ..., \psi_n$ para cada $\psi \in \Psi$, es válido[2].

Definición (*El sistema* ${}^{NC}LK_3$) Sean $\Gamma, \Delta, \Pi, \Sigma, \Phi, \Psi$ multiconjuntos (finitos) de fórmulas, sean ϕ y ψ fórmulas, sea χ cualquier literal, y sea ϕ^{At} cualquier fórmula atómica. A veces, usaré Φ y Ψ como abreviaciones de los multiconjuntos de fórmulas $\phi_1, ..., \phi_n$ y $\psi_1, ..., \psi_m$, respectivamente. El sistema ${}^{NC}LK_3^{++}$ está dado por los siguientes secuentes iniciales y reglas:

- Como *secuentes iniciales* tenemos todos los secuentes de la forma:

$$\frac{}{\chi \Rightarrow \chi}$$

  Nótese que, además de los literales habituales, esto incluye fórmulas de la forma $Tr\langle\phi\rangle$ y $\neg Tr\langle\phi\rangle$, que también son literales.

- Como *reglas estructurales* tenemos corte y monotonía, pero, por supuesto, no tenemos contracción[3]:

$$\text{corte}\ \frac{\Gamma \Rightarrow \phi, \Delta \qquad \Pi, \phi \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}$$

$$\text{L}W\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \phi \Rightarrow \Delta} \qquad\qquad \text{R}W\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \phi, \Delta}$$

- Habrá muchas *reglas operacionales*. En cierto sentido, este sistema es como LK_3^+, que ya fue discutido en el capítulo 2, pero la ausencia de contracción nos obliga a modificar varias cosas. Separaré las reglas operacionales en varios grupos:

---

hacer esto, ya que es posible definir un predicado de validez usando el operador de validez junto con el predicado veritativo de la forma usual. Diré más sobre esto en breve.

[2]Más precisamente, $Val(\Phi, \Psi)$ debe entenderse como una abreviación de $Val(\phi_1, ..., \phi_n, \psi_1, ..., \psi_m)$ donde los primeros n lugares están ocupados por las oraciones que son las premisas y el resto de los lugares están ocupados por las oraciones que son las conclusiones del argumento. Una forma más rigurosa de introducir Val es usando una cantidad infinita de operadores (uno para cada tipo de argumento), en lugar de un solo operador, pero esto complicaría demasiado la notación.

[3]Dado que estamos utilizando multiconjuntos, no necesitamos otras reglas estructurales como conmutatividad y asociatividad.

- El primer grupo contiene las *reglas puras para la negación*. Como este sistema está basado en la lógica paracompleta K_3, no contiene la regla habitual para introducir la negación a la derecha.

$$\mathrm{L}\neg^{At}\ \frac{\Gamma \Rightarrow \phi^{At}, \Delta}{\Gamma, \neg\phi^{At} \Rightarrow \Delta}$$

$$\mathrm{L}\neg\neg\ \frac{\Gamma, \phi \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \neg\neg\phi \Rightarrow \Delta} \qquad \mathrm{R}\neg\neg\ \frac{\Gamma \Rightarrow \phi, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \neg\neg\phi, \Delta}$$

- El segundo grupo contiene las *reglas aditivas para la conjunción y la disyunción*. Es importante notar que la ausencia de la regla R$\neg$ para la negación nos obliga a introducir reglas para conjunciones negadas y para disyunciones negadas.

$$\mathrm{L}\wedge\ \frac{\Gamma, \phi \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \phi \wedge \psi \Rightarrow \Delta} \qquad \mathrm{R}\wedge\ \frac{\Gamma \Rightarrow \phi, \Delta \qquad \Gamma \Rightarrow \psi, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \phi \wedge \psi, \Delta}$$

$$\mathrm{L}\wedge\ \frac{\Gamma, \psi \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \phi \wedge \psi \Rightarrow \Delta} \qquad \mathrm{R}\neg\wedge\ \frac{\Gamma \Rightarrow \neg\phi, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \neg(\phi \wedge \psi), \Delta}$$

$$\mathrm{L}\neg\wedge\ \frac{\Gamma, \neg\phi \Rightarrow \Delta \qquad \Gamma, \neg\psi \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \neg(\phi \wedge \psi) \Rightarrow \Delta} \qquad \mathrm{R}\neg\wedge\ \frac{\Gamma \Rightarrow \neg\psi, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \neg(\phi \wedge \psi), \Delta}$$

$$\mathrm{L}\vee\ \frac{\Gamma, \phi \Rightarrow \Delta \qquad \Gamma, \psi \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \phi \vee \psi \Rightarrow \Delta} \qquad \mathrm{R}\vee\ \frac{\Gamma \Rightarrow \phi, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \phi \vee \psi, \Delta}$$

$$\mathrm{L}\neg\vee\ \frac{\Gamma, \neg\phi \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \neg(\phi \vee \psi) \Rightarrow \Delta} \qquad \mathrm{R}\vee\ \frac{\Gamma \Rightarrow \psi, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \phi \vee \psi, \Delta}$$

$$\mathrm{L}\neg\vee\ \frac{\Gamma, \neg\psi \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \neg(\phi \vee \psi) \Rightarrow \Delta} \qquad \mathrm{R}\neg\vee\ \frac{\Gamma \Rightarrow \neg\phi, \Delta \qquad \Gamma \Rightarrow \neg\psi, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \neg(\phi \vee \psi), \Delta}$$

- En el tercer grupo tenemos las *reglas para el condicional*. Estas reglas serán multiplicativas[4] y, como con la conjunción y la disyunción, necesitamos reglas para condicionales negados:

$$\mathrm{L}{\to}\ \frac{\Gamma \Rightarrow \phi, \Delta \qquad \Pi, \psi \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \Pi, \phi \to \psi \Rightarrow \Delta, \Sigma} \qquad \mathrm{R}{\to}\ \frac{\Gamma, \phi \Rightarrow \psi, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \phi \to \psi, \Delta}$$

$$\mathrm{L}\neg\to\ \frac{\Gamma, \phi, \neg\psi \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \neg(\phi \to \psi) \Rightarrow \Delta} \qquad \mathrm{R}\neg\to\ \frac{\Gamma \Rightarrow \phi, \Delta \qquad \Pi \Rightarrow \neg\psi, \Sigma}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \neg(\phi \to \psi), \Delta, \Sigma}$$

[4]El condicional aditivo $\supset$ no servirá para nuestros propósitos, ya que ni siquiera valida el principio $\Rightarrow \phi \supset \phi$.

- Llamaré al sistema que tenemos hasta ahora ${}^{NC}LK_3$. Para obtener el sistema ${}^{NC}LK_3^+$ añadimos las siguientes *reglas para el predicado de verdad*:

$$\mathrm{L}Tr\ \frac{\Gamma, \phi \Rightarrow \Delta}{\Gamma, Tr\langle\phi\rangle \Rightarrow \Delta} \qquad \mathrm{R}Tr\ \frac{\Gamma \Rightarrow \phi, \Delta}{\Gamma \Rightarrow Tr\langle\phi\rangle, \Delta}$$

$$\mathrm{L}\neg Tr\ \frac{\Gamma, \neg\phi \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \neg Tr\langle\phi\rangle \Rightarrow \Delta} \qquad \mathrm{R}\neg Tr\ \frac{\Gamma \Rightarrow \neg\phi, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \neg Tr\langle\phi\rangle, \Delta}$$

- En último lugar, como queremos que el operador de validez sea parte de nuestro sistema, introducimos las siguientes *reglas para el operador de validez*. El sistema resultante será ${}^{NC}LK_3^{++}$:

$$\mathrm{L}Val\ \frac{\Gamma_1 \Rightarrow \phi_1, \Delta_1 \ \ .... \ \ \Gamma_n \Rightarrow \phi_n, \Delta_n \qquad \Pi_1, \psi_1 \Rightarrow \Sigma_1 \ \ .... \ \ \Pi_m, \psi_m \Rightarrow \Sigma_m}{\Gamma, \Pi, Val(\Phi, \Psi) \Rightarrow \Delta, \Sigma}$$

$$\mathrm{L}\neg Val\ \frac{Val(\Gamma_1, \Delta_1), ..., Val(\Gamma_k, \Delta_k), \phi_1, ..., \phi_n, \neg\psi_1, ..., \neg\psi_m \Rightarrow \neg Val(\Pi, \Sigma)}{Val(\Gamma_1, \Delta_1), ..., Val(\Gamma_k, \Delta_k), \neg Val(\Phi, \Psi) \Rightarrow \neg Val(\Pi, \Sigma)}$$

$$\mathrm{R}Val\ \frac{Val(\Gamma_1, \Delta_1), ..., Val(\Gamma_k, \Delta_k), \phi_1, ..., \phi_n \Rightarrow \psi_1, ..., \psi_m}{Val(\Gamma_1, \Delta_1), ..., Val(\Gamma_k, \Delta_k) \Rightarrow Val(\Phi, \Psi)}$$

$$\mathrm{R}\neg Val\ \frac{\Gamma_1 \Rightarrow \phi_1, \Delta_1 \ \ .... \ \ \Gamma_n \Rightarrow \phi_n, \Delta_n \qquad \Pi_1 \Rightarrow \neg\psi_1, \Sigma_1 \ \ .... \ \ \Pi_m \Rightarrow \neg\psi_m, \Sigma_m}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \neg Val(\Phi, \Psi), \Delta, \Sigma}$$

(En estas cuatro reglas usamos las siguientes abreviaciones: $\Gamma = \Gamma_1, ..., \Gamma_n, \Delta = \Delta_1, ..., \Delta_n, \Pi = \Pi_1, ..., \Pi_m, \Sigma = \Sigma_1, ..., \Sigma_m, \Phi = \phi_1, ..., \phi_n$, y $\Psi = \psi_1, ..., \psi_m$).

Este sistema tiene varias características interesantes. En primer lugar, está claro que ${}^{NC}LK_3^{++}$ es paracompleto, ya que algunas instancias de $\Rightarrow \phi, \neg\phi$ no tienen prueba. Sin embargo, es sencillo mostrar que es posible obtener un sistema dual paraconsistente ${}^{NC}LLP^{++}$, basado en la lógica LP[5]. La idea es eliminar la regla $\mathrm{L}\neg^{At}$ y añadir la regla $\mathrm{R}\neg^{At}$:

$$\mathrm{R}\neg^{At}\ \frac{\Gamma, \phi^{At} \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \neg\phi^{At}, \Delta}$$

En lo que sigue analizaré el sistema paracompleto ${}^{NC}LK_3^{++}$, pero muchas veces será posible trasladar nuestras conclusiones al sistema ${}^{NC}LLP^{++}$.

En segundo lugar, me gustaría explicar por qué es necesaria la presencia de reglas para fórmulas negadas en ${}^{NC}LK_3^{++}$. En ${}^{NC}LK_3^{++}$ un secuente de la

[5]También es posible obtener un sistema que es tanto paracompleto como paraconsistentes, pero no discutiré esta opción aquí

forma $\Gamma, \phi \Rightarrow \Delta$ y otro de la forma $\Gamma \Rightarrow \neg\phi, \Delta$ podrían no ser equivalentes. En particular, podría haber una prueba del primero sin que exista una prueba del segundo. Daré un ejemplo (con $\rightarrow$) para ilustrar por qué este tipo de reglas son necesarias. Supongamos que para alguna fórmula ϕ, existe una prueba de $\Rightarrow \phi$. Luego, podemos inferir $\Rightarrow \neg(\phi \rightarrow \psi)$ si hay una prueba de $\Rightarrow \neg\psi$. Sin embargo, si en su lugar sólo hay una prueba de $\psi \Rightarrow$ (es posible que aún así no haya una prueba de $\Rightarrow \neg\psi$ debido a que R$\neg$ no está disponible), sólo podemos inferir $\phi \rightarrow \psi \Rightarrow$ (pero no $\Rightarrow \neg(\phi \rightarrow \psi)$). Intuitivamente, $\Rightarrow \neg\psi$ quiere decir que deberíamos aceptar $\neg\psi$ mientras que $\psi \Rightarrow$ quiere decir que debemos rechazar ψ. Pero aceptar $\neg\psi$ y rechazar ψ son dos actitudes conceptualmente diferentes en el contexto de una teoría paracompleta como ${}^{NC}LK_3^{++}$.

La tercera cuestión tiene que ver con una característica un tanto extraña del sistema. Para las fórmulas atómicas de la forma $\neg Tr\langle\phi\rangle$, hay dos formas de introducirlas a la izquierda de un secuente (sin contar LW). Podemos usar L$\neg Tr$ o L$\neg^{At}$. Esto complica un poco las cosas si lo que queremos hacer es buscar pruebas comenzando desde la conclusión (algo muy común cuando usamos cálculos de secuentes)[6], pero esto no es demasiado importante para mis propósitos.

Mi cuarta observación está relacionada con las reglas para el operador de validez. En el capítulo 5 ofrecí varias formas de especificar estas reglas. Las reglas (positivas) de ${}^{NC}LK_3^{++}$ no son más que variaciones de aquellas reglas. Otra opción que es en cierto sentido más simple es dejar LVal y R$\neg Val$ tal como están, y ofrecer las siguientes dos reglas en lugar de RVal y L$\neg Val$:

$$\frac{\Gamma, \phi_1, ..., \phi_n \Rightarrow \psi_1, ..., \psi_m, \Delta}{\Gamma \Rightarrow Val(\Phi, \Psi), \Delta}\ \text{donde } \Gamma \text{ y } \Delta \text{ son puramente lógicos}$$

$$\frac{\Gamma, \phi_1, ..., \phi_n, \neg\psi_1, ..., \neg\psi_m, \Rightarrow \Delta}{\Gamma, Val(\Phi, \Psi) \Rightarrow \Delta}\ \text{donde } \Gamma \text{ y } \Delta \text{ son puramente lógicos}$$

Visualmente, estas reglas son menos engorrosas que las reglas que forman parte de ${}^{NC}LK_3^{++}$, y de hecho las implican, dado que son más fuertes. Sin embargo, para simplificar algunas de las pruebas que ofreceré más abajo, trabajaré con las versiones menos atractivas visualmente. La mayor parte de las propiedades de ${}^{NC}LK_3^{++}$ que discutiré aún valen si usamos las versiones simplificadas.

[6]También complica las cosas en la prueba de eliminación de corte, ya que nos obliga a considerar más casos.

7.3. Propiedades de ${}^{NC}LK_3^{++}$

El sistema ${}^{NC}LK_3^{++}$ tiene algunas propiedades atractivas. Es consistente, posee un condicional fuerte, contiene un predicado veritativo ingenuo y transparente, y su noción de validez puede ser internalizada, entre otras cosas. Ofreceré pruebas de todas estas cosas más abajo. Pero antes, listaré algunas propiedades no tan importantes pero que serán de utilidad (en muchos casos simplemente describiré la estrategia de la prueba y en otros directamente la omitiré).

En primer lugar, ${}^{NC}LK_3^{++}$ contiene muchas constantes lógicas. De hecho, más de las necesarias:

Proposición 7.3.1 *$\wedge$ puede definirse en ${}^{NC}LK_3^{++}$ usando otras constantes. Más precisamente, tenemos:*
$\phi \wedge \psi \Leftrightarrow \neg(\neg\phi \vee \neg\psi)$

Con este resultado a nuestra disposición, sólo necesitamos concentrarnos en el fragmento de ${}^{NC}LK_3^{++}$ que contiene únicamente a $\{\neg, \vee, \rightarrow, Tr, Val\}$. Esto hará que algunas pruebas sean más cortas.

A continuación, probaré que la noción de consecuencia es reflexiva.

Proposición 7.3.2 *${}^{NC}LK_3^{++}$ es una lógica reflexiva. Esto es, para cada fórmula ϕ, hay una prueba de $\phi \Rightarrow \phi$.*

Prueba Para los literales χ (incluyendo a aquellos de la forma $Tr\langle\psi\rangle$ y $\neg Tr\langle\psi\rangle$), $\chi \Rightarrow \chi$ es un secuente inicial. Para el resto de los casos, la prueba es por inducción sobre la complejidad de ϕ. ∎

Veamos cuáles son las propiedades *lógicas* de ${}^{NC}LK_3^{++}$. Primero, discutiré algunas de las propiedades del fragmento de ${}^{NC}LK_3^{++}$ libre del condicional. Una característica importante de esta teoría de la que ya hablé es que es paracompleta pero no paraconsistente.

