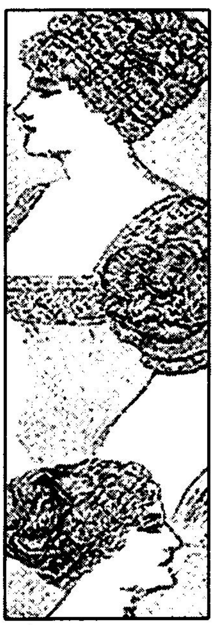
Diversidad de la relación personal de alumnos de 6 y 7 años con la numeración

POR GRACIELA RICCO,* GUILAINE MENOTTI* Y LAURENCE ALLENBACH**



* Equipe de recherche N° 2305 "Cognition, Raisonnement et Didactique", UFR. Psychologie, Pratiques Cliniques et Sociales, Université Paris 8, France

** Département de Mathématiques –Institut Galilée– Université Paris 13, France.

Colaboraron en esta investigación Catherine Boyer, Christiane Larere, Line Numa Bocage, M.C. Jollivet et Annie Tandé.

Resumen: Este artículo presenta algunos resultados de una investigación más amplia sobre la construcción de la relación personal de alumnos de primer grado (6 años) a un objeto de saber: "la numeración." Se observaron en Francia, durante un año escolar dos clases institucionalmente contrastadas, una clase en una "Zona de Educación Prioritaria" y una clase "corriente". Presentamos aquí los resultados de una prueba individual realizada por todos los alumnos al principio y al final del año escolar. Los ítems de la prueba permiten estudiar la evolución de los distintos aspectos de la numeración: la sucesión numérica, la enumeración, la comparación del cardinal de dos conjuntos, los problemas aditivos y el lenguaje matemático. El tratamiento estadístico de los resultados pone de manifiesto la diversidad en la evolución de la relación de los alumnos a la numeración, pero no hay diferencia significativa entre la clase "corriente" y la ZEP. Al final del año las variaciones disminuyen pero la gran mayoría de los alumnos aún tiene dificultades para resolver los problemas de tipo aditivo que requieren el manejo operatorio de los números y se mantiene la variación inter-grupos revelada por el análisis factorial múltiple. Los resultados corroboran que la construcción de la numeración depende de un orden parcial y no total.

• • •

Palabras clave: Numeración - Diversidad - Cardinalizacion - Competencias - Relación personal - Perfil de alumnos • **Key words:** Numbering - Diversity - Cardinalization - Competence - Personal relationship - Student profile.

• • •

Abstract: Our purpose is to discuss some of the results obtained in a wider study on the construction of the personal relation of six-year-old pupils to an object of knowledge: numeration. We observed in France two first grade classes during the school year in schools with clearly different institutional characteristics: one in a ZEP ("Zone Education Prioritaire"), and one in an "ordinary" school. Here we shall examine the results of an individual test passed by all pupils at the beginning and at the end of the school year. The items explore the different aspects of numeration: sequence of numbers, enumeration, comparing the cardinal number of two sets, solving additive problems and the use of mathematical language. We can thus observe the evolution of the student's personal relation to numeration during the year. The statistical analysis of results allows us to describe different groups according to the profiles in the children's response, but there is no significant difference in the results between the two classes. The diversity between pupils diminishes at the end of the year but most of them still have difficulties in solving additive problems which require an operative use of numbers and the variation difference between groups is still present. Results tend to confirm that numeration is based on partial, not on a total order.

⇨

INTRODUCCIÓN

Este artículo se inscribe en una investigación más amplia que examina la complejidad de los aspectos conceptuales, didácticos e institucionales en el aprendizaje de un objeto de saber científicamente normado. Abordamos aquí la evolución de la relación personal de los alumnos con respecto a "la numeración" en el *Cours Préparatoire* (alumnos de 6 años, primer grado de la escuela primaria en Francia) estudiando las interacciones cognitivas de cada alumno con la numeración a través de la acción, de la utilización del lenguaje escrito u oral.

La originalidad de este trabajo proviene no solamente de la duración de la observación (todo un año escolar), sino también de la elección de la población estudiada: dos clases de primer grado institucionalmente contrastada una en un ZEP (Zona de Educación Prioritaria, aquéllas en que el Ministerio de Educación estima que se necesitan recursos adicionales) y una clase "corriente") en el seno de las cuales hemos diferenciado entre grupos de alumnos "flojos", "medianos" y "buenos".

Si bien nos inscribimos en el enfoque constructivista del desarrollo cognoscitivo, no dudaremos en enriquecer estos paradigmas con nociones derivadas de teorías didácticas que, para nosotros, resultan ineludibles para aprehender la complejidad de lo que está en juego en la enseñanza y en el aprendizaje, en particular las diferentes propiedades matemáticas subyacentes a la construcción del conjunto de los enteros naturales no nulos.

Así pues, hemos construído una prueba compuesta por cinco campos ligados a la numeración: 1) la sucesión numérica, 2) la enumeración, 3) la comparación del cardinal de dos conjuntos, 4a) y 4b) los problemas aditivos y 5) el lenguaje matemático. La prueba de cada alumno al principio (**Tiempo 1**) y al final (**Tiempo 3**) del año escolar, nos permite obtener una fotografía de la competencia de estos alumnos en los cinco campos y observar su evolución.

Partiendo de distintas concepciones de la numeración en el seno de una misma clase, el problema central será elaborar una fotografía que permita interpretar esta diversidad y su evolución teniendo en cuenta la complejidad de las competencias matemáticas en juego para la apropiación de este objeto de saber.

De este modo, comparando las estadísticas de estos dos momentos, determinaremos una "tipología de alumnos". El **Tiempo 2** abarca las observaciones de las lecciones concebidas por los maestros sobre la numeración Menotti G., Ricco G (aceptado para publicación), pero para evitar una extensión excesiva, este primer artículo sólo se ocupará de los resultados obtenidos al principio y al final del aprendizaje.

Presentación de la prueba y marco teórico

Desde 1941 los trabajos de Piaget han evidenciado que la adquisición del número en su dimensión operatoria se basa en una síntesis de la relación de orden y de la relación de equivalencia. Pero creemos que esta posición téorica debe ser actualizada y completada con aspectos sociales y situacionales.

Campo 1: Conocimiento de la sucesión numérica

En este campo exploramos desde un punto de vista matemático la relación de orden y su constitución, partiendo de los trabajos de Fuson, Richards & Briars (1982) y los de Fuson (1988, 1991).

Ellos muestran que **la adquisición de la cadena numérica** por parte del niño (entre los dos y los nueve años) se basa en la diferenciación de las palabras-número y su puesta en relación a partir de la utilización implícita de las propiedades (P) siguientes:

- P1: En las acciones de conteo se utilizan palabras específicas;
- P2: Las palabras-número se suceden en un orden convencional, estable durante las repeticiones;
- P3: Cada palabra-número es única y enunciada una sola vez durante el conteo;
- P4: Esta lista no sólo puede aprenderse "de memoria" sino que puede construirse a partir de las reglas de la base diez.

Estas propiedades están subyacentes en los ítems (121, 122, 123 et 124) que tratan sobre la detección de inversiones, de repeticiones, de omisiones y de palabras-número-aberrantes introducidas en las sucesiones numéricas.

Los trabajos que tratan sobre **la estructuración de la sucesión numérica** evidencian cinco niveles de desarrollo.

- 1: "el rosario": la secuencia constituye una totalidad sin significado numérico;
- 2: "la cadena indivisible": la lista de palabras-número puede ser solamente producida a partir del principio de la lista;
- 3: "la cadena divisible": el conteo puede comenzar en un punto de entrada arbitrario y comienza igualmente a desarrollarse el conteo a la inversa;
- 4: "la cadena enumerable": los significados de la sucesión del conteo y de la cardinalización se fusionan y las palabras-número se vuelven ellas mismas objetos que representan los términos y la suma en las situaciones de adición y de sustracción;
- 5: "la cadena bidireccional": la cadena numérica se vuelve flexible. Fusson (1991) caracteriza a este nivel como el "nivel más alto de elaboración. La secuencia de las palabras-número se vuelve una secuencia de unidades serial, inclusiva, bidireccional y cardinalizada."

Este modelo teórico insiste sobre el rol (subestimado por Piaget) que tiene el conteo en la construcción del número. En nuestra prueba los aspectos dinámicos de la cadena numérica, y en particular la flexibilidad, serán evaluados por el cotejo de diversos ítems (en el seno de este campo y entre los campos). Es necesario precisar que los trabajos de Van Nieuwhenoven (1999) también nos han inspirado en la construcción de este campo.

Presentamos a continuación algunos especímenes que ponen en práctica la propiedad matemática: "Sea cual sea el origen de entrada en la lista de números, su orden es invariante."

