ALGORITMOS DE SUMA Y RESTA:

*¿por qué favorecer desde la escuela los procedimientos infantiles?**

SUSANA WOLMAN**

** Lic. Ciencias de la Educación, UBA. Lic. Psicología, UBA. Posgrado: Especialista en Didáctica, UBA. Docente en la Cátedra de Psicología y Epistemología Genética.

En este trabajo presentaremos algunos resultados que pertenecen a una investigación didáctica en curso y reflexiones que dicho trabajo suscita. La investigación a la que hacemos referencia se lleva a cabo en primer año de la EGB y busca poner a prueba una serie de intervenciones docentes con el objetivo de hacer avanzar los procedimientos que los alumnos ponen en acción para resolver situaciones problemáticas de suma y resta con números mayores de diez en los dos sumandos. Lo que presentaremos aquí son algunos de dichos procedimientos y señalaremos cuál es la importancia de promoverlos desde el trabajo didáctico.

Son ampliamente conocidas las dificultades que enfrentan los niños de los primeros grados con respecto al aprendizaje de los algoritmos convencionales, sobre todo cuando se trata de los llamados en el ámbito escolar "con dificultad"; es decir, nos referimos a las cuentas que implican los famosos "me llevo uno" y "le pido prestado al compañero". La abundante bibliografía que existe sobre el tema así como la experiencia de las docentes que se desempeñan en estos grados dan cuenta de lo que estamos afirmando. Los chicos -resuelvan correcta o incorrectamente los algoritmos- no comprenden lo que hacen ni por qué lo hacen; las razones por las cuales deben seguir determinados pasos son un misterio para la mayoría de ellos. Esto se debe -entre otras cosas- a que los alumnos no comprenden la relación que existe entre los pasos del algoritmo convencional y el sistema de numeración en que están basados. En los errores que encontramos en los algoritmos resueltos por los alumnos o en las explicaciones sobre cómo los resuelven, que nos brindan cuando así se lo solicitamos, se comprueba justamente que es dicha relación la que queda ausente.

Para ilustrar lo que estamos diciendo veamos algunos ejemplos, ya no de los errores en la obtención del resultado,

* La presente investigación constituye la Tesis de Maestría de la autora y es dirigida por la Lic. Delia Lerner.

sino en las explicaciones o justificaciones del método que emplean.

Javier al comienzo de su segundo grado realiza correctamente el algoritmo convencional.

Entrevistador	Javier (Escribe y resuelve)
	$\begin{array}{r} 1 \\ 36 \\ \underline{15} \\ 51 \end{array}$
A ver, contame cómo la hiciste, así la revisamos juntos.	Mirá, fui sumando y (señalando las unidades) si tuviera cinco más cinco sería diez, como tengo seis más cinco, es **uno más**, entonces es once. Entonces pongo un uno acá abajo y me llevo un uno acá (El que colocó arriba del 3 del 36)
Aclarame un poquito más, ¿qué es este uno que te llevás?	(Silencio) ¡El que sobra del seis! ¿No te dije que cinco más cinco es diez pero yo me di cuenta sin contar que es uno más?

Javier obtiene el resultado correcto de la cuenta, pero explica que el uno que "se lleva" es el uno que él reconoce como el que le sobra de considerar seis como cinco más uno a efectos de facilitarse la suma. Si el origen del uno que se lleva fuera el que le sobra del seis, no sería una decena, sino justamente una unidad. Muchos chicos como Javier aplican las reglas propias del algoritmo convencional, pero sus respuestas nos muestran la falta de comprensión de las mismas.