Proposición 7.3.3 (Explosión y tercero excluido) *La siguiente versión de la regla de explosión puede probarse en ${}^{NC}LK_3^{++}$:*

- $\phi, \neg\phi \Rightarrow \psi$

Ninguna forma de la ley de tercero excluido tiene prueba en ${}^{NC}LK_3^{++}$. Esto es:

- $\not\Rightarrow \phi, \neg\phi$

- $\not\Rightarrow \phi \vee \neg\phi$
- $\not\Rightarrow \phi \vee \neg\phi, \phi \vee \neg\phi$

Nótese que aunque tenemos $\phi, \neg\phi \Rightarrow \psi$, no es posible añadir una conjunción a la izquierda. Es decir, la ley de explosión falla: $\phi \wedge \neg\phi \not\Rightarrow \psi$ (también, $\not\Rightarrow (\phi \wedge \neg\phi) \rightarrow \psi$). Así que, en cierto sentido, la teoría tiene rasgos paraconsistentes. Diré algo más sobre esto en la sección 7.4.

A continuación, mostraré que, obviando la proposición anterior, la conjunción y la disyunción se comportan *casi* como sus contrapartes clásicas.

Proposición 7.3.4 (Propiedades de $\wedge$ y $\vee$ I) *Los siguientes secuentes tienen prueba en* ${}^{NC}LK_3^{++}$*:*

- *Reglas de De Morgan*
  - $\phi \wedge \psi \Leftrightarrow \neg(\neg\phi \vee \neg\psi)$
  - $\phi \vee \psi \Leftrightarrow \neg(\neg\phi \wedge \neg\psi)$
  - $\neg(\phi \wedge \psi) \Leftrightarrow \neg\phi \vee \neg\psi$
  - $\neg(\phi \vee \psi) \Leftrightarrow \neg\phi \wedge \neg\psi$
- *Adjunción y abjunción*
  - $\phi, \psi \Leftrightarrow \phi \wedge \psi$
  - $\phi \vee \psi \Leftrightarrow \phi, \psi$
- *Simplificación y adición*
  - $\phi \wedge \psi \Rightarrow \phi$
  - $\phi \wedge \psi \Rightarrow \psi$
  - $\phi \Rightarrow \phi \vee \psi$
  - $\psi \Rightarrow \phi \vee \psi$
- *Idempotencia*
  - $\phi \Leftrightarrow \phi \wedge \phi$
  - $\phi \vee \phi \Leftrightarrow \phi$

Por supuesto, la conjunción y la disyunción no se comportan *exactamente* como las junciones clásicas. En particular:

Proposición 7.3.5 (Propiedades de $\wedge$ y $\vee$ II) *Los siguientes principios fallan en* ${}^{NC}LK_3^{++}$*:*

- *La regla de distribución:* $\phi_1 \wedge (\phi_2 \vee \phi_3) \not\Rightarrow (\phi_1 \wedge \phi_2) \vee (\phi_1 \wedge \phi_3)$.
- *La metarregla de juntar premisas y juntar conclusiones, esto es, puede darse que* $\Gamma \Rightarrow \Delta$ *pero* $\bigwedge \Gamma \not\Rightarrow \bigvee \Delta$.

Diré algo sobre las fallas de estos principios más abajo.

Pasemos ahora a considerar las propiedades de $\rightarrow$. Para las teorías paracompletas y paraconsistentes estándar, el condicional es un gran problema. Esto no ocurre en el caso de ${}^{NC}LK_3^{++}$, que tiene un condicional muy fuerte. De hecho, la ausencia de la regla de contracción hace posible que se cumpla el teorema de la deducción:

Proposición 7.3.6 (El teorema de la deducción) *El teorema de la deducción se cumple para el condicional de* ${}^{NC}LK_3^{++}$. *Esto es, tenemos:*

$$\Gamma, \phi \Rightarrow \psi, \Delta \text{ si y sólo si } \Gamma \Rightarrow \phi \to \psi, \Delta.$$

Prueba La dirección de izquierda a derecha es inmediata por R$\to$. La dirección de derecha a izquierda puede obtenerse de $\Gamma \Rightarrow \phi \to \psi, \Delta$ y $\Gamma, \phi, \phi \to \psi \Rightarrow \psi, \Delta$ (que puede probarse) usando la regla de corte. ∎

Para dar una idea de cómo se comporta el condicional de ${}^{NC}LK_3^{++}$, abajo listaré algunas de sus propiedades (téngase en cuenta que el teorema de la deducción nos permite fortalecer varios de los secuentes listados más abajo; por ejemplo, si hay una prueba de $\phi \Rightarrow \psi \to \phi$, también hay una prueba de $\Rightarrow \phi \to (\psi \to \phi)$).

Proposición 7.3.7 (Propiedades de $\to$ I) *Estos son algunos de los secuentes condicionales probables en* ${}^{NC}LK_3^{++}$:

- $\Rightarrow \phi \to \phi$
- $\Rightarrow \neg\neg\phi \leftrightarrow \phi$
- $\phi, \phi \to \psi \Rightarrow \psi$
- $\phi \Rightarrow (\phi \to \psi) \to \psi$
- $(\phi_1 \to \phi_2) \Rightarrow (\phi_2 \to \phi_3) \to (\phi_1 \to \phi_3)$
- $\phi_1 \to (\phi_2 \to \phi_3) \Leftrightarrow \phi_2 \to (\phi_1 \to \phi_3)$
- $(\phi_1 \to \phi_2) \wedge (\phi_1 \to \phi_3) \Leftrightarrow \phi_1 \to (\phi_2 \wedge \phi_3)$
- $(\phi_1 \to \phi_3) \vee (\phi_2 \to \phi_3) \Leftrightarrow (\phi_1 \vee \phi_2) \to \phi_3$
- $(\phi_1 \wedge \phi_2) \to \phi_3 \Rightarrow \phi_1 \to (\phi_2 \to \phi_3)$
- $\phi \Rightarrow \psi \to \phi$
- $\phi \Rightarrow \neg\phi \to \psi$
- $\neg\phi \vee \psi \Rightarrow \phi \to \psi$
- $\neg(\phi \wedge \neg\psi) \Rightarrow \phi \to \psi$
- $\phi, \neg\psi \Rightarrow \neg(\phi \to \psi)$
- $\neg(\phi \to \psi) \Rightarrow \neg(\neg\phi \vee \psi)$
- $\neg(\phi \to \psi) \Rightarrow \phi \wedge \neg\psi$
- $\phi \vee \psi \Rightarrow \neg\phi \to \psi$
- $\neg(\phi \to \neg\psi) \Rightarrow \phi \wedge \psi$

Por supuesto, algunos principios condicionales clásicamente válidos deben rechazarse. Entre ellos:

Proposición 7.3.8 (Propiedades de $\to$ II) *Los siguientes secuentes condicionales no tienen prueba en* ${}^{NC}LK_3^{++}$:

- *La regla de contracción condicional falla:* $\phi \to (\phi \to \psi) \not\Rightarrow (\phi \to \psi)$
- *La ley de* pseudo modus ponens *falla:* $\not\Rightarrow (\phi \wedge (\phi \to \psi)) \to \psi$.
- *La regla de* modus tollens *falla:* $\phi \to \psi, \neg\psi \not\Rightarrow \neg\phi$.
- *El axioma de linealidad falla:* $\not\Rightarrow (\phi \to \psi) \vee (\psi \to \phi)$.
- *El axioma de Łukasiewicz falla:* $\phi \to (\phi \to \psi) \not\Rightarrow \psi \to (\psi \to \phi)$.

- *El axioma del "interruptor de luz" falla:* $(\phi_1 \wedge \phi_2) \to \phi_3 \not\Rightarrow ((\phi_1 \wedge \neg\phi_2) \to \phi_3) \vee ((\neg\phi_1 \wedge \phi_2) \to \phi_3)$.

En lo que respecta a la regla de contracción condicional, sean cuales fueren nuestras razones para rechazar contracción estructural, parece sensato pensar que esas razones se trasladan al caso de contracción condicional. En cuanto a la ley de *pseudo modus ponens*, nótese que el caso en que ϕ es la oración de Curry κ nos da contracción condicional nuevamente, siempre que $\wedge$ sea idempotente, lo cual, como ya vimos, es el caso[7]. Luego, si hay razones para rechazar contracción condicional, esas razones también motivan la falla de *pseudo modus ponens*.

La falla de *modus tollens* tiene raíces más profundas. De hecho, no debemos rechazar solamente *modus tollens*, sino también la metarregla 'si $\Gamma \Rightarrow \Delta$, entonces $\neg\Delta \Rightarrow \neg\Gamma$ (donde $\neg\Gamma$ es el multiconjunto que contiene las negaciones de todas las fórmulas en Γ y lo mismo se aplica a $\neg\Delta$). Ya que la teoría que he ofrecido es paracompleta, su relación de consecuencia es tal que siempre que aceptamos la premisa de un argumento válido, debemos aceptar su conclusión. De esto se sigue que siempre que rechacemos su conclusión, deberemos rechazar también su premisa. Sin embargo, es importante observar que de esto *no* se sigue que siempre que aceptemos la negación de la conclusión deberemos aceptar también la negación de la premisa. Esto se debe a que, como es habitual, las teorías paracompletas trazan una distinción entre rechazar ϕ y aceptar su negación. De esta forma, se entiende por qué *modus tollens* puede fallar.

Finalmente, la falla de los otros tres axiomas es, en mi opinión, una característica atractiva de la teoría. Todos ellos han sido cuestionados por un motivo u otro. El axioma de linealidad puede cumplirse en ciertos contextos simplificados, como aquél que consideré en el apéndice al capítulo 4 para los condicionales no deterministas, pero no hay razones para pensar que se cumple en general. El axioma de Łukasiewicz siempre ha sido considerado como una parte extraña de la teoría de Łukasiewicz (véase, por caso, [81] y [73]). Por último, ya hemos visto (capítulo 3) que hay argumentos simples para mostrar la invalidez del axioma del "interruptor de luz".

Consideremos ahora el predicado veritativo. Idealmente, nos gustaría que sea ingenuo y transparente. Afortunadamente, $Tr(x)$ tiene estas propiedades en $^{NC}LK_3^{++}$.

[7]Supongamos que *pseudo modus ponens* se cumple. Una instancia de esta ley es $Tr\langle\kappa\rangle \wedge (Tr\langle\kappa\rangle \to \psi) \Rightarrow \psi$. Dado que κ es la oración $Tr\langle\kappa\rangle \to \psi$ y que el predicado veritativo es transparente (algo que mostraré más tarde), este secuente equivale a $Tr\langle\kappa\rangle \wedge Tr\langle\kappa\rangle \Rightarrow \psi$. Usando la idempotencia de $\wedge$ (esto es $Tr\langle\kappa\rangle \Rightarrow Tr\langle\kappa\rangle \wedge Tr\langle\kappa\rangle$), obtenemos $Tr\langle\kappa\rangle \Rightarrow \psi$. Por R$\to$, inferimos $\Rightarrow Tr\langle\kappa\rangle \to \psi$ y por LW $Tr\langle\kappa\rangle \to (Tr\langle\kappa\rangle \to \psi) \Rightarrow Tr\langle\kappa\rangle \to \psi$.

Teorema 7.3.9 (Propiedades de Tr I) *El predicado veritativo es* ingenuo *y* transparente *en* ${}^{NC}LK_3^{++}$. *Es decir:*

- $Tr(x)$ *es ingenuo:* $\Rightarrow Tr\langle\phi\rangle \leftrightarrow \phi$.
- $Tr(x)$ *es transparente: sea* $\Gamma \Rightarrow \Delta$ *cualquier secuente y sea* $\Gamma' \Rightarrow \Delta'$ *el resultado de reemplazar* ϕ *por* $Tr\langle\phi\rangle$ *o viceversa en el primer secuente. Luego,* $\Gamma \Rightarrow \Delta$ *tiene prueba si y sólo si* $\Gamma' \Rightarrow \Delta'$ *tiene prueba.*

Prueba La ingenuidad es casi inmediata a partir de LTr, RTr y R$\rightarrow$. La transparencia es un poco más difícil de probar. La idea es probar primero un resultado general de intersustitutibilidad y luego obtener como corolario la transparencia del predicado veritativo. La intersustitutibilidad consiste en el hecho de que dadas dos fórmulas equivalentes, el resultado de sustituir una por otra en un secuente dado es tal que la derivabilidad se preserva. Omito los detalles. ∎

La noción de verdad tiene algunas propiedades atractivas adicionales, además de la ingenuidad y la transparencia:

Teorema 7.3.10 (Propiedades de Tr II) *El predicado veritativo admite vacíos de verdad y es completamente composicional en* ${}^{NC}LK_3^{++}$.

- *Vacíos:*
  - $\not\Rightarrow Tr\langle\phi\rangle \vee Tr\langle\neg\phi\rangle$.
- *Composicionalidad:*
  - $Tr\langle\neg\phi\rangle \Leftrightarrow \neg Tr\langle\phi\rangle$
  - $Tr\langle\phi \wedge \psi\rangle \Leftrightarrow Tr\langle\phi\rangle \wedge Tr\langle\psi\rangle$
  - $Tr\langle\phi \vee \psi\rangle \Leftrightarrow Tr\langle\phi\rangle \vee Tr\langle\psi\rangle$
  - $Tr\langle\phi \rightarrow \psi\rangle \Leftrightarrow Tr\langle\phi\rangle \rightarrow Tr\langle\psi\rangle$

Quizás la principal ventaja sobre las teorías paracompletas (y paraconsistentes) estándar sea que en este enfoque es posible definir un operador ingenuo de validez. Recordemos la definición de *internalizar una metarregla* que introduje en el capítulo 5. Para aplicarla al sistema ${}^{NC}LK_3^{++}$ necesitamos generalizarla:

Definición Diré que una teoría $\mathcal{T}$ *internaliza* una metarregla $\mathcal{R}$ de la forma

$$\mathcal{R}\,\frac{\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, ..., \Gamma_n \Rightarrow \Delta_n}{\Gamma \Rightarrow \Delta}$$

si $\mathcal{T}$ prueba

$$Val(\Gamma_1, \Delta_1), ..., Val(\Gamma_n, \Delta_n) \Rightarrow Val(\Gamma, \Delta).$$

La generalización es necesaria debido a que $^{NC}LK_3^{++}$ contiene metarreglas con más de dos premisas. Ahora podemos mostrar que Val tiene las siguientes propiedades:

Teorema 7.3.11 (Propiedades de Val I) *La noción de validez es ingenua y puede internalizarse. Más formalmente, tenemos:*

- *Val es ingenuo: $\Rightarrow Val(\Phi, \Psi)$ si y sólo si $\Phi \Rightarrow \Psi$.*
- *Val puede internalizarse: $^{NC}LK_3^{++}$ internaliza todas sus metarreglas.*

Prueba Para el primer ítem la estrategia es similar a la que empleamos para el teorema de la deducción. La dirección de derecha a izquierda es inmediata por RVal y la dirección es izquierda a derecha se obtiene usando *corte*. Una prueba de que $^{NC}LK_3^{++}$ internaliza todas sus metarreglas puede encontrarse en el apéndice C, que figura al final de este capítulo.

Es más, $^{NC}LK_3^{++}$ no sólo internaliza todas sus metarreglas sino que además no internaliza reglas inválidas. Esta es una ventaja crucial sobre el enfoque no transitivo que discutimos en el capítulo anterior. En particular, no es difícil ver que la metarregla de contracción estructural no puede internalizarse. Esto se debe a que para internalizar contracción necesitamos aplicar la regla de contracción. Recuérdese que en el caso de la regla de corte ocurría lo opuesto. Era posible internalizar corte sin utilizar la regla de corte[8].

Hay otras propiedades interesantes relacionadas con el operador de validez:

Proposición 7.3.12 (Propiedades Val II) *La noción de validez admite vacíos, preserva verdad e interactúa razonablemente con la noción de verdad:*

- *Vacíos: $\not\Rightarrow Val(\Phi, \Psi) \vee \neg Val(\Phi, \Psi)$.*
- *Un argumento válido preserva verdad: $Val(\Phi, \Psi), Tr\langle\phi_1\rangle, ..., Tr\langle\phi_n\rangle \Rightarrow Tr\langle\psi_1\rangle, ..., Tr\langle\psi_m\rangle$.*

[8]Esto último se cumple siempre y cuando la versión de LVal que usemos sea la de $^{NC}LK_3^{++}$ o una más fuerte.

- *Validez y verdad (aquí me restrinjo a argumentos con una sola premisa y una sola conclusión):*
  - $Val(\phi, \psi) \Rightarrow Tr\langle\phi\rangle \rightarrow Tr\langle\psi\rangle$.
  - $\neg(Tr\langle\phi\rangle \rightarrow Tr\langle\psi\rangle) \Rightarrow \neg Val(\phi, \psi)$.
  - $Val(Tr\langle\phi\rangle, Tr\langle\psi\rangle) \Leftrightarrow Tr\langle Val(\phi, \psi)\rangle$.