N° ítems	Consigna	Aspecto de la cadena examinada	Aspectos matemáticos específicos
13	*"¿Puedes contar a partir del 4?"*	Divisible	Unicidad del sucesor
14	*"¿Puedes contar del 6 al 13?"*	Divisible	Respeto de los dos límites
15	*"¿Puedes contar para atrás empezando por el 7?"*	Divisible, flexibilidad y bidireccionalidad	Unicidad del predecesor
16	*"¿Puedes contar de 2 en 2 empezando por el 2?"*	Divisible, flexibilidad	Orden estable

Campo 2: Enumerar una colección discreta

Aquí estudiaremos la enumeración siguiendo las definiciones de dos didácticos de la matemática. Brousseau (1995) precisa que "es evaluar el cardinal de un conjunto" y Vergnaud (1994) afirma que "la estructura de la enumeración consiste en un conjunto organizado de gestos, percepciones y emisiones vocales. La estabilidad se basa en dos principios matemáticos: el principio de la biyección y el principio de la cardinalización".

Señalemos que el principio de la biyección hace, implícitamente, referencia a la **unicidad y a la exhaustividad**, coordinándolas a través de la **sincronización**.

Dos enfoques intentaron explicar el desarrollo del conteo, el que se refiere a los trabajos de Gelman y Gallistel (1978) y el que revindica el interaccionismo.

Para los primeros, el desarrollo del conteo se basa en la articulación de cinco principios y su extrapolación a situaciones más generales. Estos principios, considerados como predeterminados son:

- El principio de orden estable: (las palabras-número deben ser engendradas en el mismo orden en cada conteo).

- El principio de correspondencia término a término: (doble sincronización entre las palabras-número y los objetos a enumerar).

- El principio cardinal: (la última palabra-número pronunciada durante el conteo representa el número de elementos del conjunto).

- El principio de no pertinencia del orden: (el orden del inventario de los objetos no modifica la medida de la colección).

- El principio de abstracción: (cada objeto de la colección, por heteróclita que sea, corresponde a una unidad).

El principio de no pertinencia del orden está visto como un principio de base que se desarrolla muy temprano.

Para los interaccionistas, el desarrollo del conteo pasa de "estructuras débiles" (comprensión dirigida por tratamientos anteriores) a la construcción gradual de "estructuras fuertes" (comprensión dirigida por los principios). De este modo, Baroody (1991), pasando revista a las investigaciones realizadas por Gelman sobre "los principios", concluye que los hechos experimentales son más compatibles con el punto de vista interaccionista que con el que estima que los principios aparecen precozmente. Y agrega que "las estructuras mentales subyacentes al conteo se construyen gradualmente, a medida que el niño desarrolla su habilidad de conteo". Por su parte, Fuson, pasando revista al principio de "sucesión estable", sugiere una construcción gradual de la comprensión del sistema a partir del descubrimiento sucesivo de tres propiedades: primero, que la lista está compuesta por palabras-específicas, luego las palabras se suceden según un orden y, finalmente, que cada palabra figura sólo una vez.

Para Sophian (1991) el conteo, al ser una actividad que se transmite socialmente, está dirigido a un objetivo ligado al concepto de cardinalización. Sin embargo esta "orientación hacia un objetivo" resulta de una construcción conceptual por parte del niño, el conteo no nace como una actividad cardinal sino que se integra poco a poco. Además, cuestionando el estatus de la "última palabra-número pronunciada", Sophian, en acuerdo con Fuson, afirma que los niños aprenden en general esta regla de manera procedural, antes de comprender las implicaciones cardinales.

Finalmente, como lo muestra Briand (1999), el control de una actividad de conteo para el niño implica el manejo de "una tarea de inventario". Para contar la cantidad de elementos de una colección finita hay que nombrar los objetos uno después del otro, sin nombrar dos veces el mismo, pero en función del contexto situacional (objetos homogéneos/ heterogéneos, desplazables/no desplazables, alineados/ dispersos/ en círculo, etcétera) hay que tomar en cuenta nuevos elementos. Por ejemplo, cuando los elementos a enumerar están puestos en círculo, hay que determinar un origen y memorizarlo (visual, gestualmente...).

Los ítems del campo 2 tienen en común las siguientes propiedades matemáticas:

- "todo natural n tiene un "sucesor" denominado n+1;

- la cantidad de objetos de una colección es el último número de la sucesión de las palabras-número pronunciadas;

- una colección discreta tiene una medida y sólo una;

- el número de elementos de una colección discreta es independiente del orden de su designación."

Algunos de los ítems presentados aquí exploran otros aspectos matemáticos.

N° ítems	Consigna	Aspectos matemáticos específicos
222	*"¿Cuántas bolas hay en cada bandeja? Comienza por la que tú quieras"* (cada bandeja tiene 12 bolas: o alineadas, o agrupadas por 4, o en círculo).	"Un número entero es la medida de una colección discreta. Esta medida es independiente de la colección discreta elegida"
25	*"¿Cuántos objetos hay en total sobre la bandeja?"* (7 objetos varios: hoja A4, lápices, goma, portalápices...)	"El número de elementos de una colección discreta es independiente de la naturaleza de esos elementos"

Campo 3: Comparar colecciones discretas

Si para Gelman el dominio del principio de la cardinalización se demuestra con niños que saben responder a la pregunta "¿cuántos?", para Fuson (1988) no es así. Para ella, la "regla de la última palabra pronunciada" es una "estructura débil" que precede la comprensión del principio cardinal. Como subraya Karmiloff (1992), "Piaget, Frydman & Bryant (1988) y Fuson (1988) apelan a un criterio más estricto: la cardinalización supone de hecho la posibilidad de atribuir una medida a una colección, pero principalmente engendra la competencia para realizar comparaciones numéricas entre dos o más conjuntos". De este modo Fuson distingue tres tareas diferentes y jerárquicas refiriéndose al concepto de cardinalización:

1) saber pasar del conteo al cardinal asociado ("¿Cuántos?");

2) saber comparar un cardinal dado con el cardinal producido por un conteo ("¿Hay *n* objetos en este conjunto?");

3) pasar de un cardinal dado a la construcción de un conjunto ("Dame *n* objetos").

En paralelo Brousseau (1995), sosteniendo que es el alumno quien debe construir sus propios conocimientos aritméticos, creó la siguiente "situación fundamental", de la cual nos hemos inspirado en el ítem 31.

"Tenemos estos potecitos con pintura. Tienes que ir a buscar allá los pinceles y poner uno sólo en cada pote. Trae todos los pinceles de una vez, en un sólo viaje. No debe quedar ni un pincel sin pote ni un pote sin pincel. Si te equivocas, tomas de nuevo todos los pinceles, los vuelves a llevar allá y comienzas de nuevo."

Brousseau (1995) considera que "el niño sabrá enumerar cuando pueda cumplir los dos roles: preguntar (emisor) a alguien (receptor), oralmente o por escrito, la cantidad de pinceles necesarios verificando la operación, y a la inversa, proveer tras el pedido la cantidad solicitada."

Una situación como esta es denominada "fundamental" ya que permite no solamente evaluar el conocimiento de las propiedades de las colecciones, de los números y de sus operaciones, sino también engendrar "todas" las situaciones de conteo haciendo variar sus variables cognitivas. Las prácticas habituales del conteo se obtienen a partir de esta situación por supresión o por transmisión al adulto de ciertas tareas.

Los ítems del campo 3 ponen en práctica principalmente las siguientes propiedades matemáticas:

- dos colecciones son equipotentes si a cada elemento de una le corresponde un elemento y sólo uno de la otra;
- si a dos colecciones les corresponde la misma lista de números, entonces éstas son equipotentes.

Presentamos a continuación los ítems que necesitan ir más allá de un procedimiento "término a término" entre las diferentes colecciones.

Nº ítem	Descripción de la situación	Aspecto matemático específico
31	*"Puse vasos sobre la mesa. Pon un sorbete en cada vaso. Busca la cantidad de sorbetes que necesitas, ni más ni menos"*	Para llevar a cabo una colección igual a una colección dada vamos a constituir colecciones equivalentes a partir de una colección testigo en la que los elementos son palabras-número.

Otros ítems retoman este aspecto matemático específico:

- Ítem 34: *Pongo fichas sobre esta bandeja, sobre la otra bandeja debes poner lo mismo. Pero cuidado, dentro de algunos instantes voy a cubrir mis fichas"* ($n = 9$ fichas dispersas).
- Ítem 321: *"Observa las fichas de cada bolsita"* (2 bolsas con 15 objetos diferentes) *"¿Hay la misma cantidad en las dos bolsitas?"*.
- Ítem 322: *"Observa las bolas de las dos bandejas"* (2 bandejas con 15 bolas fijas en cada una, en una hay 5 filas de 3 bolas, y en la otra están desordenadas. *"¿Hay la misma cantidad en las dos bandejas?"*.