Otro ejemplo es lo que dice Rubén, quien es considerado por su maestra como un muy buen alumno. Hacia fines de su primer grado y en el momento en que tenía como tarea ordenar y resolver el siguiente cálculo: 72 + 12 + 5 se suscita este diálogo:

Entrevistador	Rubén
¿Me podés contar cómo hacés esa cuenta?	
	Hay muchas formas de hacerla.
A ver, ¿cómo es eso?	
	Mirá vos tenés así, vos podés contar setenta y dos más doce y después más cinco y si contás y contás ya está; o como lo voy a hacer acá que es diferente.
¿Cómo lo vas a hacer acá?	
	(Escribe los números en el siguiente orden) 7 2 1 2 5 Lo divido con una raya (la dibuja verticalmente entre el 7 y el 2 hasta abajo) y sumás dos más dos más cinco y del otro lado siete más uno. Son dos cuentas que tenés que hacer.
Decime, ¿si la hacés como me dijiste al principio (señalo la escritura del cálculo) y si la hacés como me estás explicando ahora, darán el mismo resultado?	
	(Silencio) No sé, habría que hacerlas, no sé... porque acá tenés números chicos: dos, dos, cinco, siete y uno y acá tenés setenta y dos, doce y cinco... No sé...

Rubén no encuentra relación entre una estrategia que consiste en contar de a uno ("contás y contás") y el procedimiento convencional basado en la agrupación, más aún duda de que puedan dar el mismo resultado; al separar las cifras de un número en unidades y decenas con una línea, Rubén las trata como si fueran todas unidades, perdiendo de vista su valor relativo.

Para finalizar la sección de errores, consideremos algo que no es realmente un error. Tomemos la resta "pidiendo al compañero". Podríamos decir que es necesario aplicarla, por ejemplo, cuando las unidades del sustraendo son mayores que las del minuendo. Pero esta regla en el caso de restar 12-5 resulta muy poco adecuada y sin embargo, con bastante frecuencia vemos este tipo de "marcas" en los cuadernos de los alumnos. Saber dónde y cuándo "pedir prestado" es un conocimiento que no se deriva directamente de la aplicación de este mecanismo.

El análisis de los "errores" tan extraños en algunas cuentas que producen los niños o sus "asombrosas explicaciones" acerca de los motivos de los pasos a seguir para realizarlas, expresan un hecho inquietante: las grandes dificultades que tienen los alumnos para comprender estas reglas.[2]

Por otro lado, también nos hacen pensar que la manera en que se enseñan no es inocua. Es decir, consideramos necesario destacar que estas dificultades y errores son efectos de un enfoque didáctico, son el producto de un tipo de enseñanza. Un modelo de enseñanza -que siguiendo la conceptualización de R. Charnay se correspondería con el normativo- en el cual el maestro es el encargado de mostrar las nociones, introducirlas, proveer ejemplos de lo que está enseñando y en el que el alumno debe escuchar, estar muy atento para poder luego repetir y entrenarse en los procedimientos que el maestro ya ha señalado como válidos para resolver problemas.

Cabe aclarar que cuestionar una concepción de enseñanza en la escuela primaria, no significa que esa concepción sea un "error" de algunos, en todo caso es una construcción colectiva bastante difundida. Los estudios epistemológicos, psicológicos y de didáctica de las matemáticas son los que actualmente nos permiten este cuestionamiento y al mismo tiempo pensar una alternativa diferente.

Esto nos llevó a diseñar y poner a prueba una secuencia didáctica que toma en cuenta y hace intervenir las concepciones prexistentes de los alumnos. Situaciones didácticas que van a hacer que los conocimientos previos de los alumnos se pongan en juego. La situación problemática dentro de este modelo deja de ser el lugar de la "aplicación" de lo que fue previamente enseñado para convertirse en el punto de partida.