Que Val admite vacíos puede verse considerando la oración v-Curry π. No se da que $\Rightarrow \pi$ ni que $\Rightarrow \neg\pi$. Que Val sea preservador de verdad quiere decir que siempre que aceptemos la validez de un argumento de Φ a Ψ, y que aceptemos la verdad de todas las oraciones en Φ, deberíamos aceptar la verdad de alguna de las oraciones en Ψ. Dado que la metarregla de juntar premisas y juntar conclusiones no se cumple, debemos tener cierto cuidado al reforzar esta propiedad. Siempre podemos pasar las oraciones a la derecha de un secuente utilizando el condicional, pero no podemos introducir una conjunción a la izquierda. Para ilustrar este punto, consideremos la primera de las propiedades que muestran la interacción entre validez y verdad. Debido a que tenemos $Val(\phi, \psi), Tr\langle\phi\rangle \Rightarrow Tr\langle\psi\rangle$, podemos obtener $Val(\phi, \psi) \Rightarrow Tr\langle\phi\rangle \rightarrow Tr\langle\psi\rangle$ e incluso $\Rightarrow Val(\phi, \psi) \rightarrow (Tr\langle\phi\rangle \rightarrow Tr\langle\psi\rangle)$, pero no siempre podemos obtener $Val(\phi, \psi) \wedge Tr\langle\phi\rangle \Rightarrow Tr\langle\psi\rangle$.

He dejado lo más importante para lo último. Necesitamos garantizar que ${}^{NC}LK_3^{++}$ no sea una teoría trivial. De hecho, dado que es paracompleta y no paraconsistente, queremos que sea una teoría consistente. Una forma de probar esto es mostrando que la regla de corte (la única regla que podemos usar para eliminar fórmulas en una prueba) es eliminable.

Teorema 7.3.13 (Eliminación de corte) *La regla de corte es eliminable de ${}^{NC}LK_3^{++}$. Esto es, para cada secuente $\Gamma \Rightarrow \Delta$, si hay una prueba de $\Gamma \Rightarrow \Delta$, hay una prueba de $\Gamma \Rightarrow \Delta$ donde la regla de corte no se utiliza.*

Prueba Véase el apéndice B al final de este capítulo. ∎

De esto se sigue que evitamos las paradojas.

Corolario 7.3.14 *La teoría ${}^{NC}LK_3^{++}$ es consistente.*

Prueba Si corte es eliminable, no hay ninguna manera de obtener el secuente vacío en ${}^{NC}LK_3^{++}$. ∎

7.4. Una comparación con otras teorías no contractivas

En esta sección voy a mencionar algunos aspectos en los que creo que la teoría no contractiva que he ofrecido es superior a las otras teorías no contractivas disponibles en la bibliografía. En la siguiente sección voy a considerar una serie de posibles problemas que afectan a dicha teoría[9].

La primera ventaja importante que voy a discutir está relacionada con el tratamiento de las oraciones paradójicas. Hemos visto que un gran problema para las teorías no contractivas es el de darle sentido a la falla de contracción para estas oraciones. Ya en el capítulo 4 ofrecí un diagnóstico del mentiroso y de oraciones similares en el que, según sostuve, debemos entenderlas como oraciones ambiguas. Las oraciones ambiguas son oraciones que expresan dos (o más) proposiciones al mismo tiempo. El significado está, por decirlo de algún modo, sobredeterminado. Por ejemplo, la oración 'Daniela no es amiga de Marcela porque es muy introvertida' es ambigua entre una lectura donde Daniela es muy introvertida y otra en la que Marcela es muy introvertida. Si tomamos la oración con sus dos significados, podemos inferir que tanto Daniela como Marcela son muy introvertidas. Pero esa conjunción no puede deducirse a partir de ninguna de las dos desambiguaciones.

En un caso típico de ambigüedad, como el del ejemplo que acabo de dar, desambiguamos utilizando cualquier información contextual disponible. Desgraciadamente, esta estrategia no siempre funciona. En el caso de la oración del mentiroso, la ambigüedad reside en que la oración expresa su propia falsedad y (en virtud de la transparencia del predicado veritativo) su propia verdad. Y es únicamente cuando tenemos en cuenta sus dos significados de forma conjunta que la oración genera problemas.

Este diagnóstico se basa en ideas de [24] y sirve no sólo para motivar un enfoque paracompleto y/o paraconsistente a las paradojas, sino también un enfoque donde se ponga en cuestión la regla de contracción. Sin embargo, no es para nada evidente de qué forma la presunta ambigüedad de las oraciones paradójicas nos proporciona una razón para poner en duda la regla de contracción. Weber y Caret presentan el desafío como sigue:

> Every sentence is committed to its own truth. Most sentences are committed to something else, too (truth-tellers excepted); they have consequences, some further content. It is thought that sentences express propositions, and one either rejects, or does

[9] Como es habitual, la mayoría de las cosas que diré sobre esta teoría se trasladan a su dual paraconsistente (esbozada más arriba).

> not reject, a proposition; on previous conceptions, one sentence can have only one proposition as its content. The burden of a contraction-free theorist is to give sense to talking about two or more 'iterations' of a proposition.

Al aplicar esta idea a la oración v-Curry, intentan explicar la falla de contracción de la siguiente forma. Dicen:

> The VCurry sentence C does indeed appear to express two different propositions (...). On the one hand, C expresses that C is true; and on the other, it expresses that C is absurd. Prima facie, these are two different propositions, and at this stage of our understanding about such pathologies, it seems prudent to take the content of C at fact value. (...)
>
> The salient point is not merely that the sentence C expresses two things. Lots of sentences do that. But in most cases we expect that there is a singular proposition expressed by a given sentence -the conjunction of its contents- that includes every proposition it expresses as a part. Matters are not so simple with the VCurry. Two copies of VCurry really are absurd, trivial. The single sentence C is false, but not empty: it is a warning.

Esta idea, en mi opinión, es atractiva y vale la pena explorarla en mayor detalle. Supongamos que una oración ϕ es ambigua entre dos significados. Quizás, es solamente cuando tomamos a ϕ con sus dos significados que implica una cierta oración ψ, pero es posible que ninguna desambiguación de ϕ por sí sola implique ψ. Un modo de representar esta falla es mediante el rechazo de contracción.

En el capítulo 4 sugerí que debido a que la negación se comporta de forma ambigua, la oración del mentiroso es una oración ambigua. Más precisamente, λ expresa dos proposiciones: $Tr\langle\lambda\rangle$ y $\neg Tr\langle\lambda\rangle$. Cuando razonamos con una oración de este tipo, debemos preguntarnos qué proposición está expresando. La paradoja del mentiroso ocurre porque tomamos erróneamente a λ como expresando dos proposiciones simultáneamente. Para evitar la paradoja, primero debemos desambiguar λ. Esto nos permite explicar por qué falla contracción en el caso de λ (y de otras oraciones paradójicas), ya que es la regla de contracción la que permite que esta ambigüedad sea pasada por alto. Al rechazar contracción es posible evitar esta ambigüedad, pues solamente podemos utilizar $Tr\langle\lambda\rangle$ o $\neg Tr\langle\lambda\rangle$ en el curso de una derivación, pero no ambas. Por lo tanto, para resumir, creo que este diagnóstico para la oración del mentiroso y oraciones afines es muy superior al diagnóstico ofrecido en otros enfoques. Si tomamos la oración del mentiroso con sus dos significados, debemos rechazarla: $Tr\langle\lambda\rangle, \neg Tr\langle\lambda\rangle \Rightarrow$. Pero no hay ninguna razón para rechazar solamente una ocurrencia de la oración del mentiroso, de modo que: $Tr\langle\lambda\rangle \not\Rightarrow$ y $\neg Tr\langle\lambda\rangle \not\Rightarrow$.

La segunda cuestión de la que quiero hablar tiene que ver con la relación entre las reglas de contracción estructural y el rechazo de tercero excluido, por un lado, y de explosión, por otro. En general, las teorías que rechazan RC no pueden probar $\Rightarrow \phi \vee \neg\phi$. Y, de forma similar, en general, las teorías que rechazan LC no pueden probar el secuente $\phi \wedge \neg\phi \Rightarrow$:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\phi \Rightarrow \phi}{\Rightarrow \phi, \neg\phi}\,\mathrm{R}\neg}{\Rightarrow \phi \vee \neg\phi, \neg\phi}\,\mathrm{R}\vee}{\Rightarrow \phi \vee \neg\phi, \phi \vee \neg\phi}\,\mathrm{R}\vee}{\Rightarrow \phi \vee \neg\phi}\,\mathrm{R}C
\qquad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\phi \Rightarrow \phi}{\phi, \neg\phi \Rightarrow}\,\mathrm{L}\neg}{\phi \wedge \neg\phi, \neg\phi \Rightarrow}\,\mathrm{L}\wedge}{\phi \wedge \neg\phi, \phi \wedge \neg\phi \Rightarrow}\,\mathrm{L}\wedge}{\phi \wedge \neg\phi \Rightarrow}\,\mathrm{L}C
$$

Así que, en cierto sentido, las teorías no contractivas en las que falla RC son paracompletas y, en cierto modo, las teorías donde falla LC son paraconsistentes.

En las otras teorías no contractivas que hemos considerado, sin embargo, alguna versión de la ley de tercero excluido resulta válida. En particular, la presencia de la disyunción multiplicativa $\oplus$ nos garantiza que hay una prueba de $\Rightarrow \phi \oplus \neg\phi$. Para el caso en que ϕ es $\neg Tr\langle\lambda\rangle$ esta característica resulta, en mi opinión, sumamente problemática, ya que es posible probar que $\Rightarrow Tr\langle\lambda\rangle \oplus \neg Tr\langle\lambda\rangle$, esto es, debemos aceptar o bien la afirmación de que $Tr\langle\lambda\rangle$ o bien su negación[10]. Más aún, dado que estas teorías son no contractivas, no pueden probar ninguno de los disyuntos, i.e. tenemos $\not\Rightarrow Tr\langle\lambda\rangle$ y $\not\Rightarrow \neg Tr\langle\lambda\rangle$. Esto quiere decir que la metarregla de razonamiento por casos no se cumple para $\oplus$, ya que tenemos $\Rightarrow Tr\langle\lambda\rangle \oplus \neg Tr\langle\lambda\rangle$, $\neg Tr\langle\lambda\rangle \Rightarrow \neg Tr\langle\lambda\rangle$, y $Tr\langle\lambda\rangle \Rightarrow \neg Tr\langle\lambda\rangle$, pero $\not\Rightarrow \neg Tr\langle\lambda\rangle$.

Podría replicarse que $\oplus$ es superior a $\vee$ *qua* representación de la disyunción del lenguaje ordinario en un aspecto importante (véase [111] para una versión de esta objeción). La regla R$\vee$ impone una fuerte restricción constructivista sobre la disyunción, pues básicamente encapsula la idea de que podemos aceptar $\phi \vee \psi$ solamente si aceptamos ϕ o aceptamos ψ. Si bien esto puede sonar excesivo en un contexto general, creo que en lo que respecta a las oraciones paradójicas, esta idea parece inobjetable. ¿Qué otra razón puede haber para aceptar la disyunción entre λ y su negación que no sean

[10] Análogamente, las otras teorías no contractivas validan el secuente $Tr\langle\lambda\rangle \otimes \neg Tr\langle\lambda\rangle \Rightarrow$, esto es, debemos rechazar la afirmación de que tanto $Tr\langle\lambda\rangle$ como su negación se cumplen.

λ y su negación? Por supuesto, en otros contextos (e.g. si trabajamos con una teoría matemática) la objeción tiene peso. Podría ocurrir que tengamos evidencia de la verdad de una disyunción sin tener evidencias de la verdad de ninguno de los disyuntos. Pero esto es así porque en esos contextos asumimos alguna forma de bivalencia, algo que no debemos asumir cuando lidiamos con paradojas.

La tercera ventaja surge del hecho de que no hay necesidad de tener dos tipos de conectivas en ${}^{NC}LK_3^{++}$. Hay una sola conjunción y una sola disyunción. En este sentido, la situación es la misma que en las lógica operacionales. Habitualmente, en las lógicas no contractivas, vimos que hay dos tipos de conjunción y disyunción, de modo que es necesario tomar una decisión. O bien tenemos ambas conjunciones y ambas disyunciones en el vocabulario, o bien solamente tenemos una conjunción y una disyunción. En este último caso, aún debemos tomar otra decisión. O bien la teoría contiene las conectivas aditivas $\wedge$ y $\vee$, o bien contiene las conectivas multiplicativas $\otimes$ y $\oplus$. LL, por ejemplo, contaba con las dos conjunciones y las dos disyunciones. De hecho, la justificación para esto era que la falla de contracción hacía posible distinguir dos formas de juntar premisas y dos formas de juntar conclusiones. En este sentido, LL es más rica que la lógica clásica, ya que esta última es incapaz de trazar ciertas distinciones que, a los ojos de ciertos detractores de contracción, son absolutamente necesarias. En particular, la lógica clásica confunde $\wedge$ con $\otimes$, y $\vee$ con $\oplus$.

A pesar de esto, creo que es difícil justificar la idea de que la conjunción y la disyunción del lenguaje ordinario son expresiones ambiguas. Una cosa es decir que hay más de un modo de juntar premisas y conclusiones, algo con lo que estoy de acuerdo, y otra cosa muy distinta es sostener que cuando usamos 'y' y 'o' en ocasiones los usamos con un significado y en ocasiones con otro. Una forma distinta de ver este asunto es que en ${}^{NC}LK_3^{++}$ $\otimes$ y $\oplus$ se entienden no como conectivas que forman parte del lenguaje objeto, sino como formas de combinar premisas y conclusiones, respectivamente. Aún no me he topado con ningún argumento convincente a favor de la idea de que estas expresiones son conectivas genuinas que capturan el significado de alguna expresión del lenguaje ordinario.

En consecuencia, la ausencia de junciones multiplicativas en ${}^{NC}LK_3^{++}$ quiere decir que no hay ninguna necesidad de postular cierta ambigüedad en el uso corriente de 'y' y de 'o'[11]. Como ya sugerí, esto no quiere decir que ${}^{NC}LK_3^{++}$ no tenga los recursos para capturar la idea de que hay dos formas

[11]Por supuesto, no se produce ningún problema técnico si decidimos agregar las junciones multiplicativas a ${}^{NC}LK_3^{++}$. Mi punto es que, conceptualmente, no ganamos nada al hacerlo.

de combinar premisas (conclusiones). Por el contrario, ${}^{NC}LK_3^{++}$ no necesita de las junciones multiplicativas para hacer esto. Por ejemplo, no es lo mismo afirmar $\phi_1, \phi_2 \Rightarrow \phi_3$ que afirmar $\phi_1 \wedge \phi_2 \Rightarrow \phi_3$ (de modo análogo, no es lo mismo afirmar $\phi_1 \Rightarrow \phi_2, \phi_3$ que afirmar $\phi_1 \Rightarrow \phi_2 \vee \phi_3$). Lo que es importante entender es que la coma no se corresponde con ninguna expresión del lenguaje objeto.