Campo 4: Resolver un problema

Partiendo de la teoría de Vergnaud (1981) según la cual las palabras-número no son números sin la adición ni la sustracción sino solamente instrumentos como las letras del alfabeto, hemos elegido situaciones que hacen intervenir implícitamente estas dos operaciones. Pero la particularidad reside en hacerlo, contrariamente a las prácticas escolares, sin recurrir a escrituras de cálculo o a conocimientos de hechos numéricos, sino utilizando un determinado material (prueba ECPN, 1995)

Estas pruebas exploran dos funciones de los números:

• el tratamiento de las situaciones de *adición y de sustracción* : búsqueda del estado inicial, del estado final y de la transformación (campo 4a);

• *la comparación de las cantidades y la cuantificación de la relación de orden*: composición de dos medidas, transformación de una medida en otra medida (campo 4b).

Ciertos problemas del campo 4b implican la flexibilidad de la cadena, como lo llama Fuson. En efecto, su resolución, por prueba y error, necesita el cambio de dirección en la producción de palabras-número.

Aquí presentamos algunos ítems para cada uno de los sub-campos (4a y 4b):

N° ítem	Descripción de la situación	Aspecto matemático específico
40	3 fichas distribuidas en una bandeja "*¿Cuántas fichas hay en la bandeja?*" El examinador agrega 3 fichas más y las tapa con la mano diciendo: *"Agregué 3 fichas. ¿Cuántas hay ahora?*"	La medida del estado final es función de la transformación y del estado inicial
44	"*Pongo 7 fichas en mi mano. Cierra los ojos. Hice algo con las fichas. Ahora tengo 5 fichas en la mano. ¿Qué crees que hice?*"	La medida de la transformación es la diferencia entre el estado inicial y el estado final
453	"*Ahora te cuento lo que ocurrió. Yo tenía 5 bolas sobre una mesa. Cubrí algo con un pañuelo.Cuando volví a mirar sólo vi 4 bolas en la mesa. Descubre cuántas bolas están debajo del pañuelo.*"	La medida de una de las partes es la medida del todo menos la medida de la segunda parte
36	Delante del niño, el examinador atribuye dos fichas a la imagen del gato, tres a la del perro y siete a la del conejo. "*Aquí están el gato, el perro y el conejo y sus fichas. ¿Qué podrías hacer para que todos tengan lo mismo?*"	Relación de comparación (desigualdad)

Los ítems 38 y 39 retoman una situación idéntica a la del ítem 36 pero con configuraciones y consignas diferentes.

Campo 5: El lenguaje matemático

En el campo 5 queremos evaluar la apropiación del sistema. La numeración decimal de posición es un lenguaje elaborado y complejo. Es un sistema de escritura simbólica del número que traduce una estructura polinomial en la cual la base es igual a 10. Fue necesario superar obstáculos conceptuales para elaborar el sistema numérico (primero verbal, luego escrito). Durante la práctica concreta de la enumeración y de la correspondencia término a término de las interacciones entre los individuos a propósito de la enumeración, el proceso de simbolización y de conceptualización han permitido la elaboración del concepto de número y de los sistemas de numeración (Numa-Bocage, 1997).

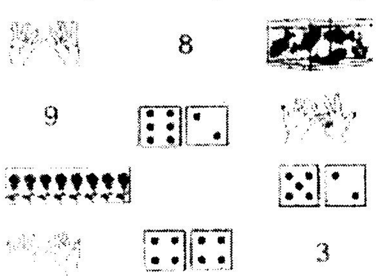
Por lo tanto es necesario:

- diferenciar el número de su representación escrita o figurada (los ítems: 512, 551, 552 o 541 permiten apreciar la disponibilidad de la equivalencia de los diferentes sistemas de representación del número)

- evaluar la adquisición de las reglas y del significado de la posición en la escritura de los números (ítem 512)

- evaluar la comprensión de un número escrito en cifras (ítem 520); se trata de observar la correspondencia entre lo oral y lo escrito.

Presentamos a continuación dos ítems emblemáticos de este campo.

N° ítem	Descripción de la situación	Aspecto matemático específico
551	Los alumnos disponen de la representación siguiente:  "*¿Cuántos puntos hay en los dados que están en el medio,los enmarcados en rojo? Termina tú el trabajo. Cuando veas que en una imagen hay ocho, traza una linea roja para unirlo a los dados del centro.*"	Equivalencia de diferentes representaciones de un número

A continuación examinaremos las actividades matemáticas estudiadas en la prueba inspirándonos en las praxeologías matemáticas que Chevallard (2003) desarolla en su teoría antropológica de los saberes. Estas praxiologías permiten describir pertinentemente la forma en que los alumnos elaboran su relación al objeto de saber (en este caso la numeración). El concepto de praxeología plantea la necesaria articulación entre dos polos constituidos por: **la praxis** (el binomio: tarea/ técnica [T / t]) y el **logos** (el binomio: tecnología/ teoría [q / Q]).

Como ilustración tomemos el ítem 24 del campo 2: se le dan al alumno 15 elementos de mismo grosor (3 cuadrados amarillos, 6 triángulos más 6 círculos multicolores en una bolsa). El experimentador pregunta "*¿cuántos objetos hay* *en total?*" Sea cual fuera la respuesta del alumno, el experimentador, a través de un títere, modifica la configuración y hace la misma pregunta.

Aquí, la praxis [T / t], o el saber hacer, incluye, tanto el **tipo de tarea**, T24: *"Enumerar una colección sea cual sea la organización espacial de sus n elementos; aquí n= 13"*, como las **técnicas**, es decir, los medios de realizar este tipo de tareas. A continuación, nos limitamos a la descripción de tres técnicas posibles, puestas en relación con la codificación (logro/ fracaso) utilizado en nuestra prueba. En cuanto al logos [q/ Q], o saber, está confrontado a cada una de las técnicas que produce, describe y justifica.

Tipo de tareas (T)
T_{24}: *"Enumerar una colección sea cual sea la organización espacial de sus n elementos; aquí n = 13"*

	Técnicas (t)	**Elementos tecnológico-teóricos** (q/ Q)
Logro	t_{24} *"habiendo ya enumerado el conjunto de la colección, enuncio el mismo número que en la configuración precedente"*	"*n*, el número de elementos de una colección discreta, es independiente de la naturaleza de sus elementos y de sus configuraciones espaciales."
Fracaso	t_{241} *"recuento la colección en cada una de sus modificaciones espaciales"*.*	"Se concibe *n*, el número de elementos de una colección discreta, como independiente de la naturaleza de sus elementos, pero no de sus configuraciones espaciales."
	t_{242} *"enumero cada subconjunto, en función de la cualidad, sin considerarlo como formando parte de una sola y misma colección."*	"En una colección discreta los elementos de naturaleza diferente se conciben como colecciones distintas que se miden separadamente."

* El desconocimiento de la invariancia del cardinal se considera como fracaso.

Puesto que nos proponíamos examinar la invariancia del cardinal de una colección, independientemente de la naturaleza de los elementos y de sus configuraciones espaciales, no analizamos las técnicas utilizadas en la enumeración. Sus principales componentes son la sincronización del gesto, la voz y el objeto; la unicidad y la exhaustividad de los objetos; y las palabras-número.

A continuación estudiaremos las técnicas que corresponden a cada una de las ciento veinticinco tareas matemáticas incluídas en nuestra prueba para destacar, en cada uno de los campos, cuales son los elementos tecnológico-teóricos correspondientes. Este análisis es el que nos permitirá analizar las articulaciones entre los distintos campos.

Pasar de "enunciar una sucesión numérica" a "enumerar una colección discreta" se fundamenta principalmente en la adquisición del elemento tecnológico "La cantidad de objetos de una colección es el último número de la sucesión de las palabras-número pronunciada". Pero esto no agota las diferencias entre los dos tipos de tareas, ya que es también necesario co-construir los elementos tecnológicos siguientes:

- "la sucesión de números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10... es una colección de objetos, los números, que se toman como referencia";
- "un número representa a la vez un objeto y una colección de objetos (la que lo incluye a él y a los números anteriores en la sucesión numérica)";
- "comparar dos colecciones es independiente de la naturaleza de los objetos de las colecciones. "

A su vez, pasar al tipo de tareas "comparar colecciones discretas" necesita estar en condiciones de considerar que:

- "para comparar colecciones vamos a constituir colecciones equivalentes a partir de una colección testigo en la que los elementos son palabras";
- "comparar colecciones será entonces comparar estos números."