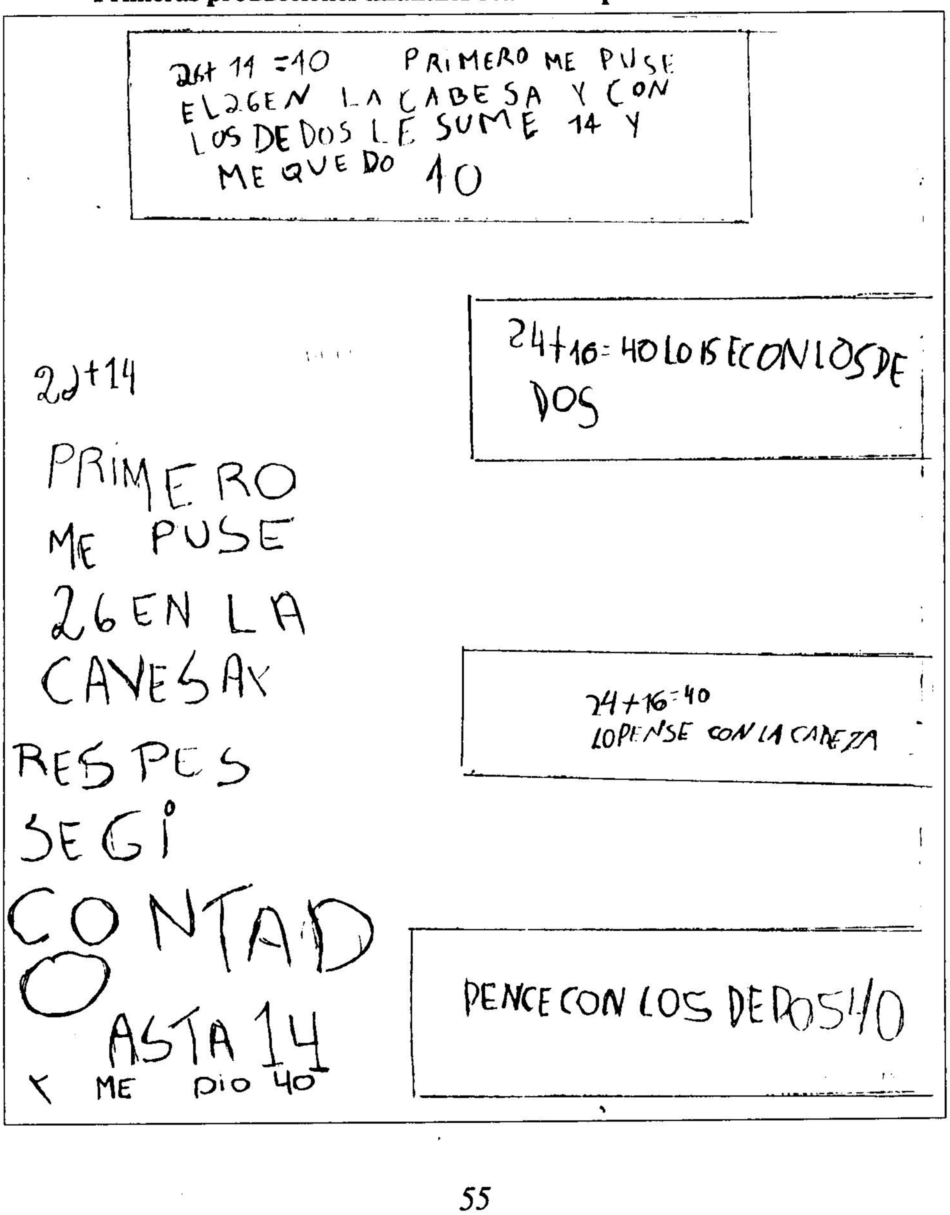
Sabemos que los chicos despliegan procedimientos propios para resolver las operaciones cuando se trata de situaciones problemáticas significativas. Nos referimos específicamente a que frente a situaciones problemáticas en las que hay que resolver operaciones para obtener la respuesta (en nuestro caso operaciones de suma y resta) los alumnos generan procedimientos propios de resolución.

¿Pero cómo iniciar el trabajo didáctico con respecto a este punto? ¿Cuáles y cómo son los procedimientos que los chicos utilizan? ¿Cómo se concretiza en situación de clase? Si bien no podemos aquí extendernos en todo el desarrollo del trabajo didáctico que se realiza, mostraremos sólo el comienzo y el final de lo que ocurre en primer grado.

En este sentido veamos que sucede cuando les planteamos un problema de tipo aditivo, en el cual los alumnos deben averiguar el estado final[3]. Este tipo de problemas es parecido a otros que ya saben resolver a través del conteo o del sobreconteo. Es decir, la situación problema no es nueva para los niños, sí lo es en cuanto al dominio numérico que involucra: esta vez los números de los sumandos son mayores de diez. El primer problema que les planteamos se resuelve con la suma de 24 + 16. Se les plantea la situación y se les pide que "anoten" en sus hojas cómo lo resuelven; luego de un tiempo en que todos los alumnos trabajan solos la maestra realiza una puesta en común.