Es interesante señalar que, en cierto modo, la presencia de las junciones multiplicativas trae una complicación. Nos obliga a definir cuantificadores multiplicativos. Si entendemos los cuantificadores como junciones generalizadas, entonces debería haber algún vínculo entre las junciones multiplicativas y los cuantificadores multiplicativos, así como existe un vínculo entre las junciones aditivas y los cuantificadores usuales. Lamentablemente, como ya señalé, no hay consenso en lo que respecta a la mejor forma de definir los cuantificadores multiplicativos. En la teoría MLA de Zardini, vimos que estos cuantificadores se definen por medio de reglas infinitarias que son clásicamente incorrectas. En ${}^{NC}LK_3^{++}$ la situación es mucho menos problemática. Dado que solamente tenemos las junciones aditivas, necesitamos sólo un tipo de cuantificadores. Podemos definirlos de la forma usual (como con las demás constantes lógicas, es preciso proporcionar reglas para cuantificaciones negadas):

$$\text{L}\forall\,\frac{\Gamma, \phi(t) \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \forall x\phi \Rightarrow \Delta} \qquad \text{R}\forall\,\frac{\Gamma \Rightarrow \phi(a), \Delta}{\Gamma \Rightarrow \forall x\phi, \Delta}$$

$$\text{L}\neg\forall\,\frac{\Gamma, \neg\phi(a) \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \neg\forall x\phi, \Rightarrow \Delta} \qquad \text{R}\neg\forall\,\frac{\Gamma \Rightarrow \neg\phi(t), \Delta}{\Gamma \Rightarrow \neg\forall x\phi, \Delta}$$

$$\text{L}\exists\,\frac{\Gamma, \phi(a) \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \exists x\phi, \Rightarrow \Delta} \qquad \text{R}\exists\,\frac{\Gamma \Rightarrow \phi(t), \Delta}{\Gamma \Rightarrow \exists x\phi, \Delta}$$

$$\text{L}\neg\exists\,\frac{\Gamma, \neg\phi(t) \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \neg\exists x\phi, \Rightarrow \Delta} \qquad \text{R}\neg\exists\,\frac{\Gamma \Rightarrow \neg\phi(a), \Delta}{\Gamma \Rightarrow \neg\exists x\phi, \Delta}$$

Es relativamente sencillo ver que estos cuantificadores se comportan de forma adecuada en muchos aspectos. Por ejemplo:

Proposición 7.4.1 (Propiedades de los cuantificadores aditivos) *Los siguientes secuentes tienen prueba en* ${}^{NC}LK_3^{++}$*:*

- *Reglas de De Morgan cuantificacionales*
  - $\forall x\phi \Leftrightarrow \neg\exists x\neg\phi$
  - $\exists x\phi \Leftrightarrow \neg\forall x\neg\phi$
  - $\neg\forall x\phi \Leftrightarrow \exists x\neg\phi$
  - $\neg\exists x\phi \Leftrightarrow \forall x\neg\phi$

- *Instanciación universal y generalización particular*
  - $\forall x\phi \Rightarrow \phi(t)$
  - $\phi(t) \Rightarrow \exists x\phi$

De modo que, hasta cierto punto, la parte cuantificacional de ${}^{NC}LK_3^{++}$ es superior y mejor comprendida que la parte cuantificacional de las teorías no contractivas que contienen junciones multiplicativas[12].

Es más, los cuantificadores de ${}^{NC}LK_3^{++}$ junto con su condicional pueden usarse para dar una teoría decente de la cuantificación restringida. En particular, nos es difícil mostrar que $Tr(x)$ *cumple con su función generalizadora* en el sentido del capítulo 1. Esto es:

Proposición 7.4.2 *Las siguiente reglas valen en ${}^{NC}LK_3^{++}$:*

- $\forall x(\phi(x) \to Tr(x)), \phi\langle\psi\rangle \Rightarrow \psi$ $\quad TE$
- $\neg\psi, \phi\langle\psi\rangle \Rightarrow \exists x(\phi(x) \wedge \neg Tr(x))$ $\quad TI$
- $\forall x(\phi(x) \to \neg Tr(x)), \phi\langle\psi\rangle \Rightarrow \neg\psi$ $\quad \neg TE$
- $\phi\langle\psi\rangle, \psi \Rightarrow \exists x(\phi(x) \wedge Tr(x))$ $\quad \neg TI$

Nótese también que en este aspecto ${}^{NC}LK_3^{++}$ es diferente de las teorías paracompletas de la verdad habituales, porque éstas se ven forzadas a introducir un nuevo condicional (diferente del condicional que utilizan para formalizar enunciados de la forma *si ϕ entonces ψ*) específicamente diseñado para formalizar cuantificaciones restringidas.

Los cuantificadores de ${}^{NC}LK_3^{++}$ son aún más fuertes. Consideremos los principios de cuantificación restringida (propuestos en [34]) de la sección 2.6. Podemos probar lo siguiente:

Proposición 7.4.3 *Los siguientes principios se cumplen en ${}^{NC}LK_3^{++}$:*

- $\forall x(\phi(x) \to \psi(x)), \phi(t) \Rightarrow \psi(t)$
- $\forall x\psi(x) \Rightarrow \forall x(\phi(x) \to \psi(x))$

[12]Digo 'hasta cierto punto' porque en la sección siguiente mencionaré un problema que afecta a los cuantificadores aditivos.

- $\forall x(\phi_1(x) \to \phi_2(x)), \forall x(\phi_2(x) \to \phi_3(x)) \Rightarrow \forall x(\phi_1(x) \to \phi_3(x))$
- $\forall x(\phi_1(x) \to \phi_2(x)), \neg\forall x(\phi_1(x) \to \phi_3(x)) \Rightarrow \neg\forall x(\phi_2(x) \to \phi_3(x))$
- $\forall x(\phi_1(x) \to \phi_2(x)), \forall x(\phi_1(x) \to \phi_3(x)) \Rightarrow \forall x(\phi_1(x) \to \phi_2(x) \wedge \phi_3(x))$
- $\neg\forall x(\phi(x) \to \psi(x)) \Rightarrow \exists x(\phi(x) \to \neg\psi(x))$

En mi opinión, estos son los principales puntos en lo que ${}^{NC}LK_3^{++}$ es superior a otras teorías no contractivas. Esto no implica, desde ya, que ${}^{NC}LK_3^{++}$ no tenga problemas. En lo que queda del capítulo, me encargaré de considerar algunos de esos problemas.

7.5. ¿Problemas?

El primer problema que consideraré es la falla de la metarregla de juntar premisas y juntar conclusiones. Hemos visto que, por ejemplo, ciertas versiones de *modus ponens* fallan, tales como $\phi \wedge (\phi \to \psi) \not\Rightarrow \psi$ y $\phi \wedge Val(\phi, \psi) \not\Rightarrow \psi$. Además, a pesar de ser una teoría no paraconsistente en espíritu, la teoría no prueba cierta versión de la regla de explosión: $\phi \wedge \neg\phi \not\Rightarrow \psi$.

En mi opinión, este no es un problema serio. Pues en todos estos casos podemos utilizar un condicional en lugar de una conjunción para obtener una versión reforzada de la reglas correspondientes. Por caso, si bien es cierto que de $\phi, \phi \to \psi \Rightarrow \psi$ no podemos inferir $\Rightarrow (\phi \wedge (\phi \to \psi)) \to \psi$, podemos usar el teorema de la deducción para obtener una versión puramente condicional de la ley de *modus ponens*, a saber: $\Rightarrow \phi \to ((\phi \to \psi) \to \psi)$. Algo análogo vale para la regla de explosión. Aunque no hay una prueba de $\Rightarrow (\phi \wedge \neg\phi) \to \psi$, sí hay una prueba de $\Rightarrow \phi \to (\neg\phi \to \psi)$.

La segunda cuestión que quiero discutir es la falla de distribución. Hemos visto que una ley de distribución que la teoría no valida es la siguiente:
si ϕ y (ψ o χ), entonces (ϕ y ψ) o (ϕ y χ).
Esta ley parece cumplirse para la conjunción y la disyunción del lenguaje natural. Ahora bien, la mayoría de las teorías no contractivas carecen de este principio. Por ejemplo, la situación en LL es como sigue. Los partidarios de LL creen que su teoría no debe ser entendida como rival de la lógica clásica sino como una lógica que es capaz de hacer distinciones que la lógica clásica no es capaz de hacer. En este sentido, sostienen que LL 'contiene' la lógica clásica, ya que los teoremas clásicos se cumplen para al menos una conjunción (disyunción). Así, esperaríamos que la ley de distribución se cumpla o bien para el par $\wedge$-$\vee$ o bien para el par $\otimes$-$\oplus$. Desgraciadamente,
$\not\Rightarrow \phi \wedge (\psi \vee \chi) \to (\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \psi)$

y
$\not\Rightarrow \phi \otimes (\psi \oplus \chi) \rightarrow (\phi \otimes \psi) \oplus (\phi \otimes \psi)$.
Como señalan Mares y Paoli, LL recupera cierta forma de distribución, a saber:
$\Rightarrow \phi \otimes (\psi \vee \chi) \rightarrow (\phi \otimes \psi) \vee (\phi \otimes \chi)$
Sin embargo, podría sugerirse que sería mejor si la ley de distribución fuese 'recuperada' en términos puramente aditivos o puramente multiplicativos.

En la teoría de Zardini el problema parece aún más grave, ya que ahora ni siquiera tenemos conectivas aditivas. En consecuencia, no es posible recuperar *ninguna* forma de distribución. Pero si, como cree Zardini, $\otimes$ y $\oplus$ son contrapartes formales de las junciones del lenguaje ordinario, la falla de distribución es difícil de explicar. Asimismo, contrariamente a lo que puede decirse con otras inferencias clásicamente válidas que se rechazan en MLA (e.g. $\phi \Rightarrow \phi \otimes \phi$ y $\phi \rightarrow \psi \Rightarrow \phi \rightarrow (\phi \rightarrow \psi)$), la ley de distribución no parece jugar ningún papel en la derivación de las paradojas usuales. Por lo tanto, su ausencia debe ser explicada de una forma diferente[13].

He señalado que en ${}^{NC}LK_3^{++}$ se da que $\phi_1 \wedge (\phi_2 \vee \phi_3) \not\Rightarrow (\phi_1 \wedge \phi_2) \vee (\phi_1 \wedge \phi_3)$. Dualmente, también se da que $(\phi_1 \vee \phi_2) \wedge (\phi_1 \vee \phi_3) \not\Rightarrow \phi_1 \vee (\phi_2 \wedge \phi_3)$ (las conversas de ambas pueden probarse). Para dar una prueba de ambos secuentes es necesario usar la regla de contracción. Sin embargo, como en LL, el problema no es tan serio. Podemos 'recuperar' ciertas versiones de distribución. Para la primera, tenemos:
$\phi_1, (\phi_2 \vee \phi_3) \not\Rightarrow (\phi_1 \wedge \phi_2) \vee (\phi_1 \wedge \phi_3)$
Y para la segunda, tenemos:
$(\phi_1 \vee \phi_2) \wedge (\phi_1 \vee \phi_3) \not\Rightarrow \phi_1, (\phi_2 \wedge \phi_3)$.

La tercera objeción que abordaré es que ${}^{NC}LK_3^{++}$ no es una solución óptima o económica a las paradojas debido a que, en cierto modo, no es necesario que sea paracompleta. En particular, la paradoja del mentiroso, la paradoja de Curry, la paradoja de la validez y todas sus variantes se bloquean una vez que rechazamos la regla de contracción estructural. Por ende, si rechazar la regla de contracción es suficiente para hacer frente a las paradojas, no parece necesario rechazar reglas operacionales que involucren la negación o cualquier otra conectiva.

La queja asume, según entiendo, que todas las paradojas autorreferenciales pertenecen a la misma familia y que, como consecuencia, un tratamiento unificado es deseable. La suposición de que todas las paradojas autorreferenciales son del mismo tipo es, como ya señalé en el capítulo 1, cuanto menos

[13]Una cuestión adicional es que MLA prueba el axioma del "interruptor de luz": $(\phi_1 \otimes \phi_2) \rightarrow \phi_3 \Rightarrow (\phi_1 \rightarrow \phi_3) \oplus (\phi_2 \rightarrow \phi_3)$.

controversial. En particular, deja de lado la idea -igual de controversial- de que la paradoja del mentiroso y la paradoja de Curry (y v-Curry) sean de distinto tipo, una idea con la que varios filósofos simpatizan. De hecho, una forma de entender el modo en que ${}^{NC}LK_3^{++}$ hace frente a las paradojas es como sigue: para las paradojas operacionales, una solución operacional es preferible, pero para las paradojas puramente estructurales[14], una solución subestructural parece preferible. La paradoja de la validez, en su formulación estándar, es una paradoja puramente estructural, de modo que es razonable modificar alguna propiedad estructural. La paradoja del mentiroso es una paradoja operacional, y aunque rechazar contracción es suficiente para bloquear la derivación de una inconsistencia, dicho rechazo no nos da una explicación adecuada de la paradoja. En cambio, al rechazar tercero excluido (o explosión), no sólo evitamos una inconsistencia sino que también proporcionamos una explicación del estatus semántico de la oración del mentiroso. Por ende, aunque una solución operacional sea preferible para las paradojas operacionales, para las paradojas puramente estructurales, una solución subestructural parece necesaria.

La dificultad final que consideraré tiene que ver con los cuantificadores, más precisamente, con la posibilidad de internalizar las metarreglas que gobiernan su comportamiento. Este problema no es exclusivo de ${}^{NC}LK_3^{++}$, sino que afecta también a otros enfoques donde se busca internalizar las metarreglas. En el capítulo 1 señalé que la interacción entre los cuantificadores y las reglas para la verdad no es sencilla. Algo análogo puede decirse de la interacción entre los cuantificadores y la validez. En el capítulo 1 ofrecí una solución temporaria prohibiendo que la constante a ocurra *explícita o implícitamente* en el secuente que es la conclusión de la regla R$\forall$. Ahora bien, aún cuando sea posible dar una formulación precisa de esta restricción, hay otro inconveniente que debemos tener en cuenta. Consideremos el siguiente intento de internalizar la regla R$\forall$ ${}^{NC}LK_3^{++}$ (donde Val es un operador):

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Gamma \qquad Ra \Rightarrow Ra \qquad \Delta \Rightarrow \Delta}{Val(\Gamma, Ra \cup \Delta), \Gamma \Rightarrow Ra, \Delta}\,\mathrm{L}Val}{Val(\Gamma, Ra \cup \Delta), \Gamma \Rightarrow \forall x R(x), \Delta}\,\mathrm{R}\forall^*}{Val(\Gamma, Ra \cup \Delta) \Rightarrow Val(\Gamma, \forall x R(x) \cup \Delta)}\,\mathrm{R}Val$$

Nótese que la aplicación de R$\forall$ es incorrecta aún cuando a sea una constante arbitraria en el sentido de que no ocurre en Γ, Δ ni Rx. Pues a ocurre

[14]Digo 'puramente estructurales' porque no toda paradoja que involucre el predicado de validez merece una solución estructural. Consideremos una oración κ_1 que expresa que $\neg Val\langle\kappa_1\rangle$ (donde $Val(x)$ se define como $Val(\langle\top\rangle, x)$). Esta oración conduce a una inconsistencia siempre que las reglas operacionales habituales para la negación estén disponibles. Por ende, las paralógicas no tienen ningún inconveniente en lidiar con κ_1.

en el secuente $Val(\Gamma, Ra \cup \Delta), \Gamma \Rightarrow \forall x R(x), \Delta$. Ahora bien, si en lugar de usar Val como un operador, lo utilizamos como un predicado, a ya no ocurre *explícitamente* en ese secuente. Sin embargo, puesto que estamos exigiendo que a tampoco ocurra implícitamente, la aplicación sigue siendo incorrecta. Consideraciones similares se aplican a L$\neg\forall$, L$\exists$ y R$\neg\exists$ (i.e. a las reglas cuantificacionales con restricciones). Por tanto, parece que la internalización de las metarreglas cuantificacionales no es inmediata, como en el caso proposicional.

A pesar de estos problemas, espero que lo dicho en este capítulo sea suficiente para convencer al lector de que la ruta no contractiva es atractiva y, principalmente, de que está disponible para los partidarios de las paralógicas.