Los elementos tecnológico-teóricos, en estrecha relación con los procedimientos, permiten describir niveles de conceptualización y en consecuencia, describir la naturaleza de la relación personal de cada alumno con la numeración.

METODOLOGÍA

La recolección de datos se efectuó en dos escuelas de la región parisina, en Seine Saint-Denis, una perteneciente a una ZEP y la otra no. Las maestras, formadas en el Instituto Universitario de Formación de Maestros (IUFM), tenían tres años de antigüedad y utilizaban el mismo manual de matemática.

CONSTRUCCIÓN DE LA PRUEBA

Nuestra prueba se basa en cinco aspectos de la numeración:

- Campo 1: "enunciar la sucesión numérica" (26 ítems).
- Campo 2: "enumerar una colección discreta" (9 ítems).
- Campo 3: "comparar colecciones discretas" (9 ítems).
- Campo 4: "resolver un problema" (a su vez dividido en 4a: "resolver un problema aditivo" y 4b "resolver un problema de comparación") (12 ítems).

- Campo 5: "poner en práctica el lenguaje matemático" (70 ítems).

Todos los alumnos pasaron los 126 items al principio (T1 o pre-test) y al final del año escolar (T3 o post-test). Salvo en los ítems 124 y el 17, sólo se manejaron números del 1 al 20.

Variamos las situaciones para estudiar su influencia sobre los procedimientos empleados por los alumnos. Se utilizaron:

• objetos desplazables o no;

• objetos homogéneos o no (diversidad de colores, de formas, de tamaños...);

• colecciones organizadas o no (constelación de dados, dedos, líneas...);

• sin material concreto.

Y distintas acciones posibles:

• producciones (colecciones, respuestas orales o escritas);

• identificaciones;

• reconocimiento (se utiliza un títere para realizar actividades numéricas delante del niño. Este tiene que decidir si la actividad del títere es acertada o incorrecta).

CONDICIONES DEL PASAJE DE LA PRUEBA

En el pre-test y el post-test se utilizó el mismo protocolo, realizado en una entrevista individual, lo que favorece la observación de los procedimientos, de los pedidos de repetición del item e igualmente la verificación de la estabilidad de las respuestas. Para evitar el cansancio de los alumnos, la prueba se separó en tres partes de aproximadamente veinte minutos cada una. Los ítems de los diferentes campos se mezclaron para evitar al máximo los efectos de aprendizaje.

CODIFICACIÓN DE LOS PROCEDIMIENTOS

Los resultados, codificados en función de las propiedades matemáticas subyacentes a los procedimientos, se repartieron según dos modalidades: "logro" o "fracaso". Ilustramos nuestro método a partir del ítem 17, su consigna era: *"Voy a decirte un número, ¿cuál es el número que viene después?"*. Después de la respuesta del niño, *"¿Cuál es el número que viene inmediatament antes?"*. Esto se repite para cada uno de los cinco números 4, 9, 15, 26, 39. De este modo, este ítem se subdivide en cinco parte. Cada respuesta se codificó, para fines estadísticos, de la manera siguiente:

Variable	**Modalidades (N = 6)**	
	N°	**Denominadas**
17A Producción PREDecesor o SUCesor de 4 (4PPRED-SUC)	2	17A 4PPRED-SUC Logro para 3 y 5
	3	17A 4PPRED-SUC Logro para 3
	4	17A 4PPRED-SUC Logro para 5
	5	17A 4PPRED-SUC Fracaso para 5 y 3
	1	17A 4PPRED-SUC otro
	0	17A 4PPRED-SUC NR

En este artículo presentaremos en primer lugar, un estudio cuantitativo a partir de un análisis global de los resultados y en segundo lugar una clasificación ascendente jerárquica sobre las coordenadas factoriales. Los tratamientos estadísticos e informáticos están hechos con la ayuda de dos *softwares* [SAS (SAS-Institute) et SPAD (DECISIA)].

ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS: LOS COMPONENTES DE LA HETEROGENEIDAD

Todos los ítems a los que haremos referencia aquí fueron explicitados en detalle en la presentación de cada uno de los campos.

1. La heterogeneidad en función del tipo de clase (Zona de Educación Prioritaria o no)

Los resultados, medidos por la frecuencia de logros y fracasos en los ítems, se estudiaron en cada campo y no muestran diferencias significativas entre las clases ZEP y no ZEP. Teniendo en cuenta este hecho se estudiarán conjuntamente los resultados de los alumnos de las dos clases (36 alumnos).

2. La evolución de la heterogeneidad en las relaciones de los alumnos con la numeración en función de los campos

De aquí en adelante los datos se reagrupan en frecuencias de logros por campo. El cuadro de datos contiene, en consecuencia, 36 individuos descritos por 12 variables: la proporción de ítems del mismo campo que los alumnos logran resolver correctamente (en frecuencias o en porcentajes) en T1 y en T3. Indicaremos a continuación los resultados globales en los diferentes campos al comienzo y al final del año escolar.

Cuadro N° 1: Frecuencias de logro, en porcentaje, por campo, entre T1 y T3

Campo		Media	Desviación estándar	Mínimo	Máximo
1: Enunciar una sucesión numérica	*T1*	**0.78**	0.19	0.15	1.00
	T3	**0.94**	**0.08**	0.62	0.96
2: Enumerar una colección	*T1*	0.61	0.24	0.00	1.00
	T3	0.73	0.15	0.44	1.00
3: Comparar colecciones	*T1*	0.55	0.21	0.11	1.00
	T3	0.77	0.19	0.22	1.00
4b: Resolver un problema de comparación	*T1*	**0.35**	0.24	0.00	0.80
	T3	**0.46**	0.26	0.00	1.00
4a: Resolver un problema aditivo	*T1*	**0.44**	0.30	0.00	1.00
	T3	**0.73**	0.24	0.00	1.00
5: Determinar los ostensivos matemáticos	*T1*	**0.77**	0.15	0.46	0.99
pertinentes en un contexto	*T3*	**0.95**	**0.05**	0.81	1.00

Clasificando los campos en función de las tasas de logro, obtenemos:

Pre-test : *Campo 1 (78%)> Campo 5 (77%) > Campo 2 (61%) > Campo 3 (56%) > Campo 4a (44%) > Campo 4b (35%)*

Post-test : *Campo 5 (95%) > Campo 1 (94%) > Campo 3 (77%) > Campo 2 (73%) et 4a (73%) > Campo 4b (46%)*

Constatamos:

- los "grandes progresos" sobre *el conocimiento de los aspectos convencionales del lenguaje numérico* (campo 5) y sobre *la adquisición de la sucesión numérica* (campo 1) e igualmente una homogeneización de la muestra al final del año en estos dos campos (en la prueba final la desviación estándar en el campo 5 se divide por tres, respecto a la primera prueba y en el campo 1, se divide por dos). Nótese que estos dos campos recubren los aspectos más convencionales de la numeración;

- la dificultad *para conceptualizar la propiedad operatoria del número* (campos 4a y 4b). Para estos dos campos tanto en el pre-test como el en el post-test, las desviaciones estándar están entre las más elevadas y las frecuencias promedio entre las menores. Hay pues una gran heterogeneidad en las relaciones de los alumnos de primer grado con respecto a la resolución de los problemas. Recordemos que para Vergnaud (1981) esta actividad matemática es central para la construcción del número en su dimensión operatoria.

- el aumento en el Tiempo 3 de las medias en la *enumeración* (campo 2) y en las *comparaciones de los cardinales de los dos conjuntos* (campo 3).

Este estudio estadístico valida, como era de esperar, la idea de un progreso entre el comienzo y el final del año, pero los resultados del Análisis Factorial Múltiple (AFM) nos permitirán afinar nuestro análisis de la diversidad conceptual que existe entre los alumnos con respecto a la numeración. Pero antes estudiaremos la evolución de la relación de los alumnos en función de los ítems en el seno de cada campo.

3. LA NATURALEZA DE LA HETEROGENEIDAD DE LA RELACION DE LOS ALUMNOS CON LA NUMERACIÓN Y SU EVOLUCIÓN EN FUNCIÓN DE LOS ÍTEMS

Los siguientes resultados se refieren a los cuadros que se encuentran en el anexo (del n°2 al n°6). Los valores caracterizan *la proporción de alumnos* que lograron o fracasaron en un ítem determinado, expresado en porcentaje (de 0 a 100) y en frecuencia (de 0 a 1).

Campo 1: Enunciar una sucesión numérica

En los **cuadros 2 y 2bis** observamos que:

• al principio del año (T1):

- la mayoría de los alumnos han adquirido la cadena numérica, al menos hasta el 12 [ítems 121, 122, 123, 124)], lo que atestigua (en esta escala numérica) el manejo de las propiedades matemáticas de orden, de exhaustividad y de sucesión.