Creíamos que estos números podían ocasionarles alguna modificación en sus procedimientos de resolución. Sin embargo, a través de la puesta a prueba varias veces en diferentes grupos, comprobamos que la mayoría de los alumnos utilizan un procedimiento que consiste en utilizar el conteo o el sobreconteo. Los números, si bien son mayores de los que hasta ese momento utilizaban, no convierten el recurso al conteo como imposible. Estas son algunas de sus producciones.

Primeras producciones infantiles realizadas para resolver: 24 + 16



Algunos pocos chicos encuentran otros procedimientos, pero no saben cómo anotarlos. La intervención de la docente en este momento es crucial. Ella "traduce" al lenguaje matemático lo que los chicos dicen al explicar cómo obtuvieron el resultado. Veamos un ejemplo:

Durante la puesta en común Gabriel pasa al frente y con su hoja en la mano explica cómo lo hizo (en su hoja sólo tenía escrito el cálculo con el resultado correspondiente: 24 + 16 = 40)

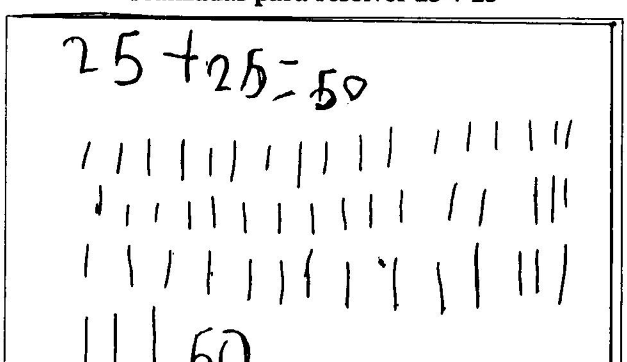
"Le sumé primero 10 y es 34 y 6 más y me da... (lo hace con sus dedos) 40"

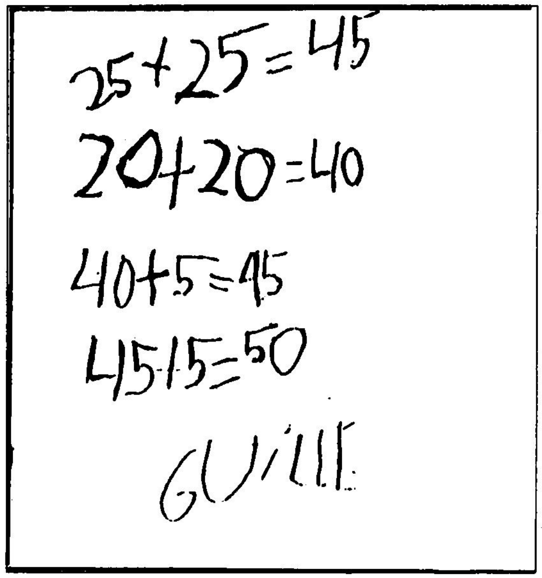
La maestra le pregunta por qué no lo escribió así en su hoja, frente a lo cual Gabriel se encoge de hombros. Le pide que vuelva a contárselo, que ella va a ir escribiéndolo para que todos lo vean y puedan entenderlo. A medida que Gabriel va explicando, la maestra escribe en el pizarrón y se suscita el siguiente diálogo:

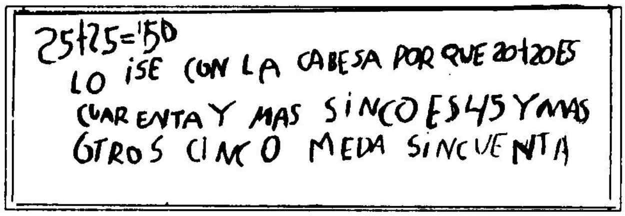
Maestra	Gabriel
¿Por qué le sumaste diez?	
	Porque yo ya sabía cuánto daba... es 34
De acuerdo, ¿pero de dónde sacaste el diez?	
	De dieciséis que es diez más seis
Pero en el dieciséis se escribe un uno, no un diez...	
	Es que el cero es como que está escondido, el seis está en ese lugar por eso sé que es diez más seis. (Gabriel continúa explicando que luego a 34 le agregó 6 más lo que le dio 40)