Apéndices

Apéndice B

Eliminación de corte

En este apéndice ofreceré una prueba del teorema 7.2.13, que establece que la regla de corte es eliminable en ${}^{NC}LK_3^{++}$. Antes de ofrecer dicha prueba, necesito probar un par de lemas:

Lema B.0.1 *La regla L$\neg\neg$ es invertible en ${}^{NC}LK_3^{++}$. Esto es, si hay una prueba de $\Gamma, \neg\neg\phi \Rightarrow \Delta$, también hay una prueba de $\Gamma, \phi \Rightarrow \Delta$.*

Prueba Esto se prueba por inducción sobre la altura de la derivación de $\Gamma, \neg\neg\phi \Rightarrow \Delta$. Su altura no puede ser 0, ya que sólo los secuentes de la forma $\chi \Rightarrow \chi$ tienen altura 0. En consecuencia, hay dos posibilidades. O bien $\neg\neg\phi$ es principal o no lo es. Si lo es, se obtiene por L$\neg\neg$ o por LW (no hay otra regla que nos permita obtener ese tipo de fórmula). Si se obtiene por L$\neg\neg$, entonces viene del secuente $\Gamma, \phi \Rightarrow \Delta$ y tenemos lo que buscábamos. Si se obtiene por LW, entonces viene de $\Gamma \Rightarrow \Delta$. Pero por L$W$ podemos obtener $\Gamma, \phi \Rightarrow \Delta$, y una vez más tenemos lo que buscábamos. Si ϕ no es principal, entonces viene de los secuentes $S_1, ..., S_n$ a partir de alguna regla R. En ese caso, aplicamos la hipótesis inductiva a $S_1, ..., S_n$ (la aplicamos a uno de los S_i o a todos ellos dependiendo de si R es aditiva o multiplicativa) y luego la regla R para obtener $\Gamma, \phi \Rightarrow \Delta$. Por ejemplo, si R es R$\to$, entonces $\Gamma, \neg\neg\phi \Rightarrow \Delta$ es de la forma $\Gamma, \neg\neg\phi \Rightarrow \phi_1 \to \phi_2, \Delta'$, y viene de $\Gamma, \neg\neg\phi, \phi_1 \Rightarrow \phi_2, \Delta'$. Por la hipótesis inductiva, hay una prueba de $\Gamma, \phi, \phi_1 \Rightarrow \phi_2, \Delta'$. Pero entonces podemos aplicar R$\to$ para obtener $\Gamma, \phi, \Rightarrow \phi_1 \to \phi_2, \Delta'$. Los casos restantes son similares. ∎

También necesitamos probar que la regla L$\neg$ es admisible en el sistema ${}^{NC}LK_3^{++}$. Para eso introducimos la siguiente definición (que también será de utilidad en la prueba de eliminación de corte):

Definición (*Complejidad-Tr de una ocurrencia de una fórmula en un secuente dentro de una prueba*, véase [46]) Si ϕ no contiene ninguna ocurrencia del predicado veritativo, cualquier ocurrencia de ϕ tiene complejidad-Tr 0. Si ϕ no es la fórmula principal en la aplicación de una regla, la ocurrencia en el secuente inferior tiene la misma complejidad-Tr que la ocurrencia en el secuente superior. Si ϕ contiene el predicado veritativo y forma parte de un secuente inicial o se introdujo por monotonía, su complejidad-Tr es 1. La complejidad-Tr de una fórmula no se ve afectada por las reglas lógicas. Por ejemplo, en R$\neg\neg$, la ocurrencia de $\neg\neg\phi$ en el secuente inferior tiene la misma complejidad-Tr que la ocurrencia de ϕ en el secuente superior. En el caso de L$\vee$, la complejidad-Tr de la fórmula $\phi \vee \psi$ que ocurre en el secuente inferior es el máximo de las complejidades-Tr de las respectivas ocurrencias de ϕ y ψ en el secuente superior. Consideraciones análogas se aplican a las otras reglas lógicas. En LTr, RTr, L$\neg Tr$ y R$\neg Tr$ la complejidad-Tr se incrementa en 1. Esto es, si la complejidad-Tr de ϕ ($\neg\phi$) es n, la complejidad-Tr de $Tr\langle\phi\rangle$ ($\neg Tr\langle\phi\rangle$) es $n + 1$.

Ahora podemos probar lo siguiente:

Lema B.0.2 *La regla L$\neg$ es admisible en* ${}^{NC}LK_3^{++}$*:*

$$L\neg\,\frac{\Gamma \Rightarrow \phi, \Delta}{\Gamma, \neg\phi \Rightarrow \Delta}$$

Prueba La prueba es por una inducción triple. Una inducción sobre la complejidad-Tr de la fórmula ϕ, con una subinducción sobre la complejidad (lógica) de ϕ, y con una subsubinducción sobre la altura de la derivación de $\Gamma \Rightarrow \phi, \Delta$. Si su altura es 0, ϕ es ϕ^{At}, Γ es ϕ^{At} también, y Δ está vacío. Luego podemos obtener $\phi^{At}, \neg\phi^{At} \Rightarrow$ a partir de $\phi^{At} \Rightarrow \phi^{At}$ por L$\neg At$.

Si su altura es algún $n \neq 0$, entonces viene a partir de alguna regla R. Hay dos posibilidades. O bien ϕ es principal o no lo es. Si lo es viene por alguna de las reglas de la derecha: RW, R$\neg\neg$, R$\wedge$, R$\neg\wedge$, R$\vee$, R$\neg\vee$, R$\rightarrow$, R$\neg\rightarrow$, RTr, R$\neg Tr$, RVal o R$\neg Val$. Analizaré tres casos.

Si ϕ es de la forma $\phi_1 \wedge \phi_2$, entonces la premisa tiene la forma $\Gamma \Rightarrow \phi_1 \wedge \phi_2, \Delta$ y viene por la regla R$\wedge$ a partir de los secuentes $\Gamma \Rightarrow \phi_1, \Delta$ y $\Gamma \Rightarrow \phi_2, \Delta$. Por la hipótesis inductiva (sobre la complejidad lógica o la altura de la derivación) inferimos $\Gamma, \neg\phi_1 \Rightarrow \Delta$ y $\Gamma, \neg\phi_2 \Rightarrow \Delta$. Luego, por la regla L$\neg\wedge$ obtenemos $\Gamma, \neg(\phi_1 \wedge \phi_2) \Rightarrow \Delta$.

Si ϕ es de la forma $Val(\Phi, \Psi)$, entonces nuestra premisa es de la forma
$Val(\Gamma_1, \Delta_1), ..., Val(\Gamma_k, \Delta_k), \Rightarrow Val(\Phi, \Psi)$
y viene por la regla RVal a partir del secuente
$Val(\Gamma_1, \Delta_1), ..., Val(\Gamma_k, \Delta_k), \phi_1, ..., \phi_n \Rightarrow \psi_1, ..., \psi_m$.
Por la hipótesis inductiva (sobre la complejidad lógica) aplicada m-veces, podemos inferir que

$Val(\Gamma_1, \Delta_1), ..., Val(\Gamma_k, \Delta_k), \phi_1, ..., \phi_n, \neg\psi_1, ..., \neg\psi_m \Rightarrow$.
Luego, por L$\neg Val$, obtenemos
$Val(\Gamma_1, \Delta_1), ..., Val(\Gamma_k, \Delta_k), \neg Val(\Phi, \Psi) \Rightarrow$.

Si ϕ es de la forma $\neg Tr\langle\psi\rangle$, entonces la premisa tiene la forma $\Gamma \Rightarrow \neg Tr\langle\psi\rangle, \Delta$ y viene por la regla R$\neg Tr$ a partir del secuente $\Gamma \Rightarrow \neg\psi, \Delta$. Por la hipótesis inductiva (sobre la complejidad-Tr de ϕ), inferimos que $\Gamma, \neg\neg\psi \Rightarrow \Delta$. Por el lema previo podemos obtener $\Gamma, \psi \Rightarrow \Delta$. Luego, por L$Tr$ y L$\neg\neg$, tenemos $\Gamma, \neg\neg Tr\langle\psi\rangle \Rightarrow \Delta$.

Si, por otra parte, ϕ no es principal, viene de los secuentes $S_1, ..., S_n$ por alguna regla R. En ese caso aplicamos la hipótesis inductiva (sobre la altura de la derivación) a $S_1, ..., S_n$ (nuevamente, la aplicamos a uno de los S_i o a todos ellos dependiendo de si R es aditiva o multiplicativa) y luego la regla R para obtener $\Gamma, \neg\phi \Rightarrow \Delta$. Por ejemplo, si R es R$\rightarrow$, entonces $\Gamma \Rightarrow \phi, \Delta$ es de la forma $\Gamma \Rightarrow \phi_1 \rightarrow \phi_2, \phi, \Delta'$, y viene de $\Gamma, \phi_1 \Rightarrow \phi_2, \phi, \Delta'$. Por la hipótesis inductiva, debe haber una prueba de $\Gamma, \neg\phi, \phi_1 \Rightarrow \phi_2, \Delta'$. Pero entonces podemos aplicar R$\rightarrow$ para obtener $\Gamma, \neg\phi \Rightarrow \phi_1 \rightarrow \phi_2, \Delta'$. Los casos restantes son similares. ∎

Para la prueba principal necesitaremos una definición adicional:

Definición (*Altura de corte*) La altura de corte de una instancia de la regla de corte en una derivación es la suma de las alturas de las derivaciones de las dos premisas de corte (para la definición de *altura*, ver el capítulo 2).

En la prueba de eliminación de corte que ofrezco más abajo la idea general es que dada una prueba en la que la regla de corte se utiliza solamente una vez (en el último paso), siempre es posible transformar la prueba en una en la cual o bien se reduce la complejidad-Tr de la formula cortada, o bien se reduce la complejidad (lógica) de la fórmula cortada, o bien se reduce la altura de corte de la derivación. Esto es suficiente para afirmar que para cada secuente $\Gamma \Rightarrow \Delta$, si hay una prueba de $\Gamma \Rightarrow \Delta$ que usa la regla de corte, hay una prueba de $\Gamma \Rightarrow \Delta$ donde corte está ausente, ya que para eliminar varios cortes es suficiente reducir los cortes uno por uno.

Esquema de prueba Seguiré, hasta cierto punto, la estrategia de [60]. La prueba es nuevamente por una inducción triple. Una inducción sobre la complejidad-Tr de la fórmula cortada, con una subinducción sobre la complejidad (lógica) de la fórmula cortada, y con una subsubinducción sobre la suma de las alturas de las derivaciones de las dos premisas de corte (i.e. una subsubinducción sobre la altura de corte). Podemos suponer que la fórmula cortada es ϕ y que hay solamente una aplicación de la regla de corte, la cual ocurre en el último paso de la prueba:

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \phi, \Delta \qquad \Pi, \phi \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}\,corte$$

Tenemos los siguientes casos principales: una de las premisas de corte es un secuente inicial, la fórmula cortada no es principal en ninguna de las premisas, la fórmula cortada es principal en una de las premisas y la fórmula cortada es principal en ambas premisas. Veamos qué ocurre en cada uno de estos casos:

- *Una de las premisas es un secuente inicial.* Obviamente, hay dos casos:
    - *La premisa izquierda es un secuente inicial.* Luego, ϕ es un literal χ, Γ es también χ y Δ es vacío. Podemos obtener $\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma$ a partir de $\chi \Rightarrow \chi$ aplicando monotonía.
    - *La premisa derecha es un secuente inicial.* Este caso es similar al caso previo.
- *La fórmula cortada no es principal en ninguna premisa* Aquí tenemos un subcaso para cada regla, excepto (curiosamente) para RVal (es decir, tenemos 28 casos en total). La estrategia es siempre "mover el corte hacia arriba", de forma tal que en todos los casos la altura de corte sea reducida. Daré como ejemplos los casos en los que la premisa izquierda se obtiene por medio de una aplicación de L$\neg\neg$, L$\vee$, R$\neg Tr$, R$\neg Val$ y L$\neg Val$. Luego explicaré por qué no necesitamos considerar la regla RVal.
    - *La premisa izquierda se obtiene por una aplicación de L$\neg\neg$.* Por tanto, tenemos la siguiente derivación:

    $$\dfrac{\dfrac{\Gamma', \psi \Rightarrow \phi, \Delta}{\Gamma', \neg\neg\psi \Rightarrow \phi, \Delta}\,\mathrm{L}\neg\neg \qquad \Pi, \phi \Rightarrow \Sigma}{\Gamma', \Pi, \neg\neg\psi \Rightarrow \Delta, \Sigma}\,corte$$

    que puede transformarse en

    $$\dfrac{\dfrac{\Gamma', \psi \Rightarrow \phi, \Delta \qquad \Pi, \phi \Rightarrow \Sigma}{\Gamma', \Pi, \psi \Rightarrow \Delta, \Sigma}\,corte}{\Gamma', \Pi, \neg\neg\psi \Rightarrow \Delta, \Sigma}\,\mathrm{L}\neg\neg$$

    - *La premisa izquierda se obtiene por una aplicación de L$\vee$.* Luego, la derivación tiene la siguiente forma:

    $$\dfrac{\dfrac{\Gamma', \phi_1 \Rightarrow \phi, \Delta \qquad \Gamma', \phi_2 \Rightarrow \phi, \Delta}{\Gamma', \phi_1 \vee \phi_2 \Rightarrow \phi, \Delta}\,\mathrm{L}\vee \qquad \Pi, \phi \Rightarrow \Sigma}{\Gamma', \Pi, \phi_1 \vee \phi_2 \Rightarrow \Delta, \Sigma}\,corte$$

Esto puede transformarse en:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma', \phi_1 \Rightarrow \phi, \Delta \qquad \Pi, \phi \Rightarrow \Sigma}{\Gamma', \Pi, \phi_1 \Rightarrow \Delta, \Sigma}\,corte \qquad \dfrac{\Gamma', \phi_2 \Rightarrow \phi, \Delta \qquad \Pi, \phi \Rightarrow \Sigma}{\Gamma', \Pi, \phi_2 \Rightarrow \Delta, \Sigma}\,corte}{\Gamma', \Pi, \phi_1 \vee \phi_2 \Rightarrow \phi, \Delta, \Sigma}\,\mathrm{L}\vee$$

- *La premisa izquierda se obtiene por medio de una aplicación de $R\neg Tr$*. Lueog, la derivación tiene la forma:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow \neg\psi, \phi, \Delta'}{\Gamma \Rightarrow \neg Tr\langle\psi\rangle, \phi, \Delta'}\,\mathrm{R}\neg Tr \qquad \Pi, \phi \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \neg Tr\langle\psi\rangle, \Delta', \Sigma}\,corte$$

y puede transformarse en

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow \neg\psi, \phi, \Delta' \qquad \Pi, \phi \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \neg\psi, \Delta', \Sigma}\,corte}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \neg Tr\langle\psi\rangle, \Delta', \Sigma}\,\mathrm{R}Tr$$

- *La premisa izquierda se obtiene por una aplicación de $R\neg Val$*. Este caso es simple pero un poco engorroso (el caso de LVal es similar). La derivación inicial tiene la siguiente forma:

$$\dfrac{\dfrac{\overbrace{\Gamma_1 \Rightarrow \phi_1, \Delta_1 \;\; .... \;\; \Gamma_n \Rightarrow \phi_n, \Delta_n \qquad \Pi_1 \Rightarrow \neg\psi_1, \Sigma_1 \;\; .... \;\; \Pi_m \Rightarrow \neg\psi_m, \Sigma_m}^{\text{exactamente uno de estos secuentes contiene una ocurrencia de } \phi \text{ en su lado derecho}}}{\Gamma_1, ..., \Gamma_n, \Pi_1, ..., \Pi_m \Rightarrow \neg Val(\Phi, \Psi), \phi, \Delta_1, ..., \Delta_n, \Sigma_1, ..., \Sigma_m}\,\mathrm{R}\neg Val \qquad \Pi, \phi \Rightarrow \Sigma}{\Gamma_1, ..., \Gamma_n, \Pi_1, ..., \Pi_m, \Pi \Rightarrow \neg Val(\Phi, \Psi), \Delta_1, ..., \Delta_n, \Sigma_1, ..., \Sigma_m, \Sigma}\,corte$$

Suponiendo (sin pérdida de generalidad) que ϕ ocurre en el secuente $\Gamma_i \Rightarrow \phi_i, \phi, \Delta_i$, este puede transformarse en

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma_i \Rightarrow \phi_i, \phi, \Delta_i \qquad \Pi, \phi \Rightarrow \Sigma}{\Gamma_i, \Pi \Rightarrow \phi_i, \Delta_i, \Sigma}\,corte \qquad \overbrace{\Gamma_1 \Rightarrow \phi_1, \Delta_1 \;\; .... \;\; \Gamma_n \Rightarrow \phi_n, \Delta_n \qquad \Pi_1 \Rightarrow \neg\psi_1, \Sigma_1 \;\; .... \;\; \Pi_m \Rightarrow \neg\psi_m, \Sigma_m}^{\text{aquí el secuente } \Gamma_i \Rightarrow \phi_i, \phi, \Delta_i \text{ está ausente}}}{\Gamma_1, ..., \Gamma_n, \Pi_1, ..., \Pi_m, \Pi \Rightarrow \neg Val(\Phi, \Psi), \Delta_1, ..., \Delta_n, \Sigma_1, ..., \Sigma_m, \Sigma}\,\mathrm{R}\neg Val$$

- *La premisa izquierda se obtiene por una aplicación de $L\neg Val$*. Este caso es diferente del resto en un sentido importante. Nuestra derivación inicial tiene la siguiente forma[1]:

$$\dfrac{\dfrac{Val(\Gamma_1, \Delta_1), \phi_1, ..., \phi_n, \neg\psi_1, ..., \neg\psi_m \Rightarrow \neg Val(\Gamma_2, \Delta_2)}{Val(\Gamma_1, \Delta_1), \neg Val(\Phi, \Psi) \Rightarrow \neg Val(\Gamma_2, \Delta_2)}\,\mathrm{L}\neg Val \qquad \Pi, \neg Val(\Gamma_2, \Delta_2) \Rightarrow \Sigma}{\Pi, Val(\Gamma_1, \Delta_1), \neg Val(\Phi, \Psi) \Rightarrow \Sigma}\,corte$$

[1]Para simplificar, en lugar de considerar la versión oficial de L$\neg Val$, consideraré la siguiente versión, que omite parte del contexto (la prueba puede adaptarse a la versión oficial):

$$\dfrac{Val(\Gamma, \Delta), \phi_1, ..., \phi_n, \neg\psi_1, ..., \neg\psi_m \Rightarrow \neg Val(\Pi, \Sigma)}{Val(\Gamma, \Delta), \neg Val(\Phi, \Psi) \Rightarrow \neg Val(\Pi, \Sigma)}\,\mathrm{L}\neg Val$$

El problema es que aquí no es inmediato cómo reducir la altura del corte. Está claro que no servirá simplemente invertir el orden de aplicación de las reglas, pues si primero aplicamos la regla de corte a
$Val(\Gamma_1, \Delta_1), \phi_1, ..., \phi_n, \neg\psi_1, ..., \neg\psi_m \Rightarrow \neg Val(\Gamma_2, \Delta_2)$
y a
$\Pi, \neg Val(\Gamma_2, \Delta_2) \Rightarrow \Sigma$,
el resultado será el secuente
$\Pi, Val(\Gamma_1, \Delta_1), \phi_1, ..., \phi_n, \neg\psi_1, ..., \neg\psi_m \Rightarrow \Sigma$.
Pero ya no es posible aplicar L$\neg Val$, porque el contexto podría no ser apropiado (i.e. Π podría no ser de la forma $Val(\Gamma, \Delta)$ y Σ podría no ser de la forma $\neg Val(\Gamma, \Delta)$). ¿Cómo resolver esto? La idea es ir más arriba en la prueba de $\Pi, \neg Val(\Gamma_2, \Delta_2) \Rightarrow \Sigma$. En algún punto el contexto fue el apropiado para introducir la fórmula $\neg Val(\Gamma_2, \Delta_2)$ por medio de la regla L$\neg Val$ (de lo contrario, la fórmula se obtuvo por LW a partir de $\Pi \Rightarrow \Sigma$, en cuyo caso ya tenemos lo que buscamos). Es en ese punto, cuando esta fórmula es principal, que debemos aplicar corte e inmediatamente después L$\neg Val$. Luego, el secuente $\Pi, Val(\Gamma_1, \Delta_1), \neg Val(\Phi, \Psi) \Rightarrow \Sigma$ puede obtenerse recapitulando los pasos de la prueba original.