- Los aspectos conceptuales ligados a la estructuración de la cadena numérica resultan difíciles, especialmente el "carácter divisible de la cadena numérica"

♦ Con más del 40 % de fracasos en los ítems 13 (*"¿Puedes contar a partir del 4?")* y 14 (*"¿Puedes contar del 6 al 13?");*

♦ Con el 64 % de fracasos en el ítem 15 (*"¿Puedes contar hacia atrás comenzando por el 7?") y el* 67 % de fracasos en el 16 (*"¿Puedes contar de 2 en 2 comenzando por el 2 ?")*

• Al final del año (T3):

♦ "contar a partir de un punto" (ítem 13), sigue siendo difícil para un tercio de los alumnos;

♦ "contar de dos en dos" (ítem 16) Un tercio de los alumnos fracasan en esta tarea.

A pesar de que se notan progresos entre el comienzo y el final del año (ítem 14 y 15), el carácter divisible de la cadena (entre el 1 y el 16), y en consecuencia su estructuración, no está aún bien establecida en casi una tercera parte de los alumnos.

Campo 2: Enumerar una colección discreta

Encontramos, en el **cuadro 3**, dos resultados salientes:

1) la extrema dificultad para enumerar objetos heteróclitos (Ítem 25 : 53% de fracasos en T1 y 44% en T3) y para manejar la invariancia del cardinal (Ítem 24 : 83% de fracasos en T1 y más de 50% en T3) ;

2) la influencia del tipo de contexto sobre el logro en la enumeración:

♦ al final del año, más de un tercio de los sujetos todavía falla en la enumeración de colección en función del material (objetos no desplazables : (ítem 221) " amontonados " y (item 222) " disposición en círculo ") ;

♦ dos ítems bastante cercanos desde el punto de vista de las técnicas de enumeración, obtienen resultados muy distintos incluso a fin de año [en T3 6% de fracaso en el 221, "objetos dispersos" y 25% de fracaso en el 20 ("*¿Cuántas fichas hay en total?*" 17 fichas desplazables puestas en una bolsita)]. Así vemos que los logros en la enumeración de una colección discreta también fluctúan en función del tipo de actividad de conteo inducidas por el contexto, lo que parece ser subestimado en algunas investigaciones. En otros términos, el logro no depende solamente de las capacidades del niño para cardinalizar sino también de la solidez de su técnica de conteo.

Campo 3: Comparar colecciones discretas

Se comprueba que la determinación del cardinal de dos conjuntos equipotentes es una competencia difícil de adquirir. A principio de año (cfr. **cuadro 4**), más de la mitad de los alumnos fallaban en cuatro de los seis ítems relacionados con esta competencia. (31, 34, 321 y 322) ; a fin de año el ítem 31 registra aún 47% de fracasos. A la inversa, el ítem 312 ("*dibuja 10 círculos*") no resulta particularmente difícil para los alumnos de primer grado: 14% de fracasos en T1 y 100% de logros en T3.

De este modo, los criterios de enumeración definidos por Fuson (ítem 312) y los que define Brousseau (ítem 31) no son, según nuestros resultados, del mismo nivel de dificultad para alumnos de primer grado.

Campo 4a: Resolver un problema aditivo

Al comienzo del año (T1) la categoría de problemas aditivos "parte-parte-todo" así como la categoría "transformación-estado" (búsqueda del estado final, del estado inicial o de la transformación) suman juntas 56% de fracasos (cf. **cuadro 5**). Destacamos sin embargo los problemas mejor resueltos: el ítem 42 (calculo del total) y el ítem 40 (búsqueda del estado final con una transformación positiva).

Si bien al final del año (T3) hay una mejoría en estas dos categorías de problemas, en la primera ("parte-parte-todo") aún persiste la dificultad para representarse las diferentes dimensiones del problema cuando no se les presenta ningún apoyo concreto (Ítem 453: 44% de fracaso).

En cuanto a la segunda categoría ("transformación-estado") encontramos en T3 la jerarquía clásica: se comprueba que la búsqueda del estado final se resuelve más fácilmente [3% de fracasos (ítem 40)] que la búsqueda de una transformación [31% de fracasos (ítem 44)] o del estado inicial [56% de fracasos (ítem 43)].

Camp 4b: Resolver un problema de comparación

La mejora entre el principio y el final del año se ve únicamente en los ítems 46 y 48 (**cuadro 6**). En el primero, partiendo de una situación de desigualdad se le pide al niño que las tres imágenes *"(...) tengan la misma cantidad de fichas"*. Se trata de igualar tres colecciones tomando como referente aquella en la que el cardinal es el mayor.

En cambio, en el segundo (ítem 48), partiendo de una situación en la que las imágenes del perro y del gato poseen la misma cantidad de fichas, el niño debe lograr que la imagen del *"(...) perro tenga 3 fichas más que la del gato"*. La particularidad de este ítem reside en el hecho de que la medida de la comparación (tres de más) es también aquella del número de fichas para agregar delante de la imagen del perro ya que al principio las colecciones eran iguales. En cambio en el ítem 49, en donde la situación al principio es una distribución desigual de fichas entre las imágenes [la medida de la comparación (cinco de más) no corresponde al agregado esperado] hay gran número de fracasos [alrededor de un 80% en T1 y en T3].

En estos campos, 4a y 4b, nuestra prueba confirma los resultados de estudios anteriores.

Campo 5: Determinar los ostensivos matemáticos pertinentes en un contexto

Si bien los primeros significantes matemáticos resultan parcialmente conocidos por los alumnos al final de primer grado, notamos que en ese momento un tercio de la población fracasa al reconocer la equivalencia de varias formas de representación simbólica de una colección determinada (ítem 551 y 552).

4. LA HETEROGENEIDAD DESDE UN PUNTO DE VISTA CONCEPTUAL: UNA TIPOLOGÍA DE LOS ALUMNOS

Los datos tienen un elemento temporal: un mismo individuo fue observado en dos momentos (T1 y T3) y en cada uno de ellos se midieron las mismas variables. En este caso se pueden definir dos grupos de variables reuniendo las observadas en el mismo momento.

• Grupo 1: las frecuencias de logros en el T1 (6 columnas)

• Grupo 2: las frecuencias de logros en el T3 (6 columnas)

Para evidenciar los principales factores de variabilidad de los individuos presentamos en este cuadro un análisis factorial múltiple [Escofier, Pagès (1990)], técnica que utiliza el Análisis en Componentes Principales (ACP):

• análisis "parciales" en cada uno de los dos grupos, luego

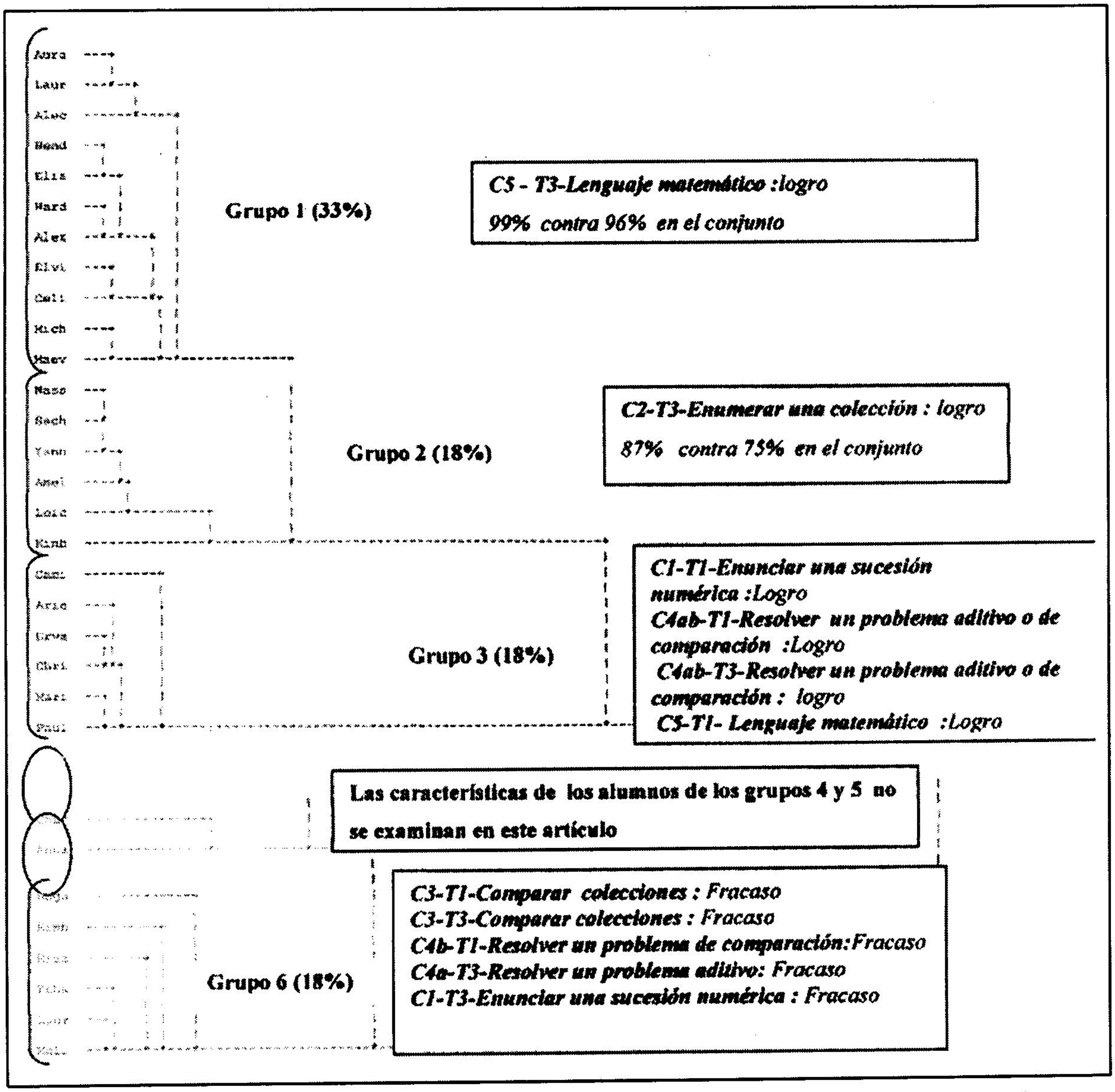
• un análisis "global" en los dos grupos juntos, ponderando las variables de cada grupo para evitar que un grupo pese más en la construcción de los ejes ocultando los resultados del otro.