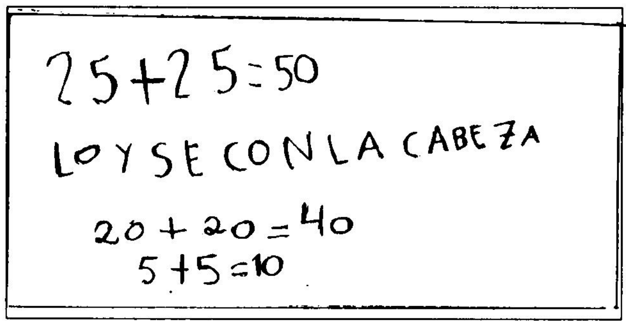
Dado que el conteo fue uno de los procedimientos más elegido se decide aumentar el tamaño de los números para tratar de que busquen otras estrategias. Efectivamente, frente a otro problema que se resuelve sumando 25 + 25, comienzan a aparecer en una mayor cantidad de niños, otros procedimientos además del conteo y el sobreconteo. En algunos casos, la maestra ayuda a "anotarlos" y en otros son los propios chicos quienes encuentran alguna manera de hacerlo. Veamos algunos ejemplos:

Producciones infantiles
realizadas para resolver 25 + 25









Como podemos observar estos procedimientos no son iguales, pero ¿cuál es la diferencia entre ellos? La diferencia es la que se encuentra entre el procedimiento de conteo, que como hemos visto requiere el uso de objetos, y los procedimientos de cálculo para solucionar un problema aditivo. Para "calcular" no es necesario contar objetos, sino establecer relaciones entre las cantidades en juego a partir de sus representaciones numéricas.

Aclaremos esta diferencia: en una de las obras del equipo Ermel (1991) podemos encontrar la distinción entre procedimientos de conteo y de cálculo. Señalan allí que los procedimientos del tipo "conteo" -que incluye el sobreconteo y el conteo hacia atrás a partir de un número dado- se apoyan sobre una manipulación de objetos, dibujos de los objetos o incluso sobre una lista escrita de los números. Para los procedimientos del tipo "cálculo" el alumno reconoce que puede apelar a saberes numéricos y utiliza ya sea resultados memorizados o conocimientos sobre los números y las transformaciones que se les puede hacer experimentar, entre ellas las descomposiciones decimales. Son dos procedimientos bien diferentes. Destaquemos que en los procedimientos de "cálculo" se puede observar que los chicos se apoyan en sus conocimientos del sistema de numeración.

El desarrollo de estas primeras clases podría provocar el desaliento de aquellos que esperan, al cabo de las mismas, resultados de aprendizaje "repetibles" y "medibles". Podrían tal vez sostener que haber "mostrado" los pasos que constituyen el algoritmo usual, a través de organizar una clase en que el maestro aporte todas las informaciones para resolver una adición sería menos costosa en tiempo y más eficaz en sus resultados. Aparentemente podríamos reconocer y coincidir con la primera consecuencia de una clase donde el maestro "enseñara" todo; evidentemente sería menos costosa en tiempo a diferencia del proceso que aquí desarrollamos que es pensado a largo plazo. Lo que no podemos es coincidir con la concepción de enseñanza que nos permitiría evitar un largo proceso. No es nuestra postura ya que por la hipótesis constructivista que constituye nuestro marco teórico sabemos de la imposibilidad de aprender a través de la transmisión directa de un saber. Por otro lado, dado el análisis acerca de las dificultades en la comprensión de los algoritmos convencionales por parte de los alumnos que ya hemos mencionado, tampoco podemos coincidir con la eficacia a lograr sugerida como segunda consecuencia.