El resto de los casos no presentan complicaciones, y por ende los omito. Antes de pasar al siguiente grupo de casos, explicaré por qué no necesitamos considerar la posibilidad de que la premisa izquierda se obtenga por una aplicación de RVal. Supongamos que esto se da. Luego, la premisa izquierda debe tener la siguiente forma
$Val(\Gamma_1, \Delta_1), ..., Val(\Gamma_k, \Delta_k) \Rightarrow Val(\Phi, \Psi)$.
Pero esto quiere decir que ϕ es $Val(\Phi, \Psi)$, lo cual contradice nuestra suposición inicial de que ϕ no es principal en ninguna premisa.

- *La fórmula cortada es principal sólo en la premisa izquierda.* Lo que hacemos en este caso es considerar las diferentes formas en que podemos obtener la premisa derecha. Al igual que antes, habrá tantos casos como reglas (excepto que ahora necesitamos considerar también la regla RVal), y la estrategia es la misma que en el caso anterior: "mover el corte hacia arriba" para reducir la altura de corte. Sólo ofreceré cuatro ejemplos: L$\neg^{At}$, L$\neg \to$, RVal y L$\neg Val$.

  - *La premisa derecha se obtiene por una aplicación de L$\neg^{At}$.* Luego, tenemos la siguiente derivación:

$$corte\ \dfrac{\Gamma \Rightarrow \phi, \Delta \qquad \text{L}\neg^{At}\ \dfrac{\Pi', \phi \Rightarrow \phi^{At}, \Sigma}{\Pi', \neg\phi^{At}, \phi \Rightarrow \Sigma}}{\Gamma, \Pi', \neg\phi^{At} \Rightarrow \Delta, \Sigma}$$

que puede transformarse en

$$\text{L}\neg^{At}\ \dfrac{corte\ \dfrac{\Gamma \Rightarrow \phi, \Delta \qquad \Pi', \phi \Rightarrow \phi^{At}, \Sigma}{\Gamma, \Pi' \Rightarrow \phi^{At}, \Delta, \Sigma}}{\Gamma, \Pi', \neg\phi^{At} \Rightarrow \Delta, \Sigma}$$

- *La premisa derecha se obtiene por una aplicación de $L\neg \rightarrow$*. La derivación tiene la forma:

$$corte\ \dfrac{\Gamma \Rightarrow \phi, \Delta \qquad \text{L}\neg \rightarrow \dfrac{\Pi', \psi, \neg\psi', \phi \Rightarrow \Sigma}{\Pi', \neg(\psi \rightarrow \psi'), \phi \Rightarrow \Sigma}}{\Gamma, \Pi', \neg(\psi \rightarrow \psi') \Rightarrow \Delta, \Sigma}$$

y puede transformarse en

$$\text{L}\neg^{\neg\rightarrow}\ \dfrac{corte\ \dfrac{\Gamma \Rightarrow \phi, \Delta \qquad \Pi', \psi, \neg\psi', \phi \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \Pi', \psi, \neg\psi' \Rightarrow \Delta, \Sigma}}{\Gamma, \Pi', \neg(\psi \rightarrow \psi') \Rightarrow \Delta, \Sigma}$$

- *La premisa derecha se obtiene por una aplicación de $RVal$*. La derivación inicial tiene la forma siguiente[2]:

$$corte\ \dfrac{Val(\Gamma, \Delta) \Rightarrow Val(\Pi, \Sigma) \qquad \text{R}Val\ \dfrac{Val(\Pi, \Sigma), \phi_1, ..., \phi_n \Rightarrow \psi_1, ..., \psi_m}{Val(\Pi, \Sigma) \Rightarrow Val(\Phi, \Psi)}}{Val(\Gamma, \Delta) \Rightarrow Val(\Phi, \Psi)}$$

Nótese que debido a las restricciones sobre RVal, ϕ debe ser de la forma $Val(\Pi, \Sigma)$. Por ende, podemos transformar la derivación previa en:

$$\text{R}Val\ \dfrac{corte\ \dfrac{Val(\Gamma, \Delta) \Rightarrow Val(\Pi, \Sigma) \qquad Val(\Pi, \Sigma), \phi_1, ..., \phi_n \Rightarrow \psi_1, ..., \psi_m}{Val(\Gamma, \Delta), \phi_1, ..., \phi_n \Rightarrow \psi_1, ..., \psi_m}}{Val(\Gamma, \Delta) \Rightarrow Val(\Phi, \Psi)}$$

[2] Para simplificar la prueba, consideraré la siguiente versión simplificada de RVal, aunque el argumento puede adaptarse a la versión oficial:

$$\text{R}Val\ \dfrac{Val(\Gamma, \Delta), \phi_1, ..., \phi_n \Rightarrow \psi_1, ..., \psi_m}{Val(\Gamma, \Delta) \Rightarrow Val(\Phi, \Psi)}$$

- *La premisa derecha se obtiene por una aplicación de L$\neg Val$.* Nuestra derivación inicial es:

$$\text{corte}\ \dfrac{Val(\Gamma, \Delta) \Rightarrow Val(\Pi_1, \Sigma_1) \qquad \text{L}\neg Val\ \dfrac{Val(\Pi_1, \Sigma_1), \phi_1, ..., \phi_n, \neg\psi_1, ..., \neg\psi_m \Rightarrow \neg Val(\Pi_2, \Sigma_2)}{Val(\Pi_1, \Sigma_1), \neg Val(\Phi, \Psi) \Rightarrow \neg Val(\Pi_2, \Sigma_2)}}{Val(\Gamma, \Delta), \neg Val(\Phi, \Psi) \Rightarrow \neg Val(\Pi_2, \Sigma_2)}$$

  Nótese que la fórmula cortada no puede ser $\neg Val(\Phi, \Psi)$, ya que sería principal en ambas premisas. Por ende, debe ser $Val(\Pi_1, \Sigma_1)$, lo cual significa que la premisa izquierda se obtiene a partir de la regla RVal. Y esto explica por qué el contexto es $Val(\Gamma, \Delta)$. Luego, la derivación anterior puede transformarse en:

$$\text{L}\neg Val\ \dfrac{Val(\Gamma, \Delta) \Rightarrow Val(\Pi_1, \Sigma_1) \qquad \text{corte}\ \dfrac{Val(\Pi_1, \Sigma_1), \phi_1, ..., \phi_n, \neg\psi_1, ..., \neg\psi_m \Rightarrow \neg Val(\Pi_2, \Sigma_2)}{Val(\Gamma, \Delta), \phi_1, ..., \phi_n, \neg\psi_1, ..., \neg\psi_m \Rightarrow Val(\Pi_2, \Sigma_2)}}{Val(\Gamma, \Delta), \neg Val(\Phi, \Psi) \Rightarrow \neg Val(\Pi_2, \Sigma_2)}$$

  Los casos restantes no presentan complicaciones.

- *La fórmula cortada es principal en ambas premisas.* Esto grupo de casos es diferente de los grupos anteriores, porque ahora en muchos casos lo que reduciremos no será la altura de corte sino la complejidad (lógica) o la complejidad-Tr de la fórmula cortada. No consideraré todas las posibilidades, pero sí discutiré las más interesantes.

  - *La premisa izquierda se obtiene por medio de RW y la premisa derecha por cualquier regla izquierda.* La derivación inicial es como sigue:

$$\text{corte}\ \dfrac{\text{R}W\ \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \phi, \Delta} \qquad \text{L}regla\ \dfrac{\Pi' \Rightarrow \Sigma'}{\Pi, \phi \Rightarrow \Sigma}}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}$$

    Esto puede transformarse en:

$$\text{L}W\text{R}W\ \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}$$

    El caso en que la premisa izquierda se obtiene por medio de alguna regla derecha y la premisa derecha por medio de LW es análogo.

  - *La premisa izquierda se obtiene por RTr y la premisa derecha por LTr.* Tenemos la siguiente derivación inicial:

$$\text{corte}\ \dfrac{\text{R}Tr\ \dfrac{\Gamma \Rightarrow \psi, \Delta}{\Gamma \Rightarrow Tr\langle\psi\rangle, \Delta} \qquad \text{L}Tr\ \dfrac{\Pi, \psi \Rightarrow \Sigma}{\Pi \Rightarrow Tr\langle\psi\rangle, \Sigma}}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}$$

    que puede transformarse en

$$corte\ \frac{\Gamma \Rightarrow \psi, \Delta \qquad \Pi, \psi \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}$$

Nótese que aquí lo que se reduce es la complejidad-Tr y no la complejidad (lógica) de la fórmula cortada. Algo similar ocurre en el caso en que la premisa izquierda se obtiene por R$\neg Tr$ y la premisa derecha se obtiene por L$\neg Tr$.

- *La premisa izquierda se obtiene por R$\neg Tr$ y la premisa izquierda se obtiene por L$\neg^{At}$*. Este caso hace uso de los lemas previos. La derivación inicial es:

$$corte\ \frac{\mathrm{R}\neg Tr\ \dfrac{\Gamma \Rightarrow \neg\psi, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \neg Tr\langle\psi\rangle, \Delta} \qquad \mathrm{L}\neg^{At}\ \dfrac{\Pi \Rightarrow Tr\langle\psi\rangle, \Sigma}{\Pi, \neg Tr\langle\psi\rangle \Rightarrow \Sigma}}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}$$

Para realizar la transformación, comenzamos con:

$$\Gamma \Rightarrow \neg Tr\langle\psi\rangle, \Delta.$$

Por el Lema B.0.2, obtenemos:

$$\Gamma, \neg\neg Tr\langle\psi\rangle \Rightarrow \Delta.$$

Puesto que L$\neg\neg$ es invertible (Lema B.0.1), hay una prueba de

$$\Gamma, Tr\langle\psi\rangle \Rightarrow \Delta.$$

Y luego obtenemos:

$$corte\ \frac{\Gamma, Tr\langle\psi\rangle \Rightarrow \Delta \qquad \Pi \Rightarrow Tr\langle\psi\rangle, \Sigma}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}$$

Observemos que aunque no hay ninguna garantía de que la altura de corte se reduce, la fórmula cortada tiene menor complejidad (lógica).

- *La premisa izquierda se obtiene por RVal y la premisa derecha por LVal*. Al igual que antes, consideraré la versión simplificada de RVal, pero la prueba puede adaptarse para la versión oficial. Sea Π la unión de los multiconjuntos $\Pi_1, ..., \Pi_n, \Pi'_1, ..., \Pi'_m$ y sea Σ la unión de los multiconjuntos $\Sigma_1, ..., \Sigma_n, \Sigma'_1, ..., \Sigma'_m$. La forma de la derivación inicial es la siguiente. Por un lado, tenemos:

$$\mathrm{R}Val\ \frac{Val(\Gamma, \Delta), \phi_1, ..., \phi_n \Rightarrow \psi_1, ..., \psi_m}{Val(\Gamma, \Delta) \Rightarrow Val(\Phi, \Psi)}$$

Por otro, tenemos:

$$\text{L}Val \, \frac{\Pi_1 \Rightarrow \phi_1, \Sigma_1 \; .... \; \Pi_n \Rightarrow \phi_n, \Sigma_n \quad \Pi_1', \psi_1 \Rightarrow \Sigma_1' \; .... \; \Pi_m', \psi_m \Rightarrow \Sigma_m'}{\Pi, Val(\Phi, \Psi) \Rightarrow \Sigma}$$

Al aplicar corte a los dos secuentes inferiores, obtenemos:

$$\Pi, Val(\Gamma, \Delta) \Rightarrow \Sigma$$

Ahora transformamos esto en una derivación en la que cada uno de los ϕ_is y cada uno de los ψ_is son eliminados uno por uno. Primero cortamos ϕ_1:

$$corte \, \frac{Val(\Gamma, \Delta), \phi_1, ..., \phi_n \Rightarrow \psi_1, ..., \psi_m \qquad \Pi_1 \Rightarrow \phi_1, \Sigma_1}{\Pi_1, Val(\Gamma, \Delta), \phi_2, ..., \phi_n \Rightarrow \psi_1, ..., \psi_m, \Sigma_1}$$

Luego cortamos ϕ_2:

$$corte \, \frac{\Pi_1, Val(\Gamma, \Delta), \phi_2, ..., \phi_n \Rightarrow \psi_1, ..., \psi_m, \Sigma_1 \qquad \Pi_2 \Rightarrow \phi_2, \Sigma_2}{\Pi_1, \Pi_2, Val(\Gamma, \Delta), \phi_3, ..., \phi_n \Rightarrow \psi_1, ..., \psi_m, \Sigma_1, \Sigma_2}$$

Después de n cortes, llegamos a

$$\Pi_1, ..., \Pi_n, Val(\Gamma, \Delta) \Rightarrow \psi_1, ..., \psi_m, \Sigma_1, ..., \Sigma_n$$

Luego hacemos lo mismo para $\psi_1, ..., \psi_m$. Después de m cortes, llegamos a

$$\Pi, Val(\Gamma, \Delta) \Rightarrow \Sigma$$

Una vez más, nótese que aunque la altura de corte crece, la complejidad de la fórmula cortada se reduce. Obsérvese, además, que el caso en que la premisa izquierda se obtiene por R$\neg Val$ y la premisa derecha por L$\neg Val$ es similar a este.

Los casos restantes de este grupo no presentan complicaciones.

∎

Apéndice C

Internalización

En este apéndice ofreceré una prueba del teorema 7.2.11, esto es, de la afirmación de que ${}^{NC}LK_3^{++}$ internaliza todas sus metarreglas. Usaré una expresión como $Val(\Gamma \cup \Pi, \Delta \cup \Sigma)$ para abreviar la afirmación de que el argumento con premisas $\gamma_1, ..., \gamma_n, \pi_1, ..., \pi_m$ y conclusiones $\delta_1, ..., \delta_k, \sigma_1, ..., \sigma_j$ es válido. Asimismo, a veces usaré $\Gamma \Rightarrow \Gamma$ para representar una colección de secuentes, en este caso $\gamma_1 \Rightarrow \gamma_1, ..., \gamma_n \Rightarrow \gamma_n$, para cada $\gamma \in \Gamma$.