Un primer análisis demostró que tres alumnos, muy diferentes de los demás, afectaban de modo desmesurado los factores. Fueron excluídos de los análisis subsiguientes (así el cuadro correspondiente tendrá 33 (y no 36) líneas y 12 columnas.

Los análisis parciales demuestran la existencia de un factor común a los dos grupos que podemos denominar: logro/fracaso. El primer eje factorial escalona este factor común, indicador de un logro global, que distingue entre los alumnos tanto en el T1 como en el T3. Las coordenadas, las contribuciones y las cualidades de representación de los individuos permiten validar e interpretar la posición de los individuos (parciales y globales) sobre los planos factoriales.

Una clasificación ascendente jerárquica sobre las coordenadas factoriales del análisis global pone en evidencia la existencia de seis grupos de alumnos con comportamientos característicos, lo que permite construir una tipología de los alumnos (cf. figura 1).

Figura 1: Árbol jerárquico



Indicaciones: las menciones " Logro " o " Fracaso " significan que la frecuencia media de los logros en el grupo es significativamente superior a la frecuencia media de los logros del grupo en su conjunto. Los datos cuantitativos correspondientes se encuentran en el **cuadro 7** de los Anexos.

Así observamos un reagrupamiento de los alumnos según las competencias ya adquiridas al comienzo y/ o al final de primer grado. Sólo analizaremos cuatro grupos (grupos 1, 2, 3 y 6). Los cuatro alumnos de los grupos n° 4 y 5 necesitarían un estudio de caso.

Hay seis alumnos (grupo 3) con resultados excepcionales. A principio de año poseen no solamente los aspectos convencionales sino también los aspectos operatorios. Sus resultados son superiores a la media del grupo en los campos 1 y 5 asi como en el 4. A final de año se confirma su relación operatoria al número, con resultados superiores a la media de los alumnos en el campo 4. Esta relación con el número les permite resolver problemas, se trata pues de una relación operatoria (Vergnaud 1981).

Otros seis alumnos (grupo 2) progresan más que el promedio de los otros en la enumeración de colecciones (campo 2). Es decir que han desarrollado en el transcurso del año una gran "*habilidad para el conteo*" (Baroody 19991). Su relación con el número expresa el manejo de la cardinalización de una colección.

Otros once alumnos (grupo 3) se distinguen al final del año por su competencia para determinar los ostensivos pertinentes dentro del contexto (campo 5), es decir por una relación con el número muy marcada por los aspectos convencionales.

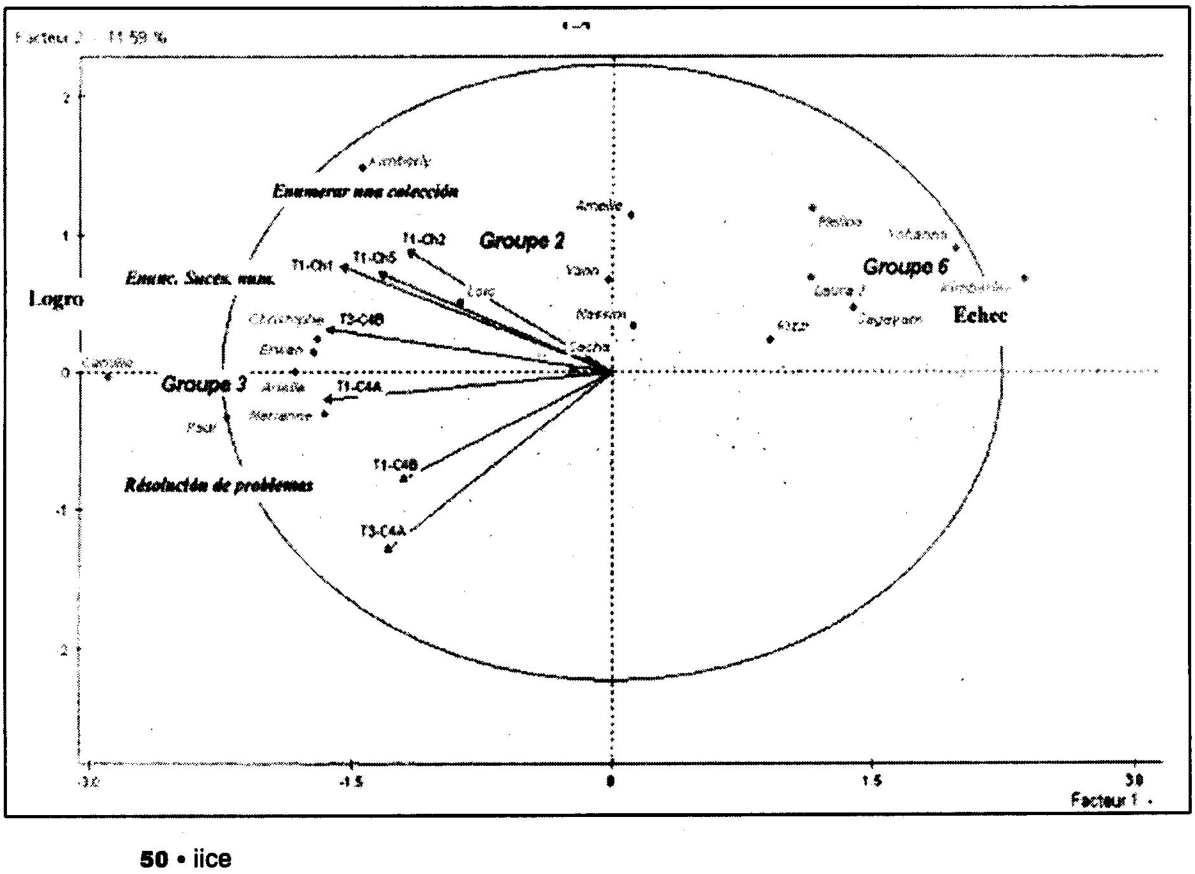
Los alumnos de estos tres grupos (o sea veintitrés en total) pueden identificarse por la adquisición de determinadas competencias, los del grupo 6 (seis alumnos) obtienen resultados más contrastados. Progresan como el promedio de los otros alumnos en el campo 2 ("enumerar una colección") y 5 ("determinar los ostensivos pertinentes en un contexto). A fin de año alcanzan el promedio de los alumnos en el campo 4b ("resolver un problema comparativo") progresando en los ítems 46 y 48. Recordemos que es en este campo donde la mayoría de los alumnos tiene más dificultades. En cambio, a fin de año tienen más fracasos que los demás en los campos 1 ("enunciar una sucesión numérica") y 4a ("resolver un problema aditivo").

Pero lo que más llama la atención en ellos es su dificultad para comparar las colecciones (campo 3) tanto a principio como a fin de año. Así, si bien estos alumnos parecen poseer la cardinalización igual que los demás (logro en el campo 2 como el promedio de los alumnos), tienen dificultad en la competencia que esta engendra "*... realizar comparaciones numéricas entre dos o más conjuntos.*" (Karmiloff-Smith 1992). Así estos seis alumnos se caracterizan por sus dificultades, es decir por tener relaciones heteróclitas e inestables con la numeración.