Los procedimientos de los alumnos evolucionan a lo largo del este trabajo que incluye, además de la resolución de problemas elaborando métodos propios, la discusión y reflexión sobre semejanzas y diferencias de los procedimientos, la justificación de los números elegidos para la descomposición desde que esta hace su aparición y otras intervenciones específicas. Veamos aquí algunos de ellos -realizados al finalizar el año- tanto para resolver sumas como restas:

Procedimientos de suma y resta

54 + 36 = 90
50 + 10 + 10 + 10 + 6 + 4 = 90

50 + 30 = 80
80 + 6 = 86
86 + 4 = 90

54 + 30 = 84
84 + 6 = 90

44 - 26 = 18
44 - 20 = 24
24 - 6 = 18

44 - 26 = 18
44 - 10 = 34
34 - 10 = 24
24 - 6 = 18

Si bien los diversos procedimientos que utilizan los niños no son igualmente económicos, todos los procedimientos empleados les permiten conservar el valor de los términos de la operación; es decir, los números involucrados mantienen siempre la "idea" de su numerosidad a diferencia de lo que ocurre con el algoritmo convencional. Cuando se enseña el algoritmo convencional de "sumar en columnas" y se propone ejercitación en esta técnica, los alumnos no necesitan poner en acción, en todo momento, los conocimientos sobre el sistema de numeración. Si se tiene que calcular la suma de las unidades y las decenas, esto puede llevarse a cabo sin pensar lo que estas cifras representan. Más aún, para algunos chicos -aquí se incluye el caso mencionado de Rubén- "es este procedimiento el que los ha llevado a pensar que, cuando uno hace una cuenta, cada número de dos cifras deja de ser un número y se transforma en dos números independientes". (Lerner, D., 1992)

Al mismo tiempo, la explicitación de sus procedimientos y la justificación de los números que utilizan les permite avanzar en la conceptualización del sistema de numeración, enriqueciendo sus concepciones numéricas: "En el veinte hay dos dieces"; "Desarmó los dieces del veintiséis, son dos dieces y un seis" "El cincuenta sale del cincuenta y cuatro porque hay cinco dieces"; "Puse un treinta en vez de poner tres de diez para hacerla más corta". Además, el hecho de que en los procedimientos que implican la descomposición decimal, los alumnos comienzan a resolver por las mayores potencias de la base les permite lograr cierta estimación del resultado. Estas son algunas de las razones por la cual creemos que desde la escuela se deben favorecer los procedimientos de resolución de los niños.

Por otro lado, cuando la enseñanza propicia brindar oportunidades para encontrar la solución por otros caminos está facilitando que los alumnos pongan en juego procedimientos que se relacionan con sus concepciones ligadas a la numeración decimal como así también a las propiedades de las operaciones, aunque estas funcionen frecuentemente en forma implícita. Las propiedades de las operaciones serán utilizadas en la medida en que éstas faciliten sus cálculos, pudiendo relacionar el estudio del sistema de numeración con el estudio de las operaciones y sus propiedades. Y esta es, obviamente otra de las razones por la que creemos que la escuela debe favorecerlos.

La discusión y la reflexión sobre estas diferentes maneras de resolver las operaciones pero que conducen al mismo resultado permiten a los alumnos reflexionar acerca de sus propiedades. Cuando los alumnos de primer grado llegan -por ejemplo- a enunciar las conclusiones que podemos leer a continuación, pensamos que están construyendo conocimiento matemático.

- Para hacer sumas podés ordenar los números como quieras, da lo mismo porque son los mismos números que los ponés en otro orden.
- En la resta no pasa porque le sacás. Sólo pasa con la suma que se puede cambiar el orden de los números.
- Todas las cuentas se pueden hacer de muchas maneras y algunas son más fáciles que otras.

Escribir las sumas y las restas que efectivamente pensaron e interpretar las que sus compañeros utilizaron frente a las mismas situaciones, permite a los alumnos aprender mucho más sobre las operaciones y sus propiedades.