Prueba En esta prueba es conveniente ir caso por caso, dado que lo que necesitamos mostrar es que cada una de las metarreglas de ${}^{NC}LK_3^{++}$ puede internalizarse. Por razones de espacio, sólo consideraré algunas de esas metarreglas.

- *LW y RW pueden internalizarse.* Sólo mostraré esto para LW, el caso de RW es similar.

$$\mathrm{R}Val\,\dfrac{\mathrm{L}W\,\dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Gamma \qquad \Delta \Rightarrow \Delta}{Val(\Gamma, \Delta), \Gamma \Rightarrow \Delta}}{Val(\Gamma, \Delta), \Gamma, \phi \Rightarrow \Delta}}{Val(\Gamma, \Delta) \Rightarrow Val(\Gamma \cup \phi, \Delta)}$$

  Dado que el cálculo es reflexivo (por la proposición 7.2.2), sabemos que existen pruebas de $\Gamma \Rightarrow \Gamma$ y de $\Delta \Rightarrow \Delta$. Consideraciones similares se aplican a los casos de abajo también.

- *corte puede internalizarse.* Esta metarregla es diferente de las otras debido a que corte puede eliminarse en ${}^{NC}LK_3^{++}$. Por ende, la internalización de corte puede llevarse a cabo sin utilizar la regla de corte.

$$\mathrm{R}Val\,\dfrac{\mathrm{L}Val\,\dfrac{\mathrm{L}Val\,\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Gamma \qquad \phi \Rightarrow \phi \qquad \Delta \Rightarrow \Delta}{\Gamma, Val(\Gamma, \phi \cup \Delta) \Rightarrow \phi, \Delta} \qquad \Pi \Rightarrow \Pi \qquad \Sigma \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \Pi, Val(\Gamma, \phi \cup \Delta), Val(\Pi \cup \phi, \Sigma) \Rightarrow \Delta, \Sigma}}{Val(\Gamma, \phi \cup \Delta), Val(\Pi \cup \phi, \Sigma) \Rightarrow Val(\Gamma \cup \Pi, \Delta \cup \Sigma)}$$

- *$L\neg^{At}$ puede internalizarse.*

$$\mathrm{R}Val\,\dfrac{\mathrm{L}\neg^{At}\,\dfrac{\mathrm{L}Val\,\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Gamma \qquad \Delta \Rightarrow \Delta \qquad \phi^{At} \Rightarrow \phi^{At}}{\Gamma, Val(\Gamma, \phi^{At} \cup \Delta) \Rightarrow \phi^{At}, \Delta}}{\Gamma, Val(\Gamma, \phi^{At} \cup \Delta), \neg\phi^{At} \Rightarrow \Delta}}{Val(\Gamma, \phi^{At} \cup \Delta) \Rightarrow Val(\Gamma \cup \neg\phi^{At}, \Delta)}$$

- *$L\neg\neg$ y $R\neg\neg$ pueden internalizarse.* Sólo me ocuparé del caso de $\mathrm{L}\neg\neg$, la derivación para $\mathrm{R}\neg\neg$ es similar.

$$\mathrm{R}Val\,\dfrac{\mathrm{L}\neg\neg\,\dfrac{\mathrm{L}Val\,\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Gamma \qquad \phi \Rightarrow \phi \qquad \Delta \Rightarrow \Delta}{\Gamma, Val(\Gamma \cup \phi, \Delta), \phi \Rightarrow \Delta}}{\Gamma, Val(\Gamma \cup \phi, \Delta), \neg\neg\phi \Rightarrow \Delta}}{Val(\Gamma \cup \phi, \Delta) \Rightarrow Val(\Gamma \cup \neg\neg\phi, \Delta)}$$

- *$L\vee$, $R\vee$, $L\neg\vee$ y $R\neg\vee$ pueden internalizarse.* Las internalizaciones de $\mathrm{R}\vee$ y $\mathrm{L}\neg\vee$ son sencillas. $\mathrm{L}\vee$ y $\mathrm{R}\neg\vee$ son similares entre sí, de modo que sólo me ocuparé de la segunda:

$$\mathrm{R}Val\,\dfrac{\mathrm{R}\neg\vee\,\dfrac{\mathrm{LW}\,\dfrac{\mathrm{L}Val\,\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Gamma \qquad \neg\phi \Rightarrow \neg\phi \qquad \Delta \Rightarrow \Delta}{\Gamma, Val(\Gamma, \neg\phi \cup \Delta) \Rightarrow \neg\phi, \Delta}}{\Gamma, Val(\Gamma, \neg\phi \cup \Delta), Val(\Gamma, \neg\psi \cup \Delta) \Rightarrow \neg\phi, \Delta} \qquad \mathrm{LW}\,\dfrac{\mathrm{L}Val\,\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Gamma \qquad \neg\psi \Rightarrow \neg\psi \qquad \Delta \Rightarrow \Delta}{\Gamma, Val(\Gamma, \neg\psi \cup \Delta) \Rightarrow \neg\psi, \Delta}}{\Gamma, Val(\Gamma, \neg\phi \cup \Delta), Val(\Gamma, \neg\psi \cup \Delta) \Rightarrow \neg\psi, \Delta}}{\Gamma, Val(\Gamma, \neg\phi \cup \Delta), Val(\Gamma, \neg\psi \cup \Delta) \Rightarrow \neg(\phi \vee \psi), \Delta}}{Val(\Gamma, \neg\phi \cup \Delta), Val(\Gamma, \neg\psi \cup \Delta) \Rightarrow Val(\Gamma, \neg(\phi \vee \psi) \cup \Delta)}$$

- $\mathrm{L}\rightarrow$, $\mathrm{R}\rightarrow$, $\mathrm{L}\neg\rightarrow$ y $\mathrm{R}\neg\rightarrow$ son internalizables. $\mathrm{L}\rightarrow$ y $\mathrm{R}\neg\Rightarrow$ son similares entre sí, y también lo son $\mathrm{L}\neg\rightarrow$ y $\mathrm{R}\rightarrow$. Aquí sólo presento las internalizaciones del primero y el tercero:

$$\mathrm{R}Val\,\dfrac{\mathrm{L}\rightarrow\,\dfrac{\mathrm{L}Val\,\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Gamma \qquad \phi \Rightarrow \phi \qquad \Delta \Rightarrow \Delta}{\Gamma, Val(\Gamma, \phi \cup \Delta) \Rightarrow \phi, \Delta} \qquad \dfrac{\Pi \Rightarrow \Pi \qquad \psi \Rightarrow \psi \qquad \Sigma \Rightarrow \Sigma}{\Pi, Val(\Pi \cup \psi, \Sigma), \psi \Rightarrow \Sigma}}{\Gamma, \Pi, Val(\Gamma, \phi \cup \Delta), Val(\Gamma \cup \psi, \Delta), \phi \rightarrow \psi \Rightarrow \Delta, \Sigma}}{Val(\Gamma, \phi \cup \Delta), Val(\Pi \cup \psi, \Sigma) \Rightarrow Val(\Gamma \cup \Pi \cup \phi \rightarrow \psi, \Delta \cup \Sigma)}$$

$$\text{R}Val\,\dfrac{\text{R}\neg\to\,\dfrac{\text{L}Val\,\dfrac{\Gamma\Rightarrow\Gamma \quad \phi\Rightarrow\phi \quad \neg\psi\Rightarrow\neg\psi \quad \Delta\Rightarrow\Delta}{\Gamma, Val(\Gamma\cup\phi\cup\neg\psi,\Delta),\phi,\neg\psi\Rightarrow\Delta}}{\Gamma, Val(\Gamma\cup\phi\cup\neg\psi,\Delta),\neg(\phi\to\psi)\Rightarrow\Delta}}{Val(\Gamma\cup\phi\cup\neg\psi,\Delta)\Rightarrow Val(\Gamma\cup\neg(\phi\to\psi),\Delta)}$$

- *La reglas para el predicado de verdad son internalizables.* Sólo me ocuparé del caso de (L$\neg Tr$), dado que todas estas reglas son similares.

$$\text{R}Val\,\dfrac{\text{L}\neg Tr\,\dfrac{\text{L}Val\,\dfrac{\Gamma\Rightarrow\Gamma \quad \neg\phi\Rightarrow\neg\phi \quad \Delta\Rightarrow\Delta}{\Gamma, Val(\Gamma\cup\neg\phi,\Delta),\neg\phi\Rightarrow\Delta}}{\Gamma, Val(\Gamma\cup\phi,\Delta),\neg Tr\langle\phi\rangle\Rightarrow\Delta}}{Val(\Gamma\cup\phi,\Delta)\Rightarrow Val(\Gamma\cup\neg Tr\langle\phi\rangle,\Delta)}$$

- *Las reglas para el operador de validez son internalizables.* Sólo ofreceré las internalizaciones de L$\neg Val$ y LVal (RVal es similar a la primera y R$\neg Val$ a la segunda, de modo que las omitiré). Comenzaré con L$\neg Val$. Para no complicar las cosas, internalizaré su versión simplificada, pero una prueba similar está disponible para la regla oficial:

$$\text{R}Val\,\dfrac{\text{L}\neg Val\,\dfrac{\text{L}Val\,\dfrac{Val(\Gamma,\Delta)\Rightarrow Val(\Gamma,\Delta) \quad \phi_1\Rightarrow\phi_1 \quad .... \quad \phi_n\Rightarrow\phi_n \quad \neg\psi_1\Rightarrow\neg\psi_1 \quad .... \quad \neg\psi_m\Rightarrow\neg\psi_m \quad \neg Val(\Pi,\Sigma)\Rightarrow\neg Val(\Pi,\Sigma)}{Val(Val(\Gamma,\Delta)\cup\Phi\cup\neg\Psi,\neg Val(\Pi,\Sigma)), Val(\Gamma,\Delta),\phi_1,...,\phi_n,\neg\psi_1,...,\neg\psi_m\Rightarrow\neg Val(\Pi,\Sigma)}}{Val(Val(\Gamma,\Delta)\cup\Phi\cup\neg\Psi,\neg Val(\Pi,\Sigma)), Val(\Gamma,\Delta),\neg Val(\Phi,\Psi)\Rightarrow\neg Val(\Pi,\Sigma)}}{Val(Val(\Gamma,\Delta)\cup\Phi\cup\neg\Psi,\neg Val(\Pi,\Sigma))\Rightarrow Val(Val(\Gamma,\Delta)\cup\neg Val(\Phi,\Psi),\neg Val(\Pi,\Sigma))}$$

La internalización de LVal es un tanto engorrosa. Primero, comenzamos con la siguiente mini-derivación:

$$\text{L}Val\,\dfrac{\Gamma_1\Rightarrow\Gamma_1 \quad \phi_1\Rightarrow\phi_1 \quad \Delta_1\Rightarrow\Delta_1}{\Gamma_1, Val(\Gamma_1,\phi_1\cup\Delta_1)\Rightarrow\phi_1,\Delta}$$

Podemos obtener de forma similar $\Gamma_2, Val(\Gamma_2,\phi_2\cup\Delta_2)\Rightarrow\phi_2,\Delta$; $\Gamma_3, Val(\Gamma_3,\phi_3\cup\Delta_3)\Rightarrow\phi_3,\Delta$, y así sucesivamente. De hecho, podemos hacer lo mismo para cada $i\leq n$, de modo que tenemos para cada $i\leq n$:

$$\text{L}Val\,\dfrac{\Gamma_i\Rightarrow\Gamma_i \quad \phi_i\Rightarrow\phi_i \quad \Delta_i\Rightarrow\Delta_i}{\Gamma_i, Val(\Gamma_i,\phi_i\cup\Delta_i)\Rightarrow\phi_i,\Delta}$$

Análogamente, para cada $j\leq m$, obtenemos

$$\text{L}Val\,\dfrac{\Pi_j\Rightarrow\Pi_j \quad \psi_j\Rightarrow\psi_j \quad \Sigma_j\Rightarrow\Sigma_j}{\Pi_j, Val(\Pi_j\cup\psi_j,\Sigma_j),\psi_j\Rightarrow\Sigma_j}$$

Luego, tenemos $n+m$ secuentes. Los primero n secuentes tienen la forma

$$\Gamma_i, Val(\Gamma_i, \phi_i \cup \Delta_i) \Rightarrow \phi_i, \Delta,$$

y los siguientes m secuentes son de la forma

$$\Pi_j, Val(\Pi_j \cup \psi_j, \Sigma_j), \psi_i \Rightarrow \Sigma_j.$$

Si aplicamos LVal a estos $n+m$ secuentes, obtenemos:

$$\Gamma, \Pi, Val(\Gamma_1, \phi_1 \cup \Delta_1), ..., Val(\Gamma_n, \phi_n \cup \Delta_n), ..., Val(\Pi_1 \cup \psi_1, \Sigma_1), ..., Val(\Pi_m \cup \psi_m, \Sigma_m), Val(\Phi, \Psi) \Rightarrow \Delta, \Sigma$$

(Donde $\Gamma = \Gamma_1, ..., \Gamma_n; \Delta = \Delta_1, ..., \Delta_n; \Pi = \Pi_1, ..., \Pi_m; \Sigma = \Sigma_1, ..., \Sigma_m; \Phi = \phi_1, ..., \phi_n$ y $\Psi = \psi_1, ..., \psi_m$). Y finalmente, una aplicación de RVal y terminamos:

$$Val(\Gamma_1, \phi_1 \cup \Delta_1), ..., Val(\Gamma_n, \phi_n \cup \Delta_n), ..., Val(\Pi_1 \cup \psi_1, \Sigma_1), ..., Val(\Pi_m \cup \psi_m, \Sigma_m) \Rightarrow Val(\Gamma \cup \Pi \cup Val(\Phi, \Psi), \Delta \cup \Sigma)$$

∎

Parte IV

Conclusiones

Capítulo 8

Consideraciones finales

8.1. Lo que queda por hacer

Hay un conjunto de cuestiones relevantes que, por una razón u otra, no he abordado en esta tesis. En particular, aunque la teoría que he proporcionado en el capítulo 7 tiene, en mi opinión, una serie de características muy atractivas, está lejos de ser la historia completa acerca de la verdad y la validez. Voy a terminar señalando lo que creo que queda por hacer.

En primer lugar, $^{NC}LK_3^{++}$ es una teoría puramente sintáctica. Sería deseable tener una formulación semántica para esta teoría, en particular, una que extienda la ofrecida en el capítulo 4 para la paralógica no determinista que analicé allí. Asimismo, sería bueno poder extender el tratamiento no determinista de la negación que proporcioné en el capítulo 4 a otras expresiones, como el condicional y el operador de validez.

En segundo lugar, la idea de que la regla de contracción falla para oraciones paradójicas en virtud de su ambigüedad está poco desarrollada. He afirmado que tales oraciones expresan más de una proposición, pero para entender completamente por qué esto se da necesitamos una teoría adecuada del significado y, al menos en este momento, no tenemos eso. En particular, tenemos que darle sentido a la idea de que el significado de una oración está sobredeterminado en algunos casos, como en λ, λ, pero no en otros, tales como $\lambda \wedge \lambda$.

En tercer lugar, aunque la ingenuidad del operador de validez y la posibilidad de internalizar las metarreglas sean características muy atractivas de las teoría que he defendido, una pregunta abierta interesante es la de si podemos tener un operador de validez que sea, además, "negativamente ingenuo", en el siguiente sentido:

$$Val(\Phi, \Psi) \Rightarrow \text{ si y sólo si } \Phi \not\Rightarrow \Psi^1.$$

No creo que esto se cumpla en la teoría que he defendido, pero sin duda es algo que puede ser exigido razonablemente si estamos buscando una teoría semántica y lógicamente autosuficiente.

En cuarto lugar, un enfoque que he discutido muy brevemente en el capítulo 6 es el enfoque basado en la lógica DM. Como señalé allí, hay extensiones de DM, tales como los cálculos *display*, donde la negación puede introducirse sin problemas. No he visto ningún desarrollo de este tipo que incluya una teoría de la verdad. Tal vez la razón sea que estos cálculos son bastante engorrosos para realizar derivaciones. En cualquier caso, creo que es un proyecto que vale la pena explorar.

Estas son algunas de las cuestiones que han quedado pendientes.

8.2. A modo de conclusión

Hemos visto que han habido varios intentos por explicar las paradojas de la verdad (y la validez) desde un enfoque no clásico. A grandes rasgos, podemos dividir estos intentos en aquellos que son operacionales y aquellos que son subestructurales. A lo largo de la tesis he tratado de presentar estos diversos intentos y de mostrar cuáles son sus virtudes y defectos.