La figura 2 permite una visualización parcial de estos diferentes resultados. (cfr. Figura 2)

En resumen, a fin de año, veintitrés alumnos (grupos 1, 2 y 3) refuerzan (grupo 3) o adquieren (grupo 2 y 3) competencias superiores al promedio de los alumnos estudiados. Podemos pues pensar que para ellos la enseñanza a lo largo del año escolar ha sido fuente de progreso. En cambio para otros seis alumnos (grupo 6) la influencia de la enseñanza parece ser mucho menos clara: sólo se distinguen por sus fracasos. Solamente un análisis de las interacciones didácticas podría permitirnos interpretar estos fenómenos (Menotti & Ricco, en vias de publicación).

Figura 2: Grupos bien representados sobre el plano



CONCLUSIÓN Y DISCUSIÓN

Al término de este estudio podemos subrayar la heterogeneidad de la relación personal de los alumnos de primer grado con la numeración, tanto a principio como a finales de año, sin que esta heterogeneidad sea, según nuestros resultados, más marcada en ZEP. Recordemos la homogeneización de la población constatada al final del año con excepción del campo 3 y 4b. Nuestro análisis nos ha permitido ver en forma operativa las diferentes formas de conceptualización en relación con el objeto numeración.

Por un lado, el análisis global de los resultados por ítem y por campo mostró que al final de primer grado un tercio de la población falla por lo menos en un ítem de cada uno de los campos 1, 2 y 3 aunque la serie numérica utilizada en nuestra prueba se extienda solamente de uno a veinte en casi todos los casos. Las dificultades revelan que no han sido aún adquiridas: la propiedad de divisibilidad de la cadena, la generalización de las técnicas de enumeración a cualquier tipo de material, y el manejo de "la situación fundamental" de la numeración tal como la define Brousseau.

Además, lo que menos se logra es la resolución de un problema (campo 4a y 4b) y estimamos, como Vergnaud, (1981) que esta actividad matemática está en el centro mismo de la construcción del número en su dimensión operatoria.

Por otro lado, la clasificación ascendente jerárquica construida a partir de las coordenadas factoriales resultantes del Análisis Factorial Múltiple permitió evidenciar que existen distintos tipos de heterogeneidad entre los alumnos.

Hay diferencias "inter-familias" en los resultados obtenidos por estos grupos en determinados campos en el pretest y/o en el postest, es decir, en la concepción de la numeración. Se evidencian dos tipos de relación con el objeto numeración: los números "para contar" y los números "para resolver problemas".

Tambien existen variaciones "intra-familias", ya que si bien hay más rasgos comunes en los alumnos de la misma familia, hay diferencias en su evolución a lo largo de primer grado. Algunos parecen ser capaces de aprovechar las situaciones de aprendizaje para progresar en ciertos campos, otros parecen lograr relacionarlos entre sí reorganizando completamente sus concepciones numéricas. El estudio de los procedimientos utilizados por los niños sin duda permitiría analizar esta heterogeneidad desde otra perspectiva.

La prueba utilizada en este estudio parece permitir caracterizar estos distintos tipos de conceptualización. La division en cinco campos ha resultado fructífera ya que no todos los niños desarrollan su relación al número por el mismo camino. Cada uno de ellos puede desarrollar competencias en un campo u otro, o asociando distintos campos (entre los cinco descritos) que resulten determinantes para la elaboración de su relación con el número. Estas observaciones corroboran la afirmación de Vergnaud y Ricco (1976), a saber, que el proceso de conceptualización no sigue un orden total sino un orden parcial.

Queda por determinar el impacto que puedan tener las acciones didácticas en el aula sobre la diferencias intra e inter-familias en la evolución personal de la relación del alumno al objeto "numeración". ♣

BIBLIOGRAFÍA

Baroody A., (1991), "Procédures et principes de comptage: leur développement avant l'école", en: Bideaud, J., Meljac, C. & Fischer, J. P. (eds) *Les chemins du nombre*, Lille, PUL.

Bideaud J., (1997), "Du bébé à l'enfant de Piaget: quelle construction du nombre?", en : *Psychologie Française, Piaget aujourd'hui*, tome 42-1.

Boucher Jollivet M. C., (2000), *Étude différentielle du dénombrement par comptage avant l'entrée au CP*, DEA Didactique des disciplines, Université Paris 7.

Brousseau G., (1995), "Qu'est-ce que faire des Mathématiques? Les mathématiques à l'école", en : *Bulletin APMEP*, N° 400, septembre 1995, pp.831-850.

Briand J., (1999), "Contribution à la réorganisation des savoirs pré-numériques et numériques. Étude et réalisation d'une situation d'enseignement de l'énumération dans le domaine pré-numérique", en: *Recherches en didactique des mathématiques*, volume 19/1.

Chevallard Y., (2003), "Approche anthropologique du rapport au savoir et didactique des mathématiques", en: Maury. S. et Caillot. M. (sous la direction), *Rapport au savoir et didactique*, Paris, Éditions Fabert, Collection Éducation et sciences.

ECPN, (1995), "Épreuve Conceptuelle de résolution de Problèmes Numériques", en: Compétences et incompétences en arithmétique, une aide au diagnostique et à l'action pédagogique destinée aux enfants affectés de difficultés sévères d'apprentissage, *Groupe Cimete, Revue ANAE 1995*, N° hors série, 58-63.

Escoffier B.& Pagès J., (1990), *Analyses factorielles simples et multiples*, Paris, Dunod.

Fayol M., (1990), *L'enfant et le nombre*, Neuchâtel, Paris: Delachaux & Niestlé.

Fuson K., Richards J. & Briars D., (1982), The acquisition and elaboration of the number word sequence, en: Brainerd, C. (Ed.), *Progress in cognitive development: Children's Logical and mathematical cognition*, volumen 1, New York, Springer-Verlag.

Fuson K., (1988), *Children's counting and concepts of number*, New York, Springer-Verlag.

------------- (1991), "Relations entre comptage et cardinalité chez les enfants de deux à huit ans", en: Bideaud, J., Meljac, C. & Fischer, J. P. (eds.), *Les chemins du nombre*. Lille, PUL.

Gauderat-Bagault L. & Lehalle H., (2002), "La généralisation des connaissances numériques avant et après 7-8 ans", en: Bideaud, J. & Lehalle, H. (s/ la Dir.), *Le développement des activités numériques chez l'enfant*, Hermes, Science, Paris, Lavoisier.

Gelman R. & Gallistel C.-R., (1978), *The child's understanding of number*, Cambridge MA, Harvard University Press.

Gréco P. & Morf A., (1962), *Structures numériques élémentaires*, E.E.G., volumen XIII, Paris, PUF.

Gréco P., Grize J.B., Papert S. & Piaget, J., (1960), *Problèmes de la construction du nombre*, E.E.G., volumen XI, Paris, PUF.

Grégoire J. & Van Niewenhoven C., (1997), "La construction du concept de nombre chez l'enfant. Le modèle piagétien est-il toujours actuel?", en: *Piaget après Piaget. Évolution des modèles, richesse des pratiques. Piaget 100 ans.* Éditions La Pensée Sauvage.

Ifrah G., (1994), *L'histoire universelle des chiffres*, Paris, Robert Laffont.

Karmiloff-Smith. A., (1992), *Beyond Modularity. A Developmental Perspective on Cognitive Science*, Cambridge MA, The MIT Press.

Lebart L., Morineau A., Piron M. (2000), *Statistique exploratoire multidimensionnelle.* Dunod.

Laborde C. & Vergnaud G., (1994), "L'apprentissage et l'enseignement des mathématiques", en: Vergnaud, G. (coord.), *Apprentissages et didactiques, où en est-on?*, Hachette, Éducation.

Larere C., (1994), *Construction et appropriation de connaissances* *chez trois enfants infirmes moteurs cérébraux sans parole*, Thèse de doctorat Université Paris 5.

Lehalle H., (2002), "Connaissances numériques et modèles de développement?", en: Bideaud, J. & Lehalle, H., *Le développement des activités numériques chez l'enfant*, Paris, Hermès Science.

Menotti G., Ricco G (à paraître), "Didactic pratice and the construction of the personal relation of six-year-old pupils to an objet of knowledge: numeration", en: *European Journal of Psychology of Education*.

Numa-Bocage L., (1997), *Étude de la médiation dans l'enseignement de la numération*. Thèse de doctorat, Université Paris V - René Descartes, Paris.

Piaget J. & Szeminska A., (1941), *La genèse du nombre chez l'enfant*, Neuchâtel, Delachaux & Niestlé.