Naturalmente, si no hubieran trabajado como lo hicieron, hubiera sido imposible que elaboraran dichas conclusiones. Las producciones individuales y grupales que construyen son el resultado de un intercambio permanente con los problemas y con las intervenciones específicas con las que son confrontados. Es decir, los diferentes procedimientos utilizados por los alumnos, así como estas reflexiones sobre las operaciones, no son un producto "espontáneo" sino que son el efecto de ciertas condiciones didácticas.

Finalmente, otra de las razones por la que insistimos en alentar los procedimientos de los niños desde el inicio de la escolaridad va más allá del aprendizaje inicial de la suma y la resta.

Ya hemos señalado que la enseñanza temprana de los pasos del algoritmo convencional provoca que se aprendan como si fuera una fórmula: se repite más de lo que se entiende. De esa manera se les impide utilizar y vincular los conocimientos que han construido y que continúen construyéndolos, obstaculizando su avance con respecto al sistema de numeración que lo sustenta. Más aún les impide comprender que los procedimientos con los que se resuelven todas las operaciones están íntimamente vinculados con este sistema.

En este sentido creemos que comenzar la enseñanza por los algoritmos convencionales es una elección didáctica desafortunada. Si consideramos con Guy Brousseau (1983, 1989) que existen obstáculos de origen didáctico "que son aquellos que parecen no depender más que de una elección o de un proyecto del sistema educativo", muchos errores que los niños cometen en sus cuentas podrían pensarse como intentos de encontrar alguna lógica frente a una enseñanza que no encuentra cómo conducir un aprendizaje significativo de los algoritmos de las operaciones matemáticas. La forma de enseñanza habitual hace difícil comprender estas y otras operaciones que se enseñarán más adelante, como la multiplicación y la división. Cuando un algoritmo se aplica mecánicamente sin haberlo comprendido, puede ser que se obtenga un resultado correcto, pero también puede constituir un obstáculo para los niños, tal vez por interferir con el significado de los números con los cuales el niño debe operar.

Podemos sostener que dado un modelo de enseñanza como el que estamos poniendo a prueba, los procedimientos que los niños construyen manifiestan propiedades muy diferentes de las que permiten los algoritmos aprendidos por transmisión directa: propiedades de plasticidad y de significación -dado que se parte de problemas y se adecuan a ellos- y posibilidades de control de los pasos intermedios y del resultado -ya que consideran en todo momento las cantidades involucradas-.

El trabajo continúa. Es necesario hacerlo ya que debemos seguir analizando las condiciones didácticas necesarias para que los alumnos comprendan -y no sólo repitan- las reglas que rigen los algoritmos, es decir, alcancen aquel punto que la enseñanza creyó que era un punto de partida.

Notas

[2] Tomamos de J. Piaget la definición de comprender: "Comprender consiste en extraer la razón de las cosas".

[3] Nos referimos a los problemas que generalmente se plantean en 1er. año en los que se conoce un estado inicial, se plantea una transformación que puede ser negativa o positiva y se pregunta por el estado final. Por ejemplo: En esta caja hay 24 fichas, le agrego 16, ¿cuántas fichas hay en total?

Bibliografía

Brousseau, G., (1983), "Les obstacles épistemologiques et les problemes en mathématiques", en: *Recherches en didactique des mathématiques*, vol 4, N° 2, págs.165-198, La Penseé Sauvage, Grenoble.

-----------, (1989), "Obstacles épistemologiques, conflits sociocognitifs et ingenierie didactique", en: Bednarz, N. y Garnier, C. (comp.), *Construction des savoirs. Obstacles et conflits*, Agence d'Arc, Otawa.

Charnay, R., (1994), "Aprender (por medio de) la resolución de problemas", en: Saiz, I. y Parra, C., (comp.), *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones*, Paidós Educador, Buenos Aires.

Ermel, (1991), *Equipe de didactique des mathematiques Aprentissages numériques*, Hatier Enseignants, París.

Lerner, D., (1992), *La matemática en la escuela. Aquí y ahora*, Editorial Aique, Argentina.

Piaget, J., (1974), *Réussir et comprendre Presses*, Universitaires de France, France.