Una característica atractiva de las teorías paracompletas y de las teorías paraconsistentes habituales es que ofrecen una explicación filosófica satisfactoria del comportamiento de las oraciones paradójicas usuales. Sin embargo, creo que ha quedado claro que dichas teorías tiene algunos problemas de difícil solución. En particular, la introducción de un condicional razonable es problemática, la formalización de cuantificaciones restringidas también lo es y, sobre todo, estas teorías tienen dificultades para lidiar adecuadamente con las paradojas producidas por la noción de validez.

Al menos en estos aspectos las teorías subestructurales son superiores a las operacionales. Con todo, por un lado hemos visto que el enfoque no transitivo es, en cierto aspecto, similar a la teoría LP, una teoría paraconsistente. De modo que muchas de las dificultades que afectan a esta teoría se trasladan al enfoque no transitivo. Además, sugerí que este enfoque no puede capturar apropiadamente su propia noción de validez.

El enfoque no contractivo, por su parte, tiene otros problemas. Desde mi punto de vista, un inconveniente que aqueja a este enfoque es el de dar una explicación filosófica satisfactoria de las oraciones paradójicas. En particular,

[1] O quizás en el siguiente sentido: $\Rightarrow \neg Val(\Phi, \Psi)$ si y sólo si $\Phi \not\Rightarrow \Psi$.

dicha explicación debería motivar la falla de las reglas de contracción para este tipo de oraciones.

Por esta razón, he defendido una teoría de la verdad y la validez específica que combina características del enfoque operacional y del enfoque subestructural. Esta teoría no es contractiva pero al mismo tiempo es paracompleta (y/o paraconsistente). Este es, según creo, uno de los aspectos más novedosos de la teoría. Se combinan ideas del enfoque operacional con ideas del enfoque subestructural. En este sentido, la teoría puede verse como un compromiso entre los dos enfoques.

Bibliografía

[1] A. Anderson y N. Belnap. *Entailment (Vol. I)*. Princeton University Press, Princeton, 1975.

[2] A. Avron. The semantics and proof theory of linear logic. *Theoretical Computer Science*, 57(2-3):161–184, 1988.

[3] A. Avron y B. Konikowska. Proof Systems for Logics Based on Non-Deterministic Multiple-Valued Structures. *Logic Journal of the IGPL*, 13:365–387, 2005.

[4] A. Avron y I. Lev. Non-Deterministic Multiple-Valued Structures. *Journal of Logic and Computation*, 15(3):241–261, 2005.

[5] A. Avron y A. Zamansky. Non-deterministic semantics for logical systems. En D. Gabbay and F. Guenthner, editores, *Handbook of Philosophical Logic, Vol.16*, páginas 227–304. Springer, 2011.

[6] M. Baaz, C.G. Fermueller, G. Salzer, y R. Zach. Labeled Calculi and Finite-Valued Logics. *Studia Logica*, 61:7–33, 1998.

[7] A. Bacon. A New Conditional for Naive Truth Theory. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 54(1):87–104, 2013.

[8] A. Bacon. Curry's Paradox and ω-Inconsistency. *Studia Logica*, 101(1):1–9, 2013.

[9] E. Barrio. Theories of truth without standard models and Yablo's sequences. *Studia Logica*, 93(3):375–391, 2010.

[10] E. Barrio, L. Rosenblatt, y D. Tajer. Capturing Naive Validity in the Strict-Tolerant Approach. *Manuscrito en preparación*.

[11] E. Barrio, L. Rosenblatt, y D. Tajer. The Logics of Strict-Tolerant Logic. *Journal of Philosophical Logic*, en prensa.

[12] D. Batens. Paraconsistent Extensional Propositional Logics. *Logique et Analyse*, 90-91:195–234, 1980.

[13] D. Batens. Dynamic dialectical logics. En R Routley G. Priest and J. Norman, editors, *Paraconsistent Logic: Essays on the Inconsistent*, páginas 187–217. Philosophia Verlag, 1989.

[14] D. Batens, K. De Clercq, y N. Kurtonina. Embedding and Interpolation for Some Paralogics. The Propositional Case. *Reports on Mathematical Logic*, 33:29–44, 1999.

[15] J.C. Beal, R. Brady, A. Hazen, G. Priest, y G. Restall. Relevant Restricted Quantification. *Journal of Philosophical Logic*, 35(6):587–598, 2006.

[16] J.C. Beall. Free of Detachment: Logic, Rationality and Gluts. *Nous*.

[17] J.C. Beall. *Spandrels of Truth*. Oxford University Press, Oxford, 2009.

[18] J.C. Beall. Multiple-Conclusion LP and Default Classicality. *The Review of Symbolic Logic*, 4(2):326–336, 2011.

[19] J.C. Beall. End of Inclosure. *Mind*, 123(491):829–849, 2014.

[20] J.C. Beall y J. Murzi. Two flavors of Curry's Paradox. *Journal of Philosophy*, CX(3):143–165, 2013.

[21] N. Belnap. Display Logic. *Journal of Philosophical Logic*, 11:375–417, 1982.

[22] R.T. Brady. The non-triviality of dialectical set theory. En R Routley G. Priest and J. Norman, editors, *Paraconsistent Logic: Essays on the Inconsistent*, páginas 437–470. Philosophia Verlag, 1989.

[23] C. Caret y D. Ripley. Review of *Spandrels of Truth*. *Mind*, 120(478):503–507, 2011.

[24] C. Caret yZ. Weber. A Note on Contraction-free Logic for Validity. *Topoi*, 31(1):63–74, 2015.

[25] P. Cobreros, P. Egré, D. Ripley, y R. van Rooij. Tolerant, Classical, Strict. *Journal of Philosophical Logic*, 41(2):347–385, 2012.

[26] P. Cobreros, P. Egré, D. Ripley, y R. van Rooij. Reaching Transparent Truth. *Mind*, 122(488):841–866, 2013.

[27] P. Cobreros, P. Egré, D. Ripley, y R. van Rooij. Vagueness, truth and permissive consequence. En T. Achourioti et. al., editor, *Unifying the Philosophy of Truth*, páginas 1–24. Springer, 2014.

[28] M. Colyvan, D. Hyde, G. Priest, D. Ripley, y Z. Weber. Tolerating gluts. *Mind*, 123(491):813–828, 2014.

[29] R. T. Cook. *The Yablo Paradox.* Oxford University Press, New York, 2014.

[30] N. Da Costa y E. Alves. A Semantical Analysis of the Calculi C $_n$. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 18:621–630, 1977.

[31] H. Curry. The inconsistency of certain formal logics. *Journal of Symbolic Logic*, 7:115–117, 1942.

[32] M. Dunn. A "Gentzen" System for Positive Relevant Implication. *Journal of Symbolic Logic*, 38:356–357, 1973.

[33] H. Field. Disarming a Paradox of Validity. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, en prensa.

[34] H. Field. Naive Truth and Restricted Quantification: Saving Truth a Whole Lot Better. *The Review of Symbolic Logic*, en prensa.

[35] H. Field. Variations on a theme by yablo. En J.C. Beall and B. Armour-Garb, editores, *Deflationism and Paradox.* Oxford University Press, 2005.

[36] H. Field. Solving the paradoxes, escaping revenge. In J.C. Beall, editor, *Revenge of the Liar: New Essays on the Paradox.* Oxford University Press, 2007.

[37] H. Field. *Saving Truth from Paradox.* Oxford University Press, New York, 2008.

[38] M. Fischer y J. Stern. Paradoxes of Interaction? *Journal of Philosophical Logic*, en prensa.

[39] F. Fitch. Universal Metalanguages for Philosophy. *The Review of Metaphysics*, 17(3):396–402, 1964.

[40] A. Fjellstad. How a Semantics for Tonk Should Be. *The Review of Symbolic Logic*, en prensa.

[41] G. Gentzen. Untersuchungen über das logische Schließen. *Mathematische Zeitschrift (traducción al inglés en Gentzen 1969)*, 39(2):176–210, 405–431, 1935.

[42] G. Gentzen. *The Collected Papers of Gerhard Gentzen (editado por M. E. Szabo)*. Horth-Holland, Amsterdam, 1969.

[43] A. Gupta y N. Belnap. *The Revision Theory of Truth*. MIT Press, Cambridge, Mass, 1993.

[44] P. Hajek, J. Paris, y J. Shepherdson. The Liar Paradox and Fuzzy Logic. *The Journal of Symbolic Logic*, 65(1):339–346, 2000.

[45] V. Halbach. How Not to State T-sentences. *Analysis*, 66:276–280, 2006.

[46] V. Halbach. *Axiomatic Theories of Truth*. Cambridge University Press, Cambridge, 2011.

[47] V. Halbach y L. Horsten. Axiomatizing Kripke's Theory of Truth. *The Journal of Symbolic Logic*, 71(2):677–720, 2006.

[48] G. Harman. *Change in View: Principles of Reasoning*. MIT Press, Cambridge, Mass, 1986.

[49] H. Herzberger. Notes on Naive Semantics. *Journal of Philosophical Logic*, 11(1):243–268, 1982.

[50] L. Horsten. *The Tarskian Turn: Deflationism and Axiomatic Truth*. MIT Press, Cambridge, Mass, 2011.

[51] P. Horwich. *Truth*. Basil Blackwell, Oxford, 1990.

[52] J. Ketland. Validity as a Primitive. *Analysis*, 72(3):421–430, 2012.

[53] M. Kremer. Kripke and the Logic of Truth. *Journal of Philosophical Logic*, 17(3):225–278, 1988.

[54] S. Kripke. Outline of a theory of truth. *Journal of Philosophy*, 72(19):690–716, 1975.

[55] S. Kripke. Logical Consequence and the Paradoxes. *Journal of Philosophical Logic*, 43(2-3):439–469, 2014.

[56] H. Leitgeb. What Theories of Truth Should be Like (but Cannot be). *Philosophy Compass*, 2(2):276–290, 2007.

[57] E. Mares. *Relevant Logic: a Philosophical Interpretation.* Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

[58] R. Martin y P. Woodruff. On Representing 'True-in-L' in L. *Philosophia*, 5(3):213–217, 1975.

[59] T. Meadows. Fixed-points for Consequence Relations. *Logique et Analyse*, 57(227):333–357, 2014.

[60] S. Negri y J. von Plato. *Structural Proof Theory.* Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[61] F. Pailos y L. Rosenblatt. Solving Multimodal Paradoxes. *Theoria*, en prensa.

[62] F. Pailos y L. Rosenblatt. Paracompletitud sofisticada. En E. Barrio, editor, *La Lógica de la Verdad*, páginas 187–248. Eudeba, 2014.

[63] F. Pailos y L. Rosenblatt. Non-deterministic Conditionals and Transparent Truth. *Studia Logica*, 103(3):579–598, 2015.

[64] F. Paoli. *Substructural Logics: a Primer.* Kluwer, Dordrecht, 2002.

[65] L. Picollo. Yablo's Paradox in Second-Order Languages: Consistency and Unsatisfiability. *Studia Logica*, 101:601–617, 2013.

[66] L. Picollo y T. Schindler. Disquotation and Infinite Conjunctions. *Manuscrito.*

[67] G. Priest. Intentional Paradoxes. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 32:193–211, 1991.

[68] G. Priest. The Structure of the Paradoxes of Self-Reference. *Mind*, 103(409):25–34, 1994.

[69] G. Priest. The Yablo Paradox. *Analysis*, 57(4):236–242, 1997.

[70] G. Priest. *Beyond the Limits of Thoughtr.* Oxford University Press, Oxford, 2002.

[71] G. Priest. *Doubt Truth to be a Liar.* Oxford University Press, Oxford, 2005.

[72] G. Priest. *In Contradiction.* Oxford University Press, Oxford, 2006 (2da edición).

[73] G. Priest. *An Introduction to non-classical Logics.* Cambridge University Press, Cambridge, 2008 (2da edición).

[74] G. Priest. Fusion and Confusion. *Topoi*, 34:55–61, 2015.

[75] G. Priest y R. Sylvan. Simplified Semantics for Basic Relevant Logics. *Journal of Philosophical Logic*, 15:219–251, 1992.

[76] G. Priest y H. Wansing. External Curries. *Journal of Philosophical Logic*, en prensa.

[77] W. Quine. *Philosophy of Logic.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1970.

[78] F. Ramsey. The Foundations of Mathematics. *Proceedings of the London Mathematical Society, Series 2*, 25(5):338–384, 1925.

[79] G. Restall. Arithmetic and Truth in Łukasiewicz Logic. *Logique et Analyse*, 140:303–312, 1992.

[80] G. Restall. How to be Really Contraction Free. *Studia Logica*, 52(3):381–391, 1993.

[81] G. Restall. *On Logics without Contraction.* Tesis de Doctorado, University of Queensland, 1993.

[82] G. Restall. *An Introduction to Substructural Logics.* Routledges, London, 2000.

[83] G. Restall. Multiple conclusions. En L. Valdes-Villanueva P. Hajek and D. Westerstahl, editors, *Logic, Methodology and Philosophy of Science: Proceedings of the Twelfth International Congress*, páginas 189–205. King's College Publications, 2005.

[84] G. Restall. Assertion, denial and non-classical theories. En E. Mares K. Tanaka, F. Berto and F. Paoli, editors, *Paraconsistency: Logic and Applications*, páginas 81–99. Springer, 2013.

[85] D. Ripley. Comparing Substructural Theories of Truth. *Ergo*, en prensa.

[86] D. Ripley. Naive Set Theory and Nontransitive Logic. *The Review of Symbolic Logic*, en prensa.

[87] D. Ripley. Conservatively Extending Classical Logic with Transparent Truth. *Review of Symbolic Logic*, 5(2):354–378, 2012.

[88] D. Ripley. Paradoxes and Failures of Cut. *Australasian Journal of Philosophy*, 91(1):139–164, 2013.

[89] D. Ripley. Review of *Replacing Truth* by Kevin Sharp. *Notre Dame Philosophical Reviews*, 2014.

[90] L. Rosenblatt. Two-valued Logics for Transparent Truth Theory. *Australasian Journal of Logic*, 1(12):44–66, 2015.

[91] L. Rosenblatt y D. Szmuc. On Pathological Truths. *The Review of Symbolic Logic*, 7(4):601–617, 2014.

[92] M. Rossberg. Too Good to be Just True. *Thought*, 2:1–8, 2013.

[93] G. Rousseau. Sequents in Many-valued Logic. *Fundamenta Mathematica*, 60:23–131, 1967.

[94] R. M. Sainsbury. *Paradoxes*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[95] L. Shapiro. Deflating Logical Consequence. *Philosophical Quarterly*, 61:320–342, 2011.

[96] L. Shapiro. Naive Structure, Contraction and Paradox. *Topoi*, 34(1):75–97, 2015.

[97] Y. Shramko y H. Wansing. *Truth and Falsehood: An Inquiry into Generalized Logical Values*. Springer, Heidelberg, 2011.

[98] P. Smith. *An Introduction to Gödel's Theorems*. Cambridge University Press, Cambridge, 2007.

[99] R. Sorensen. *A Brief History of the Paradox*. Oxford University Press, New York, 2003.

[100] F. Steinberger. Why Conclusions Should Remain Single. *Journal of Philosophical Logic*, 40(3):333–355, 2011.

[101] R. Suszko. The Fregean Axiom and Polish Mathematical Logic in the 1920's. *Studia Logica*, 36:373–380, 1977.

[102] A. Tarski. The Concept of Truth in Formalized Languages. *Prace Towarzystwa Naukowego Warszawskiego, Wydzial III Nauk Matematyczno-Fizycznych (traducción al inglés expandida en Tarski 1983)*, 34:13–172, 1933.

[103] A. Tarski. On the Concept of Logical Consequence. *En Tarski 1956*, páginas 409–420, 1936.

[104] A. Tarski. *Logic, Semantics Metamathematics*. Oxford University Press, Oxford, 1956.

[105] N. Tennant. A New Unified Account of Truth and Paradox. *Mind*, en prensa.

[106] A. S. Troelstra y H. Schwichtenberg. *Basic Proof Theory*. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

[107] Z. Weber. Naive Validity. *Philosophical Quarterly*, 64(254):99–114, 2014.

[108] A. Weir. A Robust Non-Transitive Logic. *Topoi*, 34(1):1–9, 2013.

[109] S. Yablo. Paradox Without Self-Reference. *Analysis*, 53(4):251–252, 1993.

[110] S. Yablo. New grounds for naive truth. En J.C. Beall, editor, *Liars and Heaps*. Oxford University Press, 2003.

[111] E. Zardini. Truth Without Contra(di)ction. *The Review of Symbolic Logic*, 4(4):498–535, 2011.

[112] E. Zardini. Naive Truth and Naive Logical Properties. *The Review of Symbolic Logic*, 7(2):351–384, 2014.