Piaget J. & Inhelder B., (1969), "Les opérations intellectuelles et leur développement", en: Fraisse, P. & Piaget, J. (eds), *Traité de psychologie expérimentale*. Tome VII: *L'intelligence*, Paris, PUF.

Steffe, L.-P., (1991), "Stades d'apprentissage dans la construction de la suite des nombres", en: Bideaud, J., Meljac, C. l. & Fischer, J. P. (eds), *Les chemins du nombre*, Lille, PUL.

Steffe, L.-P; Von Glaserfeld, E.; Richard, J. & Cobb, P. (1983), *Children's counting types; philosophy, theory and application*, New York, Praeger Scientific.

Sophian, C. (1991), "Le nombre et sa genèse avant l'école primaire. Comment s'en inspirer pour enseigner les mathématiques", en: Bideau, J. ; Meljac, C. & Fischer, J. P. (eds), *Les chemins du nombre*, Lille, PUL.

Van Nieuwenhoven, C. (1999), *Le comptage: Vers la construction du nombre*, Éditions DeBoeck, Université, Paris & Bruxelles.

Vergnaud, G. & Ricco, G. (1976-77), "Psychogenèse et programme d'enseignement : différents aspects de la notion de hiérarchie", en: *Bulletin de Psychologie*, 330, XXX, 1976-77.

Vergnaud, G. (1981), *L'enfant, la mathématique et la réalité*, Berne, Peter Lang.

------------- (1991) La théorie des champs conceptuels", en: *Recherche en didactique des mathématiques*, volumen 10/2-3, pp.133-169.

Cuadro N°2. Campo 1 "Enunciar la sucesión numérica", adquisición (17 ítems)

		Adquisición de la cadena numérica																	
Ítems		121				122				123				124					media
		5	11	16	19	3	7	11	13	3	9	12	15	6	11	14	16	21	
Logro	T1	33 92%	32 89%	32 89%	26 72%	34 94%	31 86%	30 83%	29 81%	31 86%	32 89%	30 83%	26 72%	34 94%	34 94%	35 97%	34 94%	33 92%	78%
	T3	36 100	35 97%	35 97%	34 94%	36 100	36 100	36 100	36 100	36 100	36 100	35 97%	36 100	34 94%	35 97%	35 97%	34 94%	35 97%	94%
Fracaso	T1	3 8%	4 11%	4 11%	10 28%	2 6%	5 14%	6 17%	7 19%	5 14%	4 11%	6 17%	10 28%	2 6%	2 6%	1 3%	2 6%	3 8%	22%
	T3	0	1 3%	1 3%	2 6%	0	0	0	0	0	0	0	0	2 6%	1 3%	1 3%	2 6%	1 3%	6%
	N	36	36	36	36	36	36	36	36	36	36	36	36	36	36	36	36	36	

Cuadro N°2 bis. Campo 1 "Enunciar la sucesión numérica", estructuración (9 ítems)

		Estructuración de la cadena numérica									
Ítems		10	13	14	15	16	17				mean C.1
							4	9	15	26	
Logro	T1	30 83%	19 53%	20 56%	13 36%	12 33%	29 81%	28 78%	21 58%	23 64%	78%
	T3	36 100	24 67%	31 86%	29 81%	26 72%	34 94%	34 94%	33 92%	34 94%	94%
	N	36	36	36	36	36	36	36	36	36	

		Estructuración de la cadena numérica									
Ítems		10	13	14	15	16	17				media
						4	9	15	26		
Fracaso	T1	6 17%	17 47%	16 44%	23 64%	24 67%	7 19%	8 22%	75 42%	13 36%	22%
	T3	0	12 33%	5 14%	7 19%	10 28%	2 6%	2 6%	3 8%	2 6%	6%
	N	36	36	36	36	36	36	36	36	36	

Cuadro N°3. Campo 2: "Enumerar una colección discreta" (9 ítems)

		20	24	25	211	212	213	221		222	media
								esparcidos	apilados		
Logros	T1	24 67%	6 17%	17 47%	23 64%	29 81%	31 86%	30 83%	19 53%	18 50%	61%
	T3	27 75%	15 42%	20 56%	25 70%	34 94%	35 97%	34 94%	21 58%	25 69%	73%
Fracasos	T1	12 33%	30 83%	19 53%	13 36%	7 19%	5 14%	6 17%	17 47%	18 50%	39%
	T3	9 25%	21 58%	16 44%	11 30%	2 6%	1 3%	2 6%	15 42%	11 31%	27%
	N	36	36	36	36	36	36	36	36	36	

Cuadro N°4. Campo 3: "Comparar colecciones discretas" (9 ítems)

		31	33	34	311	312	321	322	351	352	media
Logros	T1	11 31%	19 53%	15 42%	35 97%	31 86%	8 22%	7 19.%	26 72%	30 83%	56%
	T3	19 53%	30 83%	23 64%	30 83%	36 100%	26 72%	21 58%	29 81%	35 97%	77%
Fracasos	T1	25 69%	17 47%	21 58%	1 3%	5 14%	28 78%	29 81%	10 28%	6 17%	44%
	T3	17 47%	6 17%	13 36%	6 17%	0	10 28%	15 42%	7 19%	1 3%	23%
	N	36	36	36	36	36	36	36	36	36	

Cuadro N°5. Campo 4a: "Resolver un problema aditivo" (7 ítems)

		Resolución de Problemas aditivos							
		Parte - parte - todo				Estado transformación estado			
		451	452	453	42	40	43	44	media
Logros	T1	17 47%	6 17%	10 28%	28 78%	26 72%	9 25%	15 42%	44%
	T3	28 78%	28 78%	20 56%	33 92%	35 97%	16 44%	25 69%	73%
Fracasos	T1	19 53%	30 83%	26 72%	8 22%	10 28%	27 75%	21 58%	56%
	T3	8 22%	8 22%	16 44%	3 8%	1 3%	20 56%	11 31%	27%
	N	36	36	36	36	36	36	36	

Cuadro N°6. Campo 4b: "Resolver un problema de comparación" (5 ítems)

		46	48	49	471	472	media
Logros	**T1**	26 72%	15 42%	3 8%	11 31%	8 22%	35%
	T3	**33** **92%**	**24** **67%**	6 17%	10 28%	10 28%	46%
Fracasos	**T1**	10 28%	21 58%	**33** **82%**	**25** **69%**	**28** **78%**	65%
	T3	3 8%	12 12 33%	**30** **83%**	**26** **72%**	**26** **72%**	54%
	Total	36	36	36	36	36	

Cuadro N°7: Datos cuantitativos resultantes del análisis factorial múltiple

N° del grupo	**Número de alumnos**	**% del total de alumnos**	**Campos remarcables en el T1**	**Campos remarcables en el T3**
Grupo 1	**11**	**33**		**Campo 5** ("Determinar los ostensivos matemáticos pertinenentes en un contexto"): promedio de 99% de logro contra 96% en el conjunto (umbral = 0,1%)
Grupo 2	**6**	**18,2**		**Campo 3** ("Enumerar una colección"): promedio de 87% de logro contra 75% en el conjunto (umbral = 0,8%)
Grupo 3	**6**	**18,2.**	**Campo 1** ("Enunciar una sucesión numérica"): promedio de 96% de logro contra 80% en el conjunto (umbral = 0,3%)	
			Campo 4a ("Resolver un problema aditivo"): promedio de 86% de logro contra 47% en el conjunto (umbral < 0,1%)	**Campo 4a** ("Resolver un problema aditivo"): promedio de 95% de logro contra 78% en el conjunto (umbral = 0,6%)
			Campo 4b ("Resolver un problème de comparasión"): promedio de 63% de logro contra 38% en el conjunto (umbral = 0,1%)	**Campo 4b** ("Resolver un problema de comparación"): promedio de 87% de logro contra 50% en el conjunto (umbral < 0,1%)
			Campo 5 ("Determinar los ostentivos matemáticos pertinenentes en un contexto"): promedio de 95% de logro contra 80% en el conjunto (umbral = 0,1%)	
Grupo 6	**6**	**18,2**		**Campo 1** ("Enunciar una sucesión numérica"): promedio de 86% de logro contra 91% en el conjunto (umbral = 0,5%)
			Campo 3 ("Comparar colecciones"): promedio de 41% de logro contra 58% en el conjunto (umbral = 0,8%)	**Campo 3** ("Comparar colecciones"): Promedio de 59% de logro contra 79% en el conjunto (umbral = 0,1%)
				Campo 4a ("Resolver un problema aditivo"): promedio de 57% de logro contra 78% en el conjunto (umbral = 0,1%)
			Campo 4b ("Resolver un problema de comparación"): promedio de 17% de logro contra 38% en el conjunto (umbral = 0,8%